UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

PROCESOS DE GENERALIZACIÓN EN SITUACIONES QUE INVOLUCRAN SECUENCIAS NUMÉRICAS Y GEOMÉTRICAS
UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Luis Fernando Olaya Quemba.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias.

Bogotá, Colombia

2014

PROCESOS DE GENERALIZACIÓN EN SITUACIONES QUE INVOLUCRAN SECUENCIAS NUMÉRICAS Y GEOMÉTRICAS UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Luis Fernando Olaya Quemba

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Directora

Doctora Clara Helena Sánchez B.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias.

Bogotá, Colombia

2014

Si tu intención es describir la verdad, hazlo con sencillez y la elegancia déjasela al sastre.

Albert Einstein

Agradecimientos

Especialmente expreso mis agradecimientos a la Doctora Clara Helena Sánchez, la directora de este trabajo de grado quien me ha colaborado y orientado en el diseño, redacción y construcción de esta propuesta didáctica.

A mi familia por su apoyo y comprensión, al Centro Educativo Distrital Jackeline por permitirme aplicar la actividad de diagnóstico en el grado séptimo de la jornada de la mañana y a Dios por guiarme en el desarrollo de este proyecto.

Resumen

Los estudiantes de grado séptimo del Centro Educativo Distrital Jackeline presentan algunas dificultades relacionadas con los procesos de generalización y la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico cuando abordan situaciones con secuencias numéricas y geométricas. El análisis de estas dificultades se asocia con algunos aspectos de tipo histórico epistemológico del razonamiento por inducción, a la construcción del concepto de sucesión y a su tratamiento didáctico. Por lo tanto se propone una secuencia de actividades didácticas a partir del reconocimiento de regularidades y patrones en diferentes situaciones, que potencien el desarrollo del pensamiento variacional.

.

Palabras clave: procesos de generalización, sucesiones, patrones, razonamiento por inducción.

Abstract

The seventh graders of District Education Center Jackeline present some difficulties related to the processes of generalization and translation of natural language to algebraic language when addressing situations with numerical and geometric sequences. The analysis of these difficulties are associated with some aspects of epistemological historical type of reasoning by induction, the construction of the concept of succession and its didactic treatment. Therefore a sequence of teaching based on the recognition of regularities and patterns in different situations, to enhance the development of the proposed variational thinking activities.

Keywords: processes of generalization, succession, patterns, reasoning by induction.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Pág.

Introducción

Comúnmente se suele asociar el desarrollo del pensamiento variacional en el currículo escolar únicamente con la asignatura de álgebra, está reducida por lo general al manejo sintáctico sin significado de variables y fórmulas. Se desconoce o ignora que el desarrollo de los procesos de generalización debe potenciarse desde la escuela elemental como lo plantean Godino (2012)[1], los documentos del Ministerio de Educación Nacional y lo reiteran en su investigación Ruano, Socas y Palarea (2008). Para estos autores las dificultades más comunes que se evidencian en los estudiantes de la educación secundaria están relacionadas con la generalización de patrones, el uso de procedimientos adecuados y la traducción correcta de expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Dificultades como las descritas en estas investigaciones se han podido evidenciar también en los estudiantes de grado octavo de la institución donde trabajo, Centro Educativo Distrital CED Jackeline, cuando se enfrentan al álgebra escolar, errores que se manifiestan al interpretar, plantear y resolver problemas variacionales con secuencias numéricas y geométricas, que se originan muy posiblemente en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Es necesario entonces profundizar en la comprensión de la naturaleza del razonamiento algebraico y la forma como se relaciona con los procesos de generalización como lo plantea Radford (2012).

De la problemática antes mencionada y del análisis de las investigaciones consultadas surge entonces la siguiente pregunta:

¿Qué características debe tener una secuencia didáctica para estudiantes de grado séptimo que permita potenciar el reconocimiento de regularidades para encontrar patrones y expresar algebraicamente la variación de una secuencia matemática?

Para aportar a la resolución de esta problemática se presenta una secuencia didáctica que busca potenciar en los estudiantes de séptimo grado el razonamiento algebraico y

[1] Este enfoque es llamado “early algebra” documentado ampliamente por Godino (2012).

las habilidades para comprender y comunicar sus ideas relativas a la variación. Se comenzará con el planteamiento en lenguaje natural de diferentes situaciones que requieran estudiar las secuencias numéricas y geométricas para llegar a procesos de generalización, que doten de sentido a la variable y a las expresiones algebraicas, que se abordarán posteriormente en los cursos de álgebra, trigonometría y cálculo.

Este trabajo consta de 5 capítulos. En el primer capítulo se realizan algunas consideraciones de tipo histórico epistemológico que permiten identificar las características históricas que dieron lugar a los procesos de generalización de secuencias de tipo numérico y geométrico.

En el segundo capítulo se tratan aspectos de tipo disciplinar de las sucesiones y su relación con el razonamiento inductivo.

En el tercer capítulo se realizan las consideraciones de tipo didáctico de los procesos de generalización basado en algunas investigaciones en las cuales se identificaron dificultades presentes en los estudiantes al resolver situaciones de variación con secuencias numéricas o geométricas.

En el cuarto capítulo se presenta un instrumento de indagación dirigido a estudiantes de grados séptimo del CED Jackeline que involucra la resolución de secuencias numéricas y geométricas para identificar las dificultades presentadas y contrastarlas con las consideraciones de tipo histórico, disciplinar y didáctico.

En el último capítulo se propone una secuencia de actividades didácticas enfocadas al trabajo con secuencias numéricas y geométricas involucrando los procesos de generalización que den significado a la construcción del lenguaje simbólico del álgebra escolar.

Finaliza el trabajo con las conclusiones, algunas recomendaciones finales para posteriores trabajos y la bibliografía usada para la construcción de esta propuesta didáctica.

1. Consideraciones de tipo histórico-epistemológico

Partiendo del punto de vista de considerar la historia de las matemáticas como una herramienta didáctica importante para los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos o nociones matemáticas, en este capítulo se pretende documentar algunos sucesos históricos relacionados con el estudio de la variación de secuencias numéricas como es el caso de los números figurados y las relaciones establecidas entre ellos, para posteriormente relacionarlas con el lenguaje simbólico usado en los procesos de generalización y los principios de la demostración en matemáticas. El análisis de estos hechos se utilizará como insumo histórico para la elaboración de situaciones problematizadoras en la enseñanza del álgebra escolar para el grado séptimo en el cual los estudiantes se encuentran en el proceso de transición de la aritmética al álgebra y además se espera que desarrollen el pensamiento variacional a través del establecimiento de hipótesis, conjeturas y generalizaciones sobre datos o relaciones matemáticas, expresadas a través de lenguajes cada vez más formales.

1.1 Los números figurados: de los pitagóricos al renacimiento

Los primeros en estudiar los números en sí mismos fueron los pitagóricos en el siglo V a.c. Es justo allí en la escuela pitagórica cuando Filolao dice: *Todas las cosas que pueden ser conocidas tienen número; pues no es posible que sin número nada pueda ser conocido ni concebido* [2]. Su concepción de número como una multiplicidad de unidades, se encuentra en los Elementos de Euclides (Libro VII, definición dos). Con esta definición los números que llamamos hoy en día naturales comenzaban en el número dos, ya que el uno era el inicio de todos y no se consideraba como un número. Posiblemente como lo

[2] Pérez (1994, 332)

afirma Peréz (2000, 332) *los pitagóricos consideraban a los números como los componentes últimos de los objetos materiales. Más o menos como nuestros átomos. Seguramente a esta concepción más materialista debamos la existencia de los números triangulares y de los números poligonales desde los albores de la Matemática.* Esta concepción les permitió estudiar las relaciones y propiedades de los números naturales, representándolas por medio de piedras o puntos. Según la distribución geométrica encontrada en la representación recibían un nombre específico de acuerdo con la figura geométrica que formaban; a esta caracterización de los números naturales se les conoce como **números figurados**.

Algunos ejemplos de los números figurados según su distribución geométrica han sido popularmente difundidos, en libros de texto, libros de historia de las matemáticas y en páginas de la red, como son los números oblongos, estrellados, pentagonales, hexagonales triangulares o cuadrados. Algunos ejemplos, se pueden observar en la siguiente ilustración.

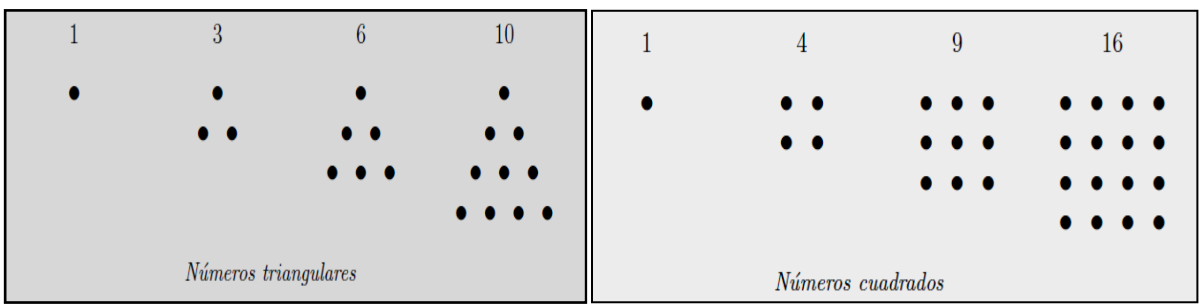


Figura1- 1: Números triangulares y cuadrados.

Los números figurados, según Hofmann (2002, 43-44), son atribuidos a Hipsicles (de la escuela pitagórica) aproximadamente en el 180 a.c.; fueron retomados más tarde por el neopitagórico Nicómaco de Gerasa quien formuló los números cúbicos como la suma de impares sucesivos, al observar la siguiente regularidad de los números cúbicos en unos cuantos casos particulares:

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 3 + 5$$

$$3^3 = 7 + 9 + 11$$

$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$

$$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$$

$$6^3 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$$

...

Otra de las propiedades de los números figurados hallada por los pitagóricos se puede evidenciar en los **números cuadrados**, ya que se podían distribuir como colecciones de puntos en forma de cuadrado. La progresión de cuadrados se obtiene sumando los primeros números impares sucesivos.

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1 + 3 = 4$$
$$3^2 = 1 + 3 + 5 = 9$$
$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

...

Estas propiedades encontradas por los pitagóricos se basaron en cierta distribución de puntos llamada ***gnomón.*** Para Euclides el gnomón era la escuadra de los carpinteros, que conduce a la noción aritmética geométrica de secuencia de números cuadrados, donde cada cuadrado se obtiene del anterior y el gnomón (complemento) respectivo se forma por medio de una escuadra alrededor del cuadrado interior y de esta manera se reproduce indefinidamente otro cuadrado semejante al primero, González (2005, 42-43)[3], como se puede evidenciar en la figuras siguientes.

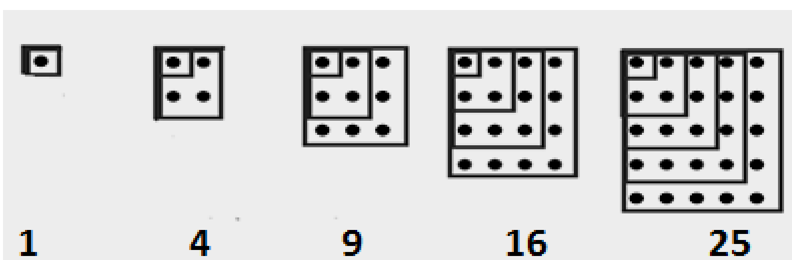


Figura1- 2: Gnómones de números cuadrados.

La comprobación de la propiedad anterior que se basaba en la construcción de cuadrados por medio de *gnómones* puede ser considerada como un tipo de

[3], César González Ochoa, 2005. En El gnomon y el esclavo. Accesible en http://www.iifilologicas.unam.mx/nouatellus/uploads/volumenes/nt-23-1/gnomon.pdf

demostración empírica [usada y admitida por la escuela Pitagórica], la cual *aceptaba la generalización con la evidencia de unos pocos casos particulares.* (Sánchez 2013, 6).

Para Bell (1999) los números figurados de los pitagóricos son una de las contribuciones más importantes de la aritmética antigua a la aritmética moderna superior; estos números alcanzaron un gran prestigio y motivó su estudio en diferentes épocas como se relatará a continuación.

Diofanto de Alejandría (siglo III d.c.) se interesó por los números figurados, escribió un libro sobre estos números del cual según Peréz (2000) solo se conservan pequeños fragmentos, Diofanto extendió los números figurados al espacio con la construcción de los números piramidales los cuales pudo obtener apilando uno sobre otro los números triangulares y encontró que los números piramidales según su base (si son de base triangular, cuadrada o pentagonal) se pueden conformar como sumas de otros números poligonales.

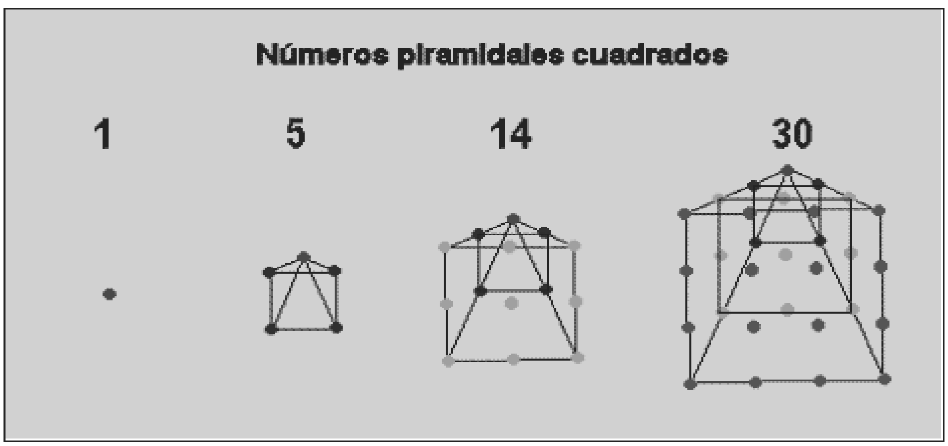


Ilustración tomada de

http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/internet/numeros-piramidales.htm

Figura1- 3: Números piramidales de base cuadrada.

Según la gráfica se puede expresar esta propiedad de los números piramidales de base cuadrada como:

$$1 = 1$$

$$5 = 1 + 4$$

$$14 = 1 + 4 + 9$$

$$30 = 1 + 4 + 9 + 16$$

$$\dots$$

En algunos escritos medievales se pueden encontrar referencias a los números figurados; por ejemplo en la obra aritmética de **Boecio** (s. f.) se empiezan a construir secuencias de estos números a manera de tablas, como la presentada en la siguiente ilustración.

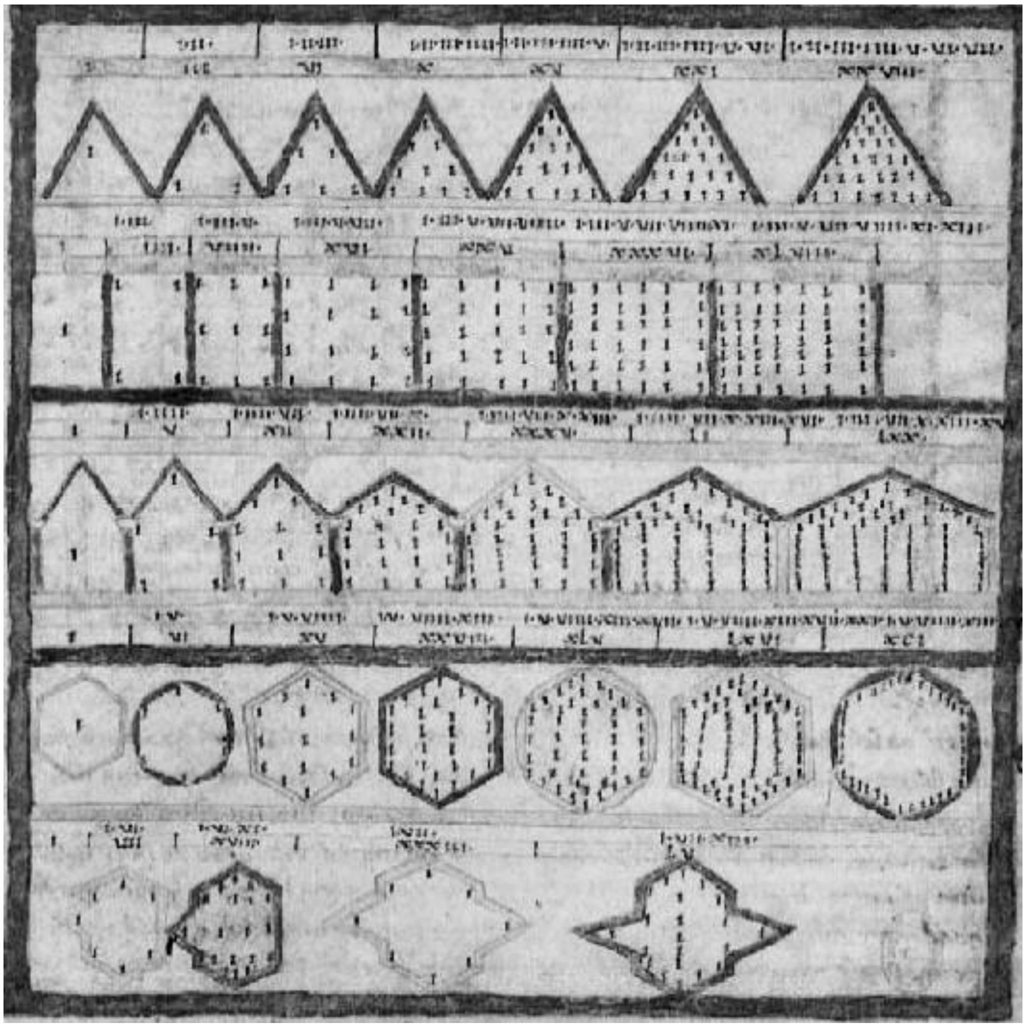


Ilustración tomada de Pérez (2000, 335).

Figura1- 4: Tablas de Boecio.

Desde mi punto de vista la construcción de tablas desde un contexto visual es un hecho histórico que podemos usar en el aula para identificar las regularidades entre la formación de los números figurados, la variación en el número de puntos y la conformación de una forma geométrica, para posteriormente pasar a un proceso de generalización.

1.2 Camino a la construcción del lenguaje simbólico

La búsqueda de regularidades y relaciones entre los números por medio de los números figurados motivó a otros personajes importantes de la historia de las matemáticas a escribir sobre sus características. En el siglo XVII, alrededor del año 1638, **Galileo** (1564-1642), observó que hay tantos números cuadrados como enteros positivos,

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & ,2 & ,3 & ,4 & ,5 & ,6, & \ldots, & n, \ldots \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & & \Downarrow \\ 1^2, & 2^2, & 3^2, & 4^2, & 5^2, & 6^2, & \ldots & ,n^2, \ldots \end{array}$$

Figura1- 5: Relación encontrada por Galileo.

lo cuál mostró a través de la construcción de sucesiones, advirtiendo una importante propiedad de estas dos sucesiones donde los elementos de una de ellas se colocaban en correspondencia biunívoca con la otra[4]. (Bell, 1999, 163-164).

Posteriormente **Pierre de Fermat** (1601-1665), dirige su atención sobre los números poligonales, al lanzar uno de sus retos en forma de conjetura: *Todo número entero puede expresarse mediante suma de, a lo sumo, n números n-gonales*. **Gauss** aceptó el reto de Fermat, y el 10 de julio de 1796, con tan solo 19 años celebra haber encontrado que *todo número entero es suma de, a lo sumo, tres números triangulares,* lo cual expresó así: **N** = Δ+Δ+Δ*.* Pero esta afirmación no se quedó ahí como una anotación de su diario, cinco años después en su obra ***Disquisiciones Aritméticas***, Gauss realiza la demostración no sólo para números triangulares sino también demuestra que *todo número entero es suma de, a lo sumo, cuatro números cuadrados* (Peréz, 2000, 336)[5].

Durante el siglo XVII se empezaron a remplazar los procesos algebraicos verbales, del álgebra retórica y el álgebra sincopada, por el álgebra simbólica de **Viete** (1540-1603) **y Descartes** (1596-1650), en donde la experiencia obtenida durante siglos por medio de

[4] Posteriormente en el siglo XIX fue esta característica escogida por Bolzano en 1840 y Cantor en 1878 como la propiedad de las clases infinitas.

[5] La demostración que hizo Gauss se encuentra en la Sección Quinta “de las formas y ecuaciones indeterminadas de segundo grado”, artículo 293, como un simple corolario de artículos anteriores. Los interesados pueden consultar la traducción de la obra al español, publicada por la Academia de Ciencias Exactas y Naturales: Gauss (1995).

símbolos, representaciones gráficas, ejemplos y tanteos se condensa según Bell (1999, 133*) en procedimientos mecánicos, que dieron lugar a una multitud de generalizaciones*.
En este momento histórico se buscaba la construcción de un lenguaje simbólico apropiado que permitiera la definición de conceptos matemáticos, la descripción de sus propiedades y la posibilidad de demostrarlas de la forma más rigurosa posible. Por lo tanto, para seguir analizando la relación entre los números figurados y los procesos de generalización es necesario acudir a los orígenes de la demostración en matemáticas.

1.3 Procesos de generalización y los inicios de la demostración en matemáticas

En el siglo VI a.c. los egipcios parcelaban sus campos a partir de reglas bien conocidas desde lo empírico, del mismo modo los babilónicos podían medir el área de campos rectangulares multiplicando el largo por el ancho con exactitud y lo podían verificar con exactitud física en la práctica, pero *estas reglas no se pueden incorporar en las matemáticas hasta que se han deducido de supuestos explícitos* Bell (1999). La demostración de los hechos estudiados por los Pitagóricos partía desde la observación empírica, por lo cual surgió la necesidad de que estos hechos se pudieran “demostrar” matemáticamente. Un claro ejemplo de este esfuerzo lo encontramos en los ***Elementos*** de Euclides considerado como el primer sistema axiomático, en donde a partir de unas cuantas definiciones, unos postulados y unos axiomas se demuestran las proposiciones de la teoría.
Bell (1999) insiste en que a lo largo de la historia el razonamiento lógico es el único medio hasta ahora ideado para distinguir y examinar las suposiciones implícitas y las implicaciones de una hipótesis. Además el estudio y verificación de hipótesis generan la formulación de conjeturas que pueden ser o no demostradas. En la conjetura se hace énfasis más en la abstracción que en el hecho empírico de la comprobación a partir de ejemplos y contraejemplos.
Para demostrar la generalización encontrada a partir de la abstracción de las propiedades de los números figurados se debe recurrir al proceso de demostración por inducción matemática, método de prueba relativamente reciente: el primer uso conocido lo hizo el sacerdote italiano Francesco Maurolico (1494-1575) en su publicación ***Arithmeticorum libri duo*** (1575); en este texto es posible identificar el estudio que este

autor realizó con los números figurados a partir de la construcción de tablas, la verificación de algunas propiedades con casos particulares y la construcción de lenguajes intermedios entre el álgebra sincopada y el álgebra simbólica, los cuales definió en sus 86 proposiciones del libro primero[6]. Uno de estos trabajos de Maurolico es explicado por Bussey W. (1917) en donde se evidencia la relación de columnas de números enteros, pares, impares, triangulares y cuadrados con su “numeri parte Altera Longiores” (N.P.A.L.) que se refiere a la propiedad en términos algebraicos de n(n-1) para cualquier n entero positivo.

Entero	Par	Impar	Triangular	Cuadrado	N.P.A.L.
1	0	1	1	1	0
2	2	3	3	4	2
3	4	5	6	9	6
4	6	7	10	16	12
5	8	9	15	25	20
6	10	11	21	36	30
7	12	13	28	49	42
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n	P	I	T	C	L

Figura1- 6: Relación establecida por Maurolico.

[6] Los interesados pueden consultar el texto original, el cual se encuentra en la dirección electrónica http://books.google.es/books?id=sZI8AAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

En el siglo XVII Blaise Pascal (1623-1662) utilizó la técnica de demostración por inducción matemática en los trabajos que publicó en 1654, pero el nombre como tal del método apareció en 1883 con Augustus De Morgan (1806-1871) quien fue el primero que describió el proceso cuidadosamente y le nombró inducción matemática[7]. Sin embargo, quien realmente lo enunció por primera vez fue Richard Dedekind (1831-1916) con el nombre de *inducción completa en su trabajo* ***¿Qué son y para qué sirven los números?*** (1888) en el cual no solo propone su teoría sobre los números naturales sino su definición de número real por medio de cortaduras (Sánchez, 2002, 200). Este famoso principio se hizo especialmente conocido como uno de los cinco postulados de Peano propuestos en su obra ***Los principios de la aritmética*** de 1889, para dar una definición axiomática de los números naturales.

Por varios siglos las regularidades observadas eran consideradas como verdades absolutas obtenidas a partir de la experiencia, hoy en día deben ser demostradas rigurosamente usando el principio de inducción matemática, aceptando de esta forma que la demostración matemática está desligada de toda experiencia empírica, Sánchez (2002, 201).

Es así como se puede identificar de esta manera la complejidad del proceso de generalización de los números figurados y el hecho de que tuvieron que esperar más de 20 siglos para poder ser definidos y demostrar sus propiedades rigurosamente. Evidentemente los números figurados le permitieron a los Pitagóricos establecer propiedades de los números naturales y reconocer regularidades desde observaciones empíricas, pero fue solo en el siglo XVII con el lenguaje del álgebra simbólica de Viete (1540-1603) y Descartes (1596-1650) y en el siglo XIX con la respuesta a la pregunta ¿Qué es un número natural?, que se pudo demostrar las propiedades de este conjunto numérico.

Un número natural es un elemento del mínimo conjunto inductivo. Se entiende por conjunto inductivo un conjunto S al que pertenece 0 y tal que si n pertenece a S, n + 1 también pertenece. Con la definición lo que se está aceptando es que el principio de inducción matemática es inherente al concepto de número natural (Sánchez, 2002, 202).

Esta historia es bastante fascinante. Reconocer por medio del conocimiento de la historia que algunos aspectos de los procesos de generalización de los números figurados

[7] Boyer (1994, 457-458).

nacieron al estudiar en sí mismos los números naturales nos está brindando un camino didáctico y epistemológico para la construcción del concepto de número, del concepto de variable y del lenguaje formal del álgebra simbólica.

2. Consideraciones de tipo disciplinar

Aparte del análisis histórico para profundizar en la relación entre los números figurados y los procesos de generalización es necesario revisar el referente disciplinar relacionado con las sucesiones y el principio de inducción matemática. Para alcanzar este propósito se revisarán los siguientes textos: Acevedo y Salazar (1997), Apostol (1988), Markushévich (1986) y Takeuchi (1983) y (1993). Es necesario aclarar que al documentar en este apartado los tipos de sucesiones y el proceso de inducción matemática, no se busca que los estudiantes de grado séptimo hacia los cuales se dirige esta propuesta de enseñanza clasifiquen sucesiones o realicen demostraciones por inducción matemática. Lo que se busca es tener en cuenta este referente y su relación con los procesos de generalización.

2.1 Características de las sucesiones

Para comenzar, se define inicialmente una **sucesión** como una lista de números a los que se les asocia un orden. Por ejemplo

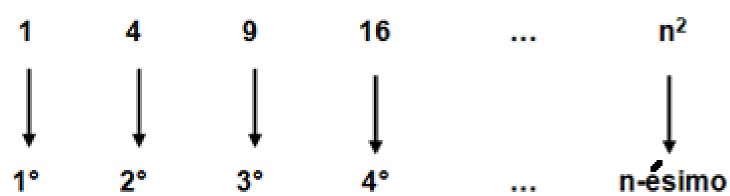


Figura 2- 1: Orden de los términos de una sucesión.

Para determinar una sucesión (a_1, a_2,…, a_n,…) = (a_n ; n=1, 2, 3, …) debemos poder expresar la forma de su término general a_n (en función de n). En el ejemplo evidentemente se tiene que $a_n = n^2$. Esta es una de las maneras de “dar” una sucesión, la otra es relacionar el n-ésimo término con los términos anteriores mediante una fórmula (llamada fórmula de recurrencia, o, ley de generación para (x_n)).
Esta fórmula determina los valores de x_n sucesivamente, a partir de los primeros términos de la sucesión en el caso del ejemplo $a_{n+1} = a_n + (2n + 1)$.

Al analizar una sucesión es posible identificar tres elementos importantes que la componene: el término n-ésimo construido por una fórmula de recurrencia, los términos particulares de la sucesión y el orden de sus términos o elementos. De esta forma, llamaremos **sucesión** a un conjunto ordenado de números reales representado por A= $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$**.** La cual se obtiene por medio de una **función** cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales $n \in \mathbb{N}$ y tal que a cada número natural, le corresponde el n-ésimo elemento de la sucesión; el recorrido de la función es, un subconjunto de los números reales, que recibe el nombre de **sucesión real.**

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to a_n$$

En el caso que el recorrido de la función sea el conjunto de los números reales se tendrá una **sucesión infinita**.

Es posible determinar entonces, que las características necesarias para estudiar los procesos de generalización en las sucesiones [secuencias numéricas y geométricas] son:

- Cada elemento de una secuencia numérica o geométrica está relacionado con un número entero positivo.
- La búsqueda de la regla o fórmula general que relacione la variación de los elementos de la secuencia con la posición asignada hace parte del proceso de generalización.
- La construcción de una expresión que defina el término n-ésimo de la secuencia, corresponde a la posibilidad de expresar las regularidades encontradas haciendo uso del lenguaje algebraico.

2.2 Tipos de sucesiones

A continuación se definen algunos tipos de sucesiones:

a) **Sucesión constante**: Una sucesión $\{a_n\}$ es constante si y solo si $a_n = a_{n+1}$, para todo entero positivo n del dominio de la sucesión, por ejemplo:

- $\{1^n\}$ $n \in \mathbb{N}$ = (1, 1, 1, 1, …)

- {2} $n \in \mathbb{N}$ = (2, 2, 2, 2, …)

b) **Sucesión creciente:** Una sucesión $\{a_n\}$ es creciente si $a_n < a_{n+1}$, para todo entero positivo n en el dominio de la sucesión.

La sucesión $a_n = \{n^2\}$ es una sucesión creciente, debido a que

$(a_{n+1} - a_n) = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 > 0$ y así $(a_{n+1} - a_n) > 0$, para todo $n \geq 1$.

c) **Sucesión decreciente**: Una sucesión $\{a_n\}$ es decreciente si $a_n > a_{n+1}$, para todo entero positivo n en el dominio de la sucesión.

- La sucesión $a_n = \{1/n\}$ es una sucesión decreciente, debido a que

$$(a_{n+1} - a_n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

Luego $(a_{n+1} - a_n) < 0$ y así $a_n > a_{n+1}$, para todo n.

d) **Sucesión monótona:** Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona si $\{a_n\}$ es creciente o decreciente.

- La sucesión $a_n = \{n^2\}$ es monótona por ser una sucesión creciente.
- La sucesión $a_n = \{1/n\}$ es monótona por ser una sucesión decreciente.

e) **Sucesión oscilante:** Una sucesión $\{a_n\}$ es oscilante si $a_n > a_{n+1}$ y $a_{n+1} < a_{n+2}$ o $a_n < a_{n+1}$ y $a_{n+1} > a_{n+2}$, según se considere n=2m+1 ó n=2m, (respectivamente), otro ejemplo a considerar seria 1, 0, 2, 0, 3, 0,…

- Las sucesiones $((-1)^n\, n^2); ((-3)^n); (-1)^n$ son oscilantes. (Acevedo y Salazar, 1997, 9)

f) **Sucesión acotada:** *Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente si existe una constante M tal que $a_n \leq M$, para todo n, y es acotada inferiormente si existe una constante M´ tal que $M' \leq a_n$ para todo n.*

Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es acotada si es acotada superior e inferiormente, es decir si existe una constante M_0 tal que $|a_n| \leq M_0$, para todo n. (Takeuchi, 1983, 2).

g) **Subsucesión:** Dada una sucesión se obtiene una subsucesión escogiendo elementos de ésta, sin alterar el orden. Sean n(1), n(2), …, n(k), … números naturales tales que: $n(1) < n(2) < n(3) < \cdots < n(k) < \cdots$ Entonces

$B = \{ a_n(1), a_n(2), \ldots, a_n(k), \ldots \}$ Es una sub-sucesión.

{n(1)-ésimo elemento} { n(2)-ésimo elemento} {n(k)-ésimo elemento}

$$A = \{ a_1, \ldots \ldots \ldots . a_n(1), a_n(1)+1, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots, a_n(2), \ldots \ldots \ldots \ldots .., a_n(k), \ldots \ldots \ldots \}$$

$$B = \{ \quad a_n(1), \quad a_n(2), \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .., a_n(k), \ldots \}$$

(Primer elemento) (Segundo elemento) (K-ésimo elemento)

Figura 2- 2: Sub-sucesión.

Por lo tanto B es una sub-sucesión de A.

h) **Sucesión recurrente:** el concepto de sucesión recurrente es una amplia generalización del concepto de progresión aritmética o geométrica. Comprende los casos particulares de las sucesiones de los cuadrados o cubos de los números naturales, las sucesiones de cifras de descomposición decimal de los números racionales, entre otros. (Markushévich, 1986, 7).

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, si existe un número natural k y unos números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ (reales) tales que desde cierto número n y para todos los siguientes se tiene $u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots . + a_k u_n \ (n \geq m \geq 1)$.

La sucesión se llama sucesión recurrente de orden k. Así se tienen:

Progresión geométrica: en una sucesión recurrente en la cual $u_n = aq^{n-1}$. En este caso en la ecuación se tiene $u_{n+1} = qu_n$. Aquí k=1 y a_1=q.

Progresión aritmética: es una sucesión recurrente en la cual $u_n = a(n-1)d, \ldots$ Tenemos entonces que $u_{n+1} = u_n + d$. Pero considerando dos valores sucesivos de n se tiene por ejemplo que $u_{n+2} = u_{n+1} + d$ y $u_{n+1} = u_n + d$ y restándolas miembro a miembro, obtenemos $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} + u_n$, es decir $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$, Aquí k=2,

$a_1=2$ y $a_2=-1$. Por lo tanto, la progresión aritmética es una sucesión recurrente (Markushévich, 1986, 7-8).

Otros ejemplos de sucesiones recurrentes se presentan en la sucesión de los cuadrados de los números naturales como $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$ y la sucesión de los cubos de los números naturales es también una sucesión recurrente según sus términos[8] como $u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_{n.}$

2.3 El principio de Inducción

El principio de inducción matemática, está íntimamente relacionado con el **razonamiento por inducción** estudiado específicamente por los filósofos. Los trabajos de Russell (1973) y Edwards (1976), mencionados por Sánchez (2002, p.199) lo referencian como uno de los problemas abiertos de la filosofía, el que contempla dos aspectos: *Uno lógico y otro epistemológico. Al primero le compete establecer reglas para la inferencia inductiva comparables con las reglas de inferencia deductiva y al segundo justificar la inferencia inductiva, esto es, explicar por qué este tipo de razonamiento es racional.*

De esta forma en este componente disciplinar se retoma el aspecto lógico del principio de inducción en el cual se debe responder a la pregunta: *¿qué reglas garantizan la **validez** de un argumento inductivo, y particularmente ¿qué garantiza la validez de un argumento inductivo en el cual la conclusión se saca por generalización de unos cuantos casos particulares?* (Sánchez, 2002, 199). Ahora bien u*n argumento* [razonamiento] *inductivo es un argumento inválido en el cual la evidencia que aportan sus premisas, supuestas todas verdaderas, hace altamente improbable que su conclusión sea falsa. La fuerza inductiva no proviene únicamente de la forma –como en el caso de la validez deductiva– sino de la fuerza de la evidencia que contienen sus premisas y del grado de "improbabilidad" de la conclusión.* (Sánchez, Serrano, Peña, 2009, 96).

Por lo tanto el **Razonamiento inductivo** depende de su *fuerza inductiva* que puede ser fuerte o débil basándose en la aceptación o no de las premisas y el grado de probabilidad de aceptación de la conclusión encontrada. A su vez los razonamientos inductivos se

[8] Para revisar la demostración ver Markushévich (1986, 10).

pueden clasificar en *Inducción por enumeración o inducción simple* y en *Analogías.* Para efectos de este trabajo se retoma la primera clase de razonamientos inductivos, entendiéndose como el tipo de razonamientos en donde las premisas son proposiciones singulares con cierto grado de uniformidad y **la conclusión** es una **generalización** sobre toda una población (conjunto).

Para describir las características o propiedades comunes de un conjunto o de una sucesión de elementos, se estudia un subconjunto de términos de la sucesión que constituyen una muestra y que a su vez permiten establecer inferencias por enumeración, las cuales se pueden clasificar en tres tipos: *de muestra a población, de muestra a muestra, o de población a muestra* (Sánchez, Serrano, Peña, 2009, 103), que podemos esquematizar en el siguiente cuadro:

1. De muestra a muestra	**2. De muestra a población**	**3. De población a muestra**
Todos los P observados tiene la propiedad Q. Luego El próximo P observado tendrá la propiedad Q.	Todos los P observados tiene la propiedad Q. Luego Todos los P tiene la propiedad Q.	El n por ciento de todos los individuos que tienen la propiedad F, tiene la propiedad G. a tiene la propiedad F. Luego a tiene la propiedad G.

Tabla 1- 1: Tipos de inferencias por enumeración.

Las letras mayúsculas P, Q, F, G,… corresponden a las **propiedades** que se quieren estudiar de la población (sucesión) y la letra n minúscula corresponde al valor numérico de tipo porcentual que va desde 0 hasta 100. Es posible redefinir esta clasificación para nuestros propósitos en términos de los procesos de generalización desde el razonamiento inductivo para los casos de muestra a muestra o de población a muestra como:

1. Encontrar el siguiente término de una sucesión *(de muestra a muestra)*	**2. Búsqueda de la fórmula general de la sucesión** *(de muestra a población)*
Si todos los términos observados de la sucesión comparten la misma propiedad, entonces, el siguiente término observado tendrá la misma propiedad. Ejemplo: Sea la sucesión dada 1, 3, 5, 7, 9,… Si la propiedad es "ser impar" el siguiente término de la sucesión debe ser 11.	Todos los términos observados de la sucesión tiene la misma propiedad P, entonces todos los términos de la sucesión tiene la misma propiedad P. Ejemplo: Si 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. son números impares, entonces todos términos de la sucesión son de la forma $a_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}$ Para $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Tabla 1- 2: Procesos de generalización (de muestra a muestra- de muestra a población).

El razonamiento de tipo 3 de *población a muestra,* se fundamenta en tres reglas con las que debemos evaluar la fuerza inductiva del argumento:

- Cuanto más cerca de cien esté el número de elementos que cumplen la propiedad P, más fuerza inductiva tendrá el argumento.
- Cuanto más relevante para la propiedad G es la clase de referencia de la propiedad F, más fuerza inductiva tendrá el argumento [Razonamiento].
- Se debe escoger la clase de referencia más relevante, teniendo en cuenta toda la información disponible.

Un ejemplo de este tipo de generalización se puede evidenciar en diferentes aspectos de la vida cotidiana, por ejemplo las encuestas de favorabilidad para las votaciones por un candidato X o un candidato Y. Otro ejemplo sería la famosa conjetura de **Goldbach** que afirma que: Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos, la cual ha sido investigada por varios expertos en la teoría de números y ha sido comprobada por medio de computadores **para todos los números pares menores que 10^{18}**. *La mayor parte de los matemáticos creen que la conjetura es cierta, y se basan mayoritariamente en las consideraciones estadísticas sobre la distribución probabilística de los números primos en el conjunto de los números naturales: cuanto mayor sea el número entero par, se hace más* ***«probable»*** *que pueda ser escrito como suma de dos números primos*[9].

Por lo tanto si x es un número par muy grande y todos los números pares menores que 10^{18} se pueden escribir como la suma de dos números primos, entonces el número par x, también se podría expresar como la suma de dos números primos. Sin embargo a pesar del gran número de ejemplos para los cuales se ha comprobado la conjetura lo que la hace **inductivamente fuerte**, aun no se ha podido demostrar de manera rigurosa, para que pueda ser aceptada como teorema por la comunidad matemática.

2.4 Principio de inducción matemática

La mirada anterior hecha desde la lógica inductiva de los procesos de generalización muestra su complejidad desde el uso del razonamiento deductivo y que no se basa solo en encontrar el término n-ésimo de una secuencia numérica o geométrica, sino que la propiedad encontrada debe demostrarse matemáticamente, para lo cual se requiere una definición de número natural y una serie de axiomas.

El proceso de axiomatización de los números naturales fue presentado por autores como Pierce (1881), Peano (1889) y Lawvere (1964)[10]. Para el propósito de este trabajo se considerará a Peano el cuál emplea tres términos primitivos, o no definidos: 0, número y sucesor. Como es costumbre en el método axiomático, estos términos aunque no se definen explícitamente son objetos de una delimitación (o definición implícita) por medio

[9] Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Conjetura_de_Goldbach

- [10] Según Oostra, A. (1997) El concepto de número natural según Charles S. Peirce. *Memorias del XIII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y I Encuentro de Aritmética*.

de axiomas o postulados o proposiciones primitivas. En el caso de Peano son cinco los axiomas:

(i) 0 es un número.

(ii) El sucesor de un número es un número.

(iii) No hay dos números con el mismo sucesor.

(iv) 0 no es sucesor de ningún número.

(v). Si 0 pertenece a una propiedad cualquiera P y si para cualquier número n se tiene que si n pertenece a la propiedad P, su sucesor también pertenece a la propiedad entonces todos los números pertenecen a la propiedad.

En un lenguaje más formal podemos expresar los axiomas anteriores de la siguiente manera.

Sea N, s y 0 tres términos primitivos, que significan número, sucesor y cero. Los cinco axiomas que los relacionan son:

1. $0 \in N$
2. Para cualquier $n \in N$ entonces $s(n) \in N$.
3. Para cualquiera n y $m \in N$ si $n \neq m$ entonces $s(n) \neq s(m)$.
4. Para cualquier $n \in N$, $0 \neq s(n)$.
5. Si P es una propiedad cualquiera y si P(0) y para cualquier $n \in N$ si P(n) entonces P(s(n)) entonces para todo $n \in N$, P(n).

El último axioma es el que se conoce con el nombre del **Principio de Inducción Matemática.** Según Falk (2012, 104)

> *Con base en los axiomas de Peano es posible demostrar las propiedades familiares de los números naturales.* ***La serie o sucesión*** *de los números naturales que resulta del tratamiento de Peano tiene las siguientes características: Empezamos por 0. Luego definimos 1 como sucesor de 0, 2 como sucesor de 1, etc. Esta sucesión continúa sin fin ni repeticiones puesto que, por el axioma (ii), todo número tiene sucesor que es un número; este sucesor no será alguno de los números que ya se han incluido en la sucesión porque, por el axioma (iii), no hay dos números con el mismo sucesor y, por el axioma (iv), no volveremos a 0*

porque 0 no es el sucesor de ningún número. El axioma (v) nos permite afirmar que todo número natural pertenece a la sucesión en cuestión porque

(a) 0 pertenece a la sucesión.

(b) el sucesor de todo número que pertenece a la sucesión también pertenece a la sucesión, luego todo número tiene la propiedad de pertenecer a la sucesión.

A pesar de que el tratamiento hecho por Peano, según Russell no es una axiomatización adecuada de los números naturales debido a su falta de unicidad[11], se retoman en este trabajo como una forma para abordar las sucesiones sin tanto rigor. Para un tratamiento riguroso del sistema axiomático de los números naturales puede consultarse a Muñoz J.M. (2014).

De esta manera es posible identificar la relación que existe entre la axiomatización de los números naturales cuyo esquema se expresa por medio del Principio de Inducción Matemática y las sucesiones vistas como funciones de $\mathbb{N}\ en\ \mathbb{R}$.

2.5 Patrones

Entendemos por ***Patrón*** una propiedad, una regularidad, una cualidad invariante que expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada configuración, disposición, o, composición, que se presenta en diferentes contextos y dominios de las matemáticas, como, lo numérico, lo geométrico, lo aleatorio y lo variacional [Posada y otros (2005)].

Los patrones pueden ser: ***Numéricos*** *que implican el reconocimiento de propiedades de una colección de números;* ***De razonamiento y comunicación*** *que incluyen procesos de argumentación y prueba. Por ejemplo, las reglas de inferencia;* ***De movimiento y cambio*** *donde las matemáticas proveen los objetos para estudiar fenómenos en movimiento;* ***Entre figuras y formas geométricas*** *que permiten identificar y examinar las propiedades de colecciones de figuras.* Devlin (1996)[12]

[11] Ver Falk, M. (2012, 105) para profundizar la crítica de Russell acerca de los axiomas de Peano.
[12] Citado por Santos (2007). ***La resolución de problemas matemáticos.*** México. Trillas. p. 18

Complementando esta tipificación de los patrones Rangel (2012, 47), considera necesario estudiar los patrones de repetición y recurrencia que define como:

Son patrones de repetición *aquellos en los que los distintos elementos son presentados de forma periódica. Existen y se pueden crear diversos patrones de repetición teniendo en cuenta su estructura de base o núcleo; por ejemplo si el núcleo es de la forma:*

- *AB, se repiten dos elementos alternadamente (1, 2, 1, 2,…; cuadrado, triángulo, cuadrado, triángulo,…; etc.).*
- *ABC, se repiten tres elementos (do, re, mi, do, re, mi,…).*
- *AABB, se repite dos veces un elemento y a continuación dos veces otro (Macho, Macho, Hembra, Hembra, Macho, Macho, Hembra, Hembra, …)*
- *ABA, se repite por ejemplo; abajo, arriba, abajo…*

Los patrones de recurrencia *son aquellos en los que el núcleo cambia con regularidad. Cada término de la sucesión puede ser expresado en función de los anteriores de cuyo análisis se infiere la ley de formación. Por ejemplo:*

- *xx xxxx xxxxxx,………que traducido numéricamente al contar las x es 2, 4, 6, …*
- *2, 2+4, 2+4+6, 2+4+6+8,… lo que puede expresarse como: 2, 6, 12, 20,…*
- *3, 9, 27, 81,… que es la sucesión de las potencias de 3.*
- *1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… que es la sucesión de Fibonacci.*

Los patrones de recurrencia serán planteados en las situaciones y actividades propuestas en este trabajo, debido a que son una herramienta valiosa que permite construir secuencias generales que se caracterizan por buscar un término general a partir de una ley de formación de sus términos, a partir de la identificación de regularidades y el establecimiento de relaciones entre los términos de la sucesión a desarrollar.

3. Consideraciones de tipo didáctico

3.1 La generalización y el desarrollo del pensamiento

El desarrollo del razonamiento en la educación formal empieza en los primeros grados de la educación básica según el MEN (2003, 54) *apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones.* Características relacionadas con los procesos de generalización y a su vez con los cinco procesos generales que se contemplaron en los ***Lineamientos Curriculares de Matemáticas***: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

En el análisis de los estándares básicos de competencias matemáticas del MEN, Posada, E. y otros (2005), relacionan el desarrollo de pensamiento algebraico y los procesos de generalización, desde el estudio de patrones y regularidades con el desarrollo de habilidades para ***ver, decir, registrar y comunicar*** situaciones de variación y cambio. A partir de estos planteamientos se muestra un panorama didáctico que aporta elementos importantes para el diseño de secuencias didácticas y de investigación en relación con el razonamiento inductivo.

Una de las grandes críticas que se le han hecho a las matemáticas escolares radica en que su estudio no tiene nada que ver con la observación, la experimentación y la inducción, caso contrario al tratamiento dado por las ciencias naturales a estos procesos. Las matemáticas se han convertido en una ciencia deductiva que se ha olvidado de la gran cantidad de observaciones, experimentaciones y procesos por los cuales se generaliza una conclusión a partir del estudio de casos particulares para llegar a consolidar un teorema. En las ciencias naturales es ley hacer observaciones, experimentaciones y verificar una y otra vez por repetición los resultados obtenidos, pero en matemáticas solo se hacen demostraciones rigurosas de teoremas. (Bussey, 1917, 199), por lo tanto es necesario involucrar a través de la resolución de problemas los procesos de generalización, **la observación, experimentación y verificación de regularidades,** como una herramienta que potencie en nuestros estudiantes el razonamiento por inducción y le dé una nueva visión de tipo constructiva y social a las matemáticas escolares.

3.2 Tipos de generalización

En el caso específico de la generalización en secuencias numéricas o geométricas Cañadas (2012) reconoce que en este tipo de actividades se involucran aspectos relacionados con la **representación icónica** de los elementos de la secuencia, la descripción de patrones a través del **uso del lenguaje** y **las expresiones escritas** que pueden ser simbólicas, icónicas, verbales o combinadas, que generan a su vez diferentes tipos de generalización.

Según Cañadas (2012) es posible determinar diferentes tipos de generalización que se relacionan con el tipo de estrategias de razonamiento que siguen los estudiantes al resolver situaciones variacionales que involucran una secuencia. A continuación propongo el siguiente cuadro acerca de este ítem.

Tipo de Generalización	Estrategia seguida
Generalización Empírica	Se acumulan ejemplos y se detecta una regularidad.
Generalización Gráfica	Se generaliza una propiedad común a todos los elementos de la sucesión para construir una expresión de tipo gráfica.
Generalización Verbal	Se generaliza una propiedad común a todos los elementos de la sucesión para construir una expresión de tipo verbal desde el lenguaje natural.
Generalización Algebraica	Se generaliza una propiedad común a todos los elementos de la sucesión para construir una expresión de tipo simbólica.

Tabla 2- 1: Tipos de generalización.

Es necesario aclarar que al proponer está clasificación no se está afirmando que los tipos o los procesos de generalización se dan de forma aislada o que no sea posible que dentro de las estrategias seguidas por los estudiantes al resolver una situación que involucre secuencias numéricas o geométricas se combinen entre sí; al analizar los procesos de generalización de los estudiantes frente a una situación dada es posible encontrar procesos combinados (Cañadas, 2012). Este autor aplicó un cuestionario con seis problemas a estudiantes de 3° y 4° de la E.S.O. (Educación Secundaria Obligatoria) en España. Uno de esos problemas propuestos presentaba la siguiente actividad:

Imagine que tiene unas baldosas cuadradas blancas y otras cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila de baldosas blancas.

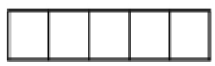


Figura 3- 1: Baldosas blancas.

Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:

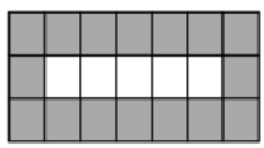


Figura 3- 2: Baldosas blancas y grises.

¿Cuántas baldosas grises necesitarás si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma como lo hemos hecho en el dibujo? Justifica tu respuesta

Un ejemplo de generalización en el cual los estudiantes utilizaron las representaciones gráfica y algebraica conjuntamente para dar sentido a la generalización de la situación del problema enunciado anteriormente, corresponde a este ejemplo:

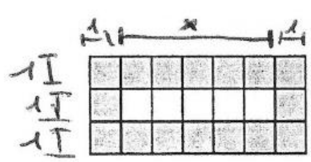


Figura 3- 3: Generalización gráfica y algebraica.

*La figura hecha por este estudiante muestra cómo identificó los datos que permanecen constantes, (*que corresponden a las seis baldosas grises de las columna inicial y la columna final) *y los datos que cambiaban dependiendo del número de baldosas blancas consideradas* (Cañadas, 2012, 568), que el estudiante expresa a través de x como el número de baldosas blancas que varía. Por lo tanto se puede afirmar que los tipos de generalización que emergen en los estudiantes al resolver una actividad específica se pueden combinar entre si y dependen de los conocimientos previos o tipo de actividades abordadas en el aula.

3.3 Un modelo de razonamiento inductivo para hacer generalizaciones

Según Cañadas (2012), los estudiantes realizan la **generalización** cuando son capaces de identificar un patrón común que proviene de algunos casos particulares y también son capaces de aplicar esta característica común a otros casos particulares, es decir son capaces de establecer y usar en una situación específica un argumento inductivo, que involucra el trabajo con casos particulares, la organización de casos particulares, la identificación de patrones, la formulación, comprobación, generalización y la demostración de las conjeturas propuestas.

Para reconocer un modelo de razonamiento que involucre los procesos enunciados anteriormente se deben identificar las estrategias, procedimientos y representaciones que usa un estudiante al enfrentarse a este tipo de tareas. Para Gonzales (2012, 36-37) los procesos de generalización se construyen en tres fases o etapas, que están relacionadas y se dan una después de otra, estas son: ***ver, describir y escribir***, las cuales define como:

Ver: *El niño observa lo que permanece constante en cada caso, como lo que varía; lo que es propio y particular de cada situación, aspectos claves en secuencias o transformaciones, para lograr resumir en general determinada situación. (…)* ***Describir:*** *La descripción que se haga dada en lenguaje natural puede ser precisa o no, depende de la forma en que se haya apreciado la regularidad o el patrón detectado, se logra mediante la observación, la indagación y la discusión de lo que está pasando. (…)* ***Escribir:*** *Expresar ya sea por medio de palabras, símbolos, dibujos o combinación de* *estos la o las relaciones que se observan. Necesariamente en la enseñanza del álgebra se requiere que estas diferentes formas se concreten en un lenguaje simbólico, sin que se pierda el significado, ni su traducción.*

Las anteriores etapas generan un modelo de razonamiento bastante amplio que es posible complementar y caracterizar de forma más específica de tal manera que permita reconocer y diferenciar más claramente el tipo de estrategias que usa un estudiante en un momento dado; por lo tanto es posible considerar el modelo propuesto por Cañadas y Castro (2007) para describir las características del razonamiento inductivo que utilizaban los estudiantes de educación secundaria al resolver situaciones variacionales que involucraban la búsqueda de patrones y regularidades. Este modelo está constituido por siete pasos a seguir:

1. *Trabajar con casos particulares.*
2. *Organizar los casos particulares.*
3. *Identificar el patrón.*
4. *Formular una conjetura.*
5. *Comprobar la conjetura propuesta.*
6. *Generalizar.*
7. *Demostrar la expresión propuesta para generalizar*.

Es posible determinar que los pasos 1, 2 y 3 corresponden al proceso de ***ver*** en donde el estudiante observa lo que varía y lo que permanece constante en una situación propuesta; los pasos 4 y 5 corresponde al proceso de ***describir*** en el cual la formulación y comprobación de la conjetura propuesta se hace desde la descripción de las regularidades o el patrón que el estudiante detectó en la situación, que puede ser dado en lenguaje natural; por último los pasos 6 y 7 corresponden a la necesidad del estudiante para **escribir** o expresar las relaciones que observó, por medio de palabras, símbolos o dibujos o de la combinación de los mismos, es decir es aquí donde emergen los tipos de generalización **empírica, gráfica, verbal, o, algebraica,** este último que es el tipo de generalización al que se quiere llegar y a su vez se quiere demostrar haciendo uso de la inducción matemática.

Si se retoman las anteriores consideraciones del modelo de razonamiento inductivo para hacer generalizaciones, es posible analizar las estrategias de solución que siguen los estudiantes de educación básica secundaria, específicamente los estudiantes de grado séptimo que se encuentran en el proceso de transición entre la aritmética y el algebra, cuando se enfrentan a un situación de tipo variacional que involucre secuencias numéricas o geométricas, como las que corresponden a las actividades propuestas en el instrumento de diagnóstico cuya construcción, aplicación y análisis será tema de discusión del siguiente capítulo.

4. Razonamiento por inducción en estudiantes de grado séptimo del CED Jackeline

4.1 Instrumento de indagación

Este instrumento de indagación busca identificar algunas formas de razonamiento por inducción de los estudiantes de grado séptimo del CED Jackeline. Se trata de situaciones problema con secuencias numéricas o geométricas, las cuales involucran aspectos relacionados con sucesiones numéricas o geométricas con diferentes representaciones y que tiene como objetivo:

- Reconocer el patrón de la secuencia.
- Identificar algún tipo de regularidad en cada situación que permita encontrar diferentes términos de la sucesión a través de la construcción de tablas.
- Determinar si un cierto número dado pertenece o no a la sucesión y por qué.
- Encontrar algún tipo de expresión general que implique el uso del razonamiento inductivo.

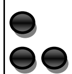
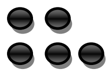
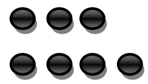
Las cinco actividades diseñadas para este instrumento diagnóstico fueron adaptadas y reestructuradas para nuestros fines, de los trabajos de Lasprilla y Camelo (2012, 41), Gonzales (2012, 51-52), Ballén (2012, 35-36), y Cañadas, Castro y Castro (2012, 566).

Instrumento de indagación grado séptimo CED Jackeline

Realice las siguientes actividades propuestas

Actividad No. 1

a. Continúe la secuencia

Grafica						
No. de orden de la figura	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
No. de canicas	**3**	**5**	**7**			

b. ¿Cuántas canicas tendrá la figura número 10? compruebe su respuesta haciendo la gráfica de la figura.

c. ¿Cuántas canicas tendrá la figura número 25? ¿Para responder necesitó hacer la figura correspondiente? Explique su respuesta.

d. ¿Cuántas canicas tendrá la figura número 51? Explique su respuesta.

e. ¿Existe alguna relación entre el número de orden de la figura y la cantidad de canicas? Explique su respuesta.

Actividad No. 2

Observe detenidamente la siguiente secuencia de figuras

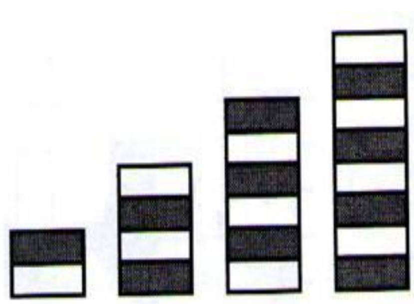


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

a. Encuentre las figuras 5 y 6 de esta secuencia.

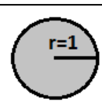
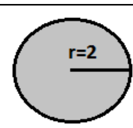
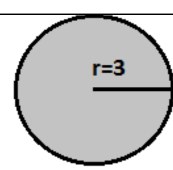
b. Complete la siguiente tabla

Orden de la Fig.	Número de casillas sombreadas	Número de casillas no sombreadas	Número total de casillas
1	**1**	**1**	**2**
2	**2**	**2**	**4**
3	**3**	**3**	**6**
4	**4**	**4**	**8**
5			
6			
8			
10			
20			
35			
55			

c. Encuentre el número de casillas sombreadas, el número de casillas **NO** sombreadas y el total de casillas de la figura de orden 101. Explique su respuesta.

Actividad No. 3

a. Complete la siguiente secuencia de círculos y su correspondiente área, siendo r el radio de la circunferencia.

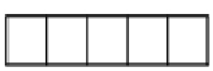
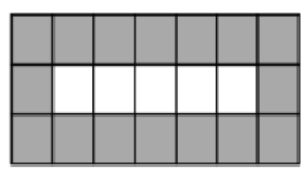
Radio	1	2	3	4	5	6
Figura						
Área	$A = \pi 1^2$	$A = \pi 2^2$	$A = \pi 3^2$			

b. En el cuadro siguiente complete los términos de la secuencia que relaciona el radio r de un círculo C, con su área A.

Radio del círculo C	**Área del Círculo C**
1	$\pi 1^2 = \pi$
2	$\pi 2^2 = 4\,\pi$
3	$\pi 3^2 = 9\pi$
4	
5	
8	
13	
25	
47	
100	

c. Proponga una fórmula para encontrar el área A del círculo C de radio **x.**

Actividad No. 4

Imagine que tiene unas baldosas cuadradas blancas y otras cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila de baldosas blancas. 	Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo: 

- ¿Cuántas baldosas grises se necesitarán si tiene 6 baldosas blancas y quisiera rodearlas de la forma que se ha hecho en el dibujo? Explique su respuesta.
- ¿Cuántas baldosas grises se necesitarán si tiene 8 baldosas blancas y quisiera rodearlas de la forma que se ha hecho en el dibujo? Explique su respuesta.
- ¿Cuántas baldosas grises se necesitarán si tiene 10 baldosas blancas y quisiera rodearlas de la forma que se ha hecho en el dibujo? Explique su respuesta.
- ¿Cuántas baldosas grises se necesitarán si tiene 99 baldosas blancas y quisiera rodearlas de la forma que se ha hecho en el dibujo? Explique su respuesta.

- ¿Cuántas baldosas grises se necesitarán si tiene **X** baldosas blancas y quisiera rodearlas de la forma que se ha hecho en el dibujo? Explique su respuesta.

Actividad No. 5

Continúe la secuencia de números

1	**4**	**7**	**10**	**13**											

- ¿Cuál es la relación que existe entre cada número de la secuencia y el siguiente?
- ¿El número 61 hace parte de esta secuencia numérica? Explique.
- ¿El número 90 hace parte de esta secuencia numérica? Explique.
- ¿El número 121 hace parte de esta secuencia numérica? Explique.
- Encuentre alguna manera de determinar si un número específico hace parte o no de esta secuencia.

4.2 Aplicación del instrumento de indagación

El instrumento de indagación descrito anteriormente fue aplicado de forma individual a los 25 estudiantes del grado séptimo del CED Jackeline, en dos sesiones de clase de 55 minutos. En la primera sesión se aplicaron las dos primeras actividades y en la segunda sesión las actividades 3, 4 y 5.

4.2.1 Descripción de la población

Los 25 estudiantes de grado séptimo del CED Jackeline tienen edades entre los 12 a 14 años; por ser un colegio distrital mixto se cuenta en este curso con 11 mujeres y 14 hombres, los cuales pertenecen a los estratos 2 y 3 de la UPZ del Timiza, Localidad de Kennedy, en la ciudad de Bogotá.

Ninguno de los estudiantes de este grupo es repitente y según la orientación curricular de la institución no han tenido ningún tipo de contacto con la solución de situaciones relacionadas con el pensamiento algebraico.

4.2.2 Estrategias de generalización encontradas

A continuación se documentarán y analizarán las estrategias de solución planteadas por los estudiantes de grado séptimo al realizar cada una de las actividades propuestas, teniendo en cuenta los tipos de generalización descritos en el capítulo número tres y contrastando estos resultados con los hallados o presupuestados por los investigadores que inspiraron las actividades propuestas en el instrumento diagnóstico.

Actividad No 1.

En la primera parte de la actividad en donde los estudiantes debían completar la secuencia de canicas, el 100% de los estudiantes encontraron los términos faltantes de la secuencia (números de orden de las figuras 5 y 6), haciendo la correspondiente representación **icónica** de cada uno de ellos, como se evidencia en la figura 4-1.

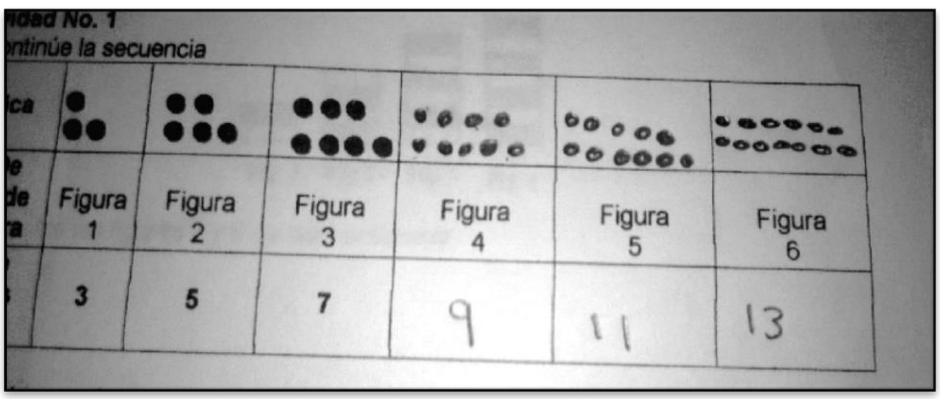


Figura 4- 1: Evidencia A1.

Luego para encontrar el número de canicas del número de orden de las figuras de la secuencia correspondientes a 10, 25 y 51, los estudiantes desarrollaron las siguientes estrategias de razonamiento.

- **Construcción de los términos de la secuencia usando la representación gráfica:** El 16% de los estudiantes identificaron el patrón de variación de la secuencia y representaron el número de canicas de **forma icónica**, uno por uno hasta llegar al número de orden de la figura pedida, como se observa en la Figura 4-2.

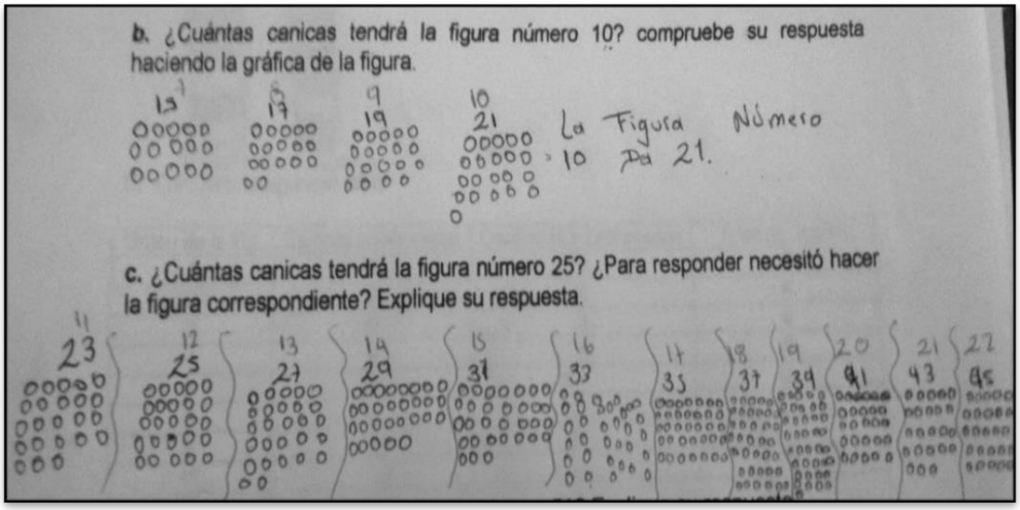


Figura 4- 2: Evidencia A2.

- **Construcción de los términos de la secuencia usando tablas de correspondencia:** El 32% de los estudiantes emplearon tablas de tipo numérico para describir la variación de cada uno de los términos de la secuencia hasta encontrar el número de orden pedido, como se observa en la Figura 4-3.

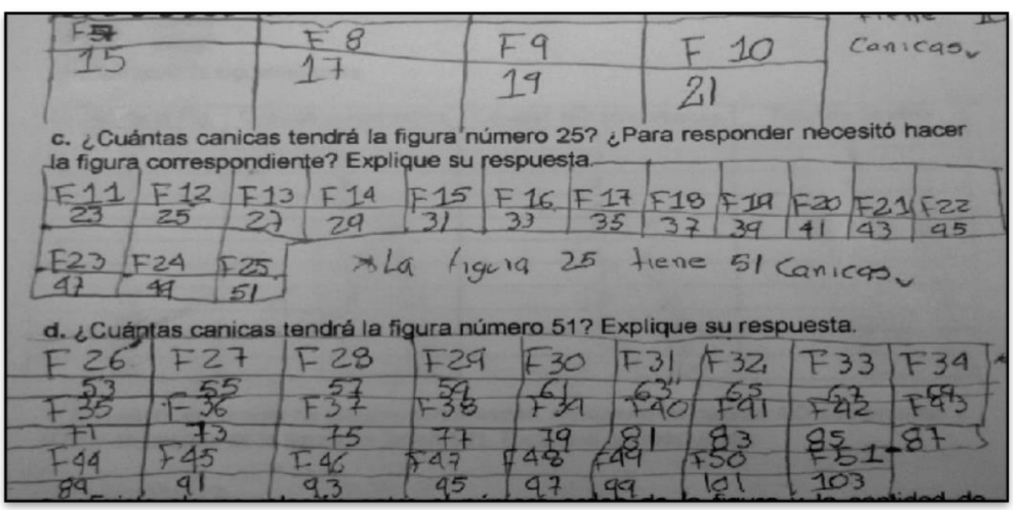


Figura 4- 3: Evidencia A3.

- **Búsqueda del término de la secuencia pedido usando relaciones aritméticas:** El 40% de los estudiantes plantearon relaciones de tipo aditivo entre el número de orden de un término de la secuencia y el siguiente, ilustrando el resultado encontrado con la representación icónica del número de canicas, como se observa como se observa en la Figura 4-4.

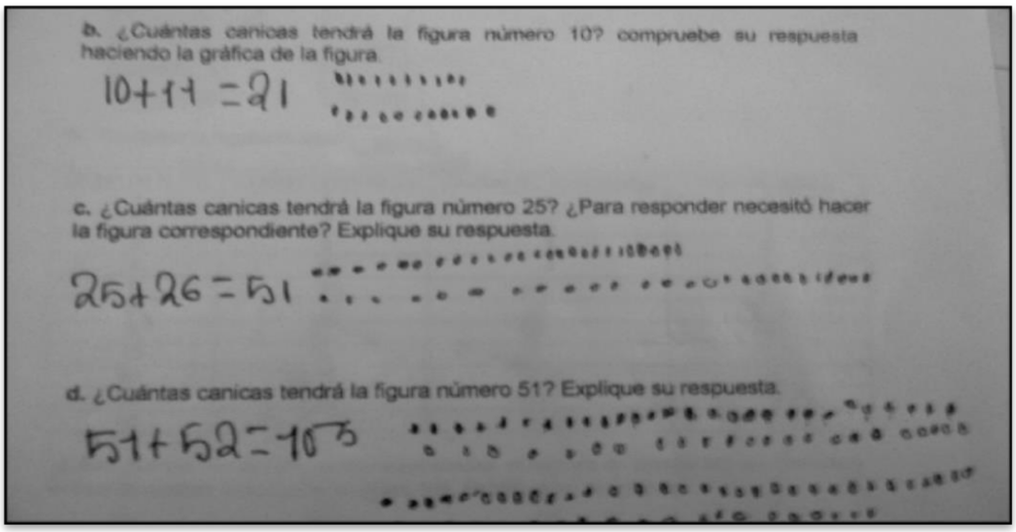


Figura 4- 4: Evidencia A4.

- **Búsqueda del término pedido de la secuencia por recurrencia:** El 8% de los estudiantes intentaron usar los resultados que hallaban con anterioridad y relacionarlos de forma aditiva con los términos de un orden mayor en la secuencia, es decir recurrían a los términos anteriores, como se observa en la Figura 4-5.

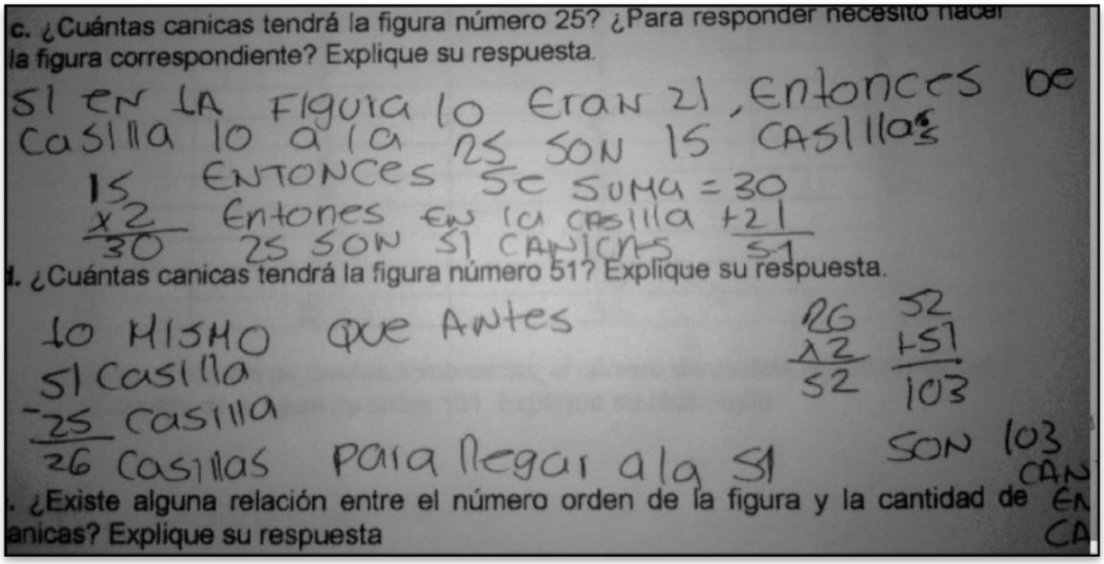

c. ¿Cuántas canicas tendrá la figura número 25? ¿Para responder necesito hacer la figura correspondiente? Explique su respuesta.
51 en la figura lo eran 21, entonces de casilla lo a la 25 son 15 casillas
15 entonces se suma = 30
x2
30
Entones en la casilla +21
25 son 51 canicas 51
d. ¿Cuántas canicas tendrá la figura número 51? Explique su respuesta.
lo mismo que antes
51 casilla
-25 casilla
26 casillas para llegar a la 51
26
x2
52
52
+51
103
son 103 can
e. ¿Existe alguna relación entre el número orden de la figura y la cantidad de canicas? Explique su respuesta

Figura 4- 5: Evidencia A5.

En la última pregunta de esta actividad en donde se pedía a los estudiantes que explicaran la relación que hay entre el número de orden de la figura y el número de canicas se encontraron las siguientes estrategias de solución.

- **Generalización empírica:** El 32% de los estudiantes encontraron regularidades a partir de la acumulación de ejemplos pero no les fue posible describir de alguna manera esta relación.
- **Generalización verbal:** El 68% realizaron la generalización de la relación que existe entre el número de orden de las figuras de la secuencia y el número de canicas usando expresiones de tipo verbal como:

1. El doble del número de la figura más una canica.

2. Se le suma el número de orden dos veces más uno.

3. Cojo el número de la figura lo multiplico por dos y le sumo uno y me da el número de canicas que hay.

- Uno de ellos (4%) verificó su enunciado verbal por medio de un ejemplo, como se observa en la Figura 4-6.

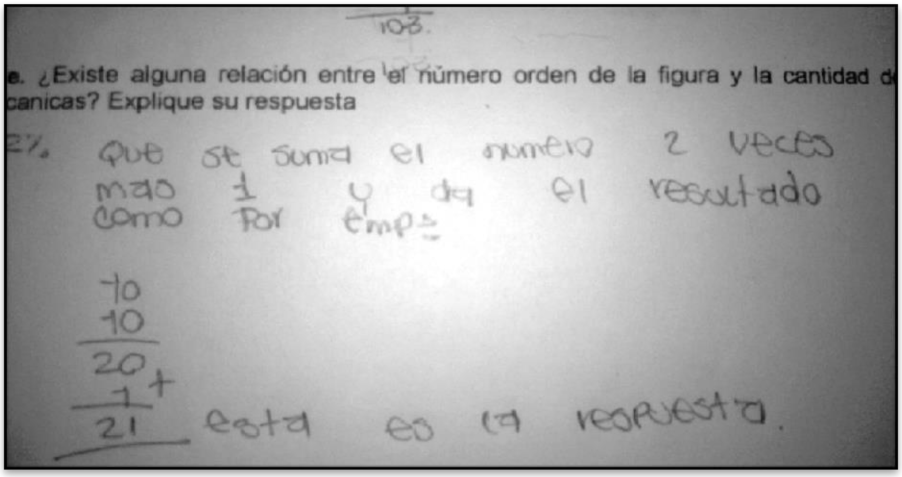


Figura 4- 6: Evidencia A6.

- Y otro de los estudiantes (4%) intentó escribirlo en términos de la variable x sin desprenderse de la expresión verbal, como se observa en la Figura 4-7.

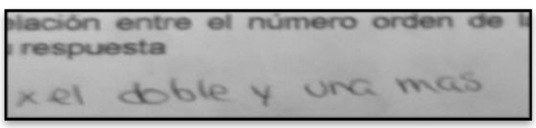


Figura 4- 7: Evidencia A7.

Ninguno de los estudiantes estableció la **generalización algebraica** por medio de la construcción de una expresión simbólica de la propiedad común de los términos de la sucesión.

La aplicación de esta actividad a niños de grado tercero entre 8 y 9 años de edad hecha por Lasprilla y Camelo (2012) mostró resultados relacionados con el nivel de **generalización empírica**, desde la construcción de ejemplos usando representaciones pictóricas y tabulares, la descripción de características como las de ser número impar, la suma de la fila superior con la fila inferior o el hecho de que algunos estudiantes no podían encontrar una cantidad en determinada posición si no contaban con la cantidad de alguna de las posiciones anteriores cercanas (Lasprilla y Camelo, 2012, 48). Este nivel de generalización fue superado por un 68% de los estudiantes del CED Jackeline debido a su edad y etapa escolar, a pesar de estar en las mismas condiciones curriculares de los niños de grado tercero, es decir, no haber recibido ningún tipo de instrucción en actividades relacionadas con el desarrollo del razonamiento algebraico según el currículo de la institución.

Actividad No 2.

- En la primera parte de la actividad los estudiantes debían completar la secuencia de torres sombreadas y no sombreadas, el 100% de los estudiantes encontraron los términos siguientes de la secuencia (números de orden de las figuras 5 y 6), haciendo la correspondiente representación gráfica de cada una de ellas, como se observa en la Figura 4-8.

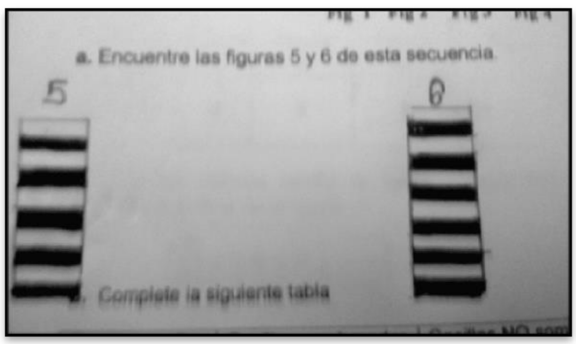
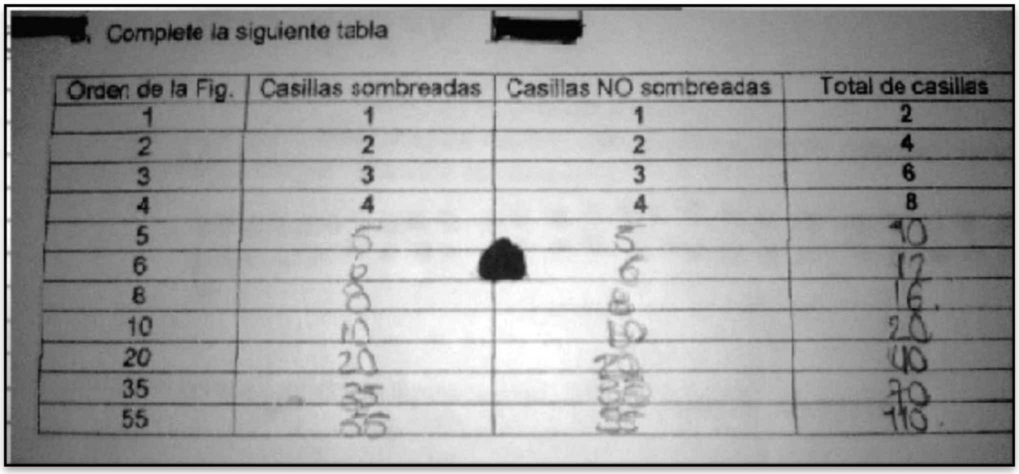


Figura 4- 8: Evidencia B1.

En la segunda parte en la que debían completar una tabla con el número de casillas sombreadas, no sombreadas y el total de casillas de cada torre según su número de orden, el 92% de los estudiantes completaron de forma exitosa la tabla, como se observa en la Figura 4-9.

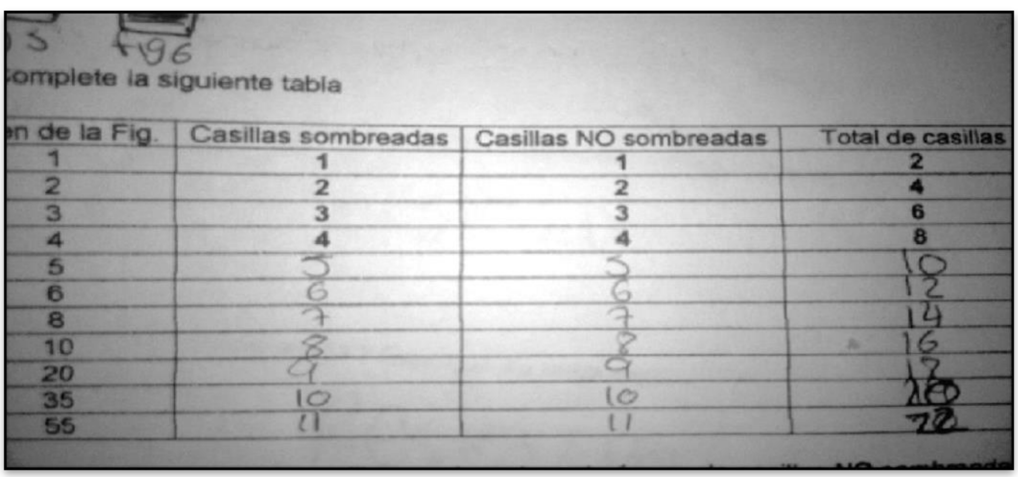


[redacted] Complete la siguiente tabla [redacted]

Orden de la Fig.	Casillas sombreadas	Casillas NO sombreadas	Total de casillas
1	1	1	2
2	2	2	4
3	3	3	6
4	4	4	8
5	5	5	10
6	6	6	12
8	8	8	16
10	10	10	20
20	20	20	40
35	35	35	70
55	55	55	110

Figura 4- 9: Evidencia B2.

El 8% de los estudiantes aunque detectaron el patrón de los términos de la secuencia no tuvieron en cuenta el número de orden de la figura y siguieron reiterando la variación del número de casillas sombreadas y no sombreadas ignorando el orden pedido en la tabla, hecho que no les permitió encontrar el numero de casillas sombreadas y no sombreadas de la figura de orden 101, lo que permite afirmar que estos estudiantes siguieron la secuencia mecánicamente, basándose solamente en la tarea de obtener el siguiente término de la sucesión, como se observa en la Figura 4-10.



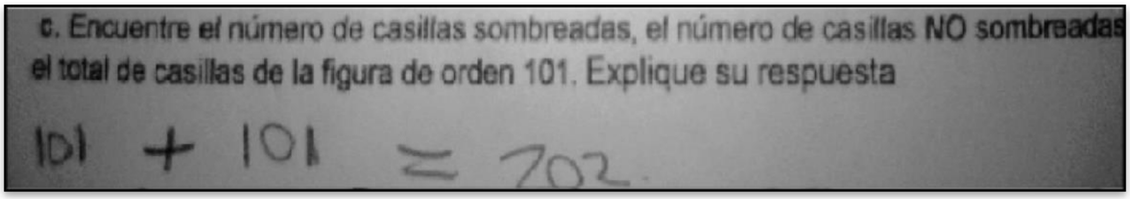
5 [redacted] +96

omplete la siguiente tabla

n de la Fig.	Casillas sombreadas	Casillas NO sombreadas	Total de casillas
1	1	1	2
2	2	2	4
3	3	3	6
4	4	4	8
5	5	5	10
6	6	6	12
8	7	7	14
10	8	8	16
20	9	9	18
35	10	10	20
55	11	11	22

Figura 4- 10: Evidencia B3.

En cambio el 92% restante de los estudiantes encontraron la relación para la figura de orden 101, usando expresiones aritméticas, es decir un tipo de **generalización empírica** a partir de la acumulación de ejemplos; en este caso usaron la información del número de casillas sombreadas y no sombreadas que fueron consignados en la tabla, como se observa en la Figura 4-11.


c. Encuentre el número de casillas sombreadas, el número de casillas NO sombreadas el total de casillas de la figura de orden 101. Explique su respuesta

101 + 101 = 202.

Figura 4- 11: Evidencia B4.

A pesar de que esta actividad fue planeada en una secuencia didáctica para niños de 10 a 13 años de edad (Gonzales, 2012, 50), que concuerda con las edades de los estudiantes a los que se les aplicó el instrumento, la actividad resultó bastante trivial, dejando de lado el contexto gráfico y centrándose en la reiteración mecánica del número de casillas, sumando el número pedido dos veces, sin mayor dificultad.

Actividad No 3.

En la primera parte de la actividad el 100% de los estudiantes completaron los términos de la sucesión de círculos calculando su área y construyendo su respectiva representación grafica, como se observa en la Figura 4-12.

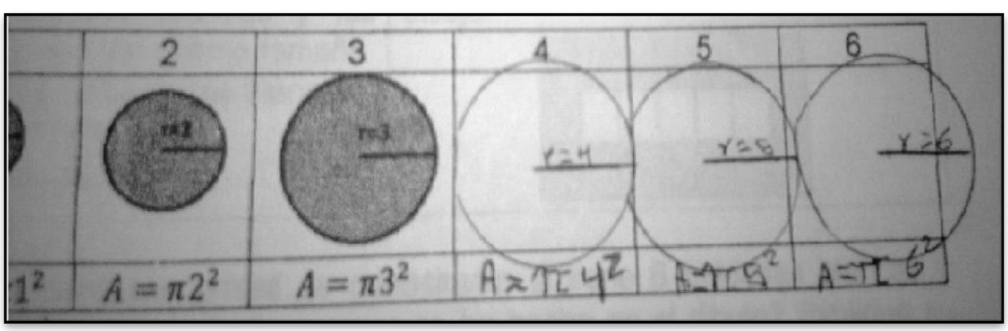
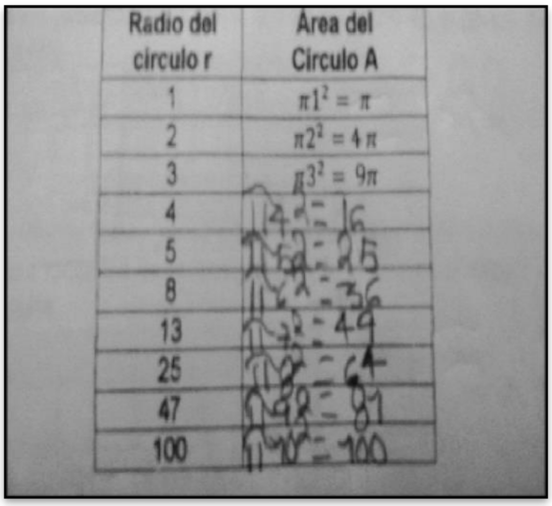


Figura 4- 12: Evidencia C1.

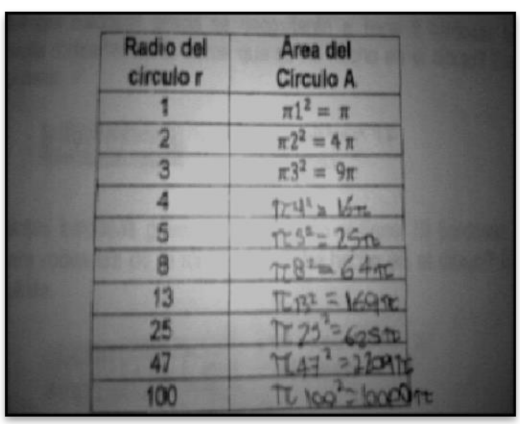
En el literal b los estudiantes tenían que completar la tabla de variación del área de diferentes círculos teniendo en cuenta la medida de su radio, el 12% de los estudiantes completaron la tabla ignorando la medida del radio dado, se limitaron a continuar con la secuencia de términos uno a uno, como se observa en la Figura 4-13.



Radio del circulo r	Área del Circulo A
1	$\pi 1^2 = \pi$
2	$\pi 2^2 = 4\pi$
3	$\pi 3^2 = 9\pi$
4	$\pi 4^2 = 16$
5	$\pi 5^2 = 25$
8	$\pi 6^2 = 36$
13	$\pi 7^2 = 49$
25	$\pi 8^2 = 64$
47	$\pi 9^2 = 81$
100	$\pi 10^2 = 100$

Figura 4- 13: Evidencia C2.

El 88% restante de los estudiantes completaron la tabla teniendo en cuenta la longitud dada de cada uno de los radios, relacionándolos con su área y resolviendo el respectivo cuadrado del radio, como se observa en la Figura 4-14.



Radio del circulo r	Área del Circulo A
1	$\pi 1^2 = \pi$
2	$\pi 2^2 = 4\pi$
3	$\pi 3^2 = 9\pi$
4	$\pi 4^2 = 16\pi$
5	$\pi 5^2 = 25\pi$
8	$\pi 8^2 = 64\pi$
13	$\pi 13^2 = 169\pi$
25	$\pi 25^2 = 625\pi$
47	$\pi 47^2 = 2209\pi$
100	$\pi 100^2 = 10000\pi$

Figura 4- 14: Evidencia C3.

Cuando se les pidió a los estudiantes encuestados que idearan una fórmula para encontrar el área A del círculo C de radio x, el 12% de los estudiantes no contestaron nada, el 64% de los estudiantes expresaron que se halla *según el número multiplicado por el mismo* y mostraban que su afirmación era válida por medio de un ejemplo sin escribir una expresión específica, lo que indica que están en un nivel de **generalización empírica** donde reconocen el patrón y es necesario recurrir a los ejemplos, como se observa en la Figura 4-15.

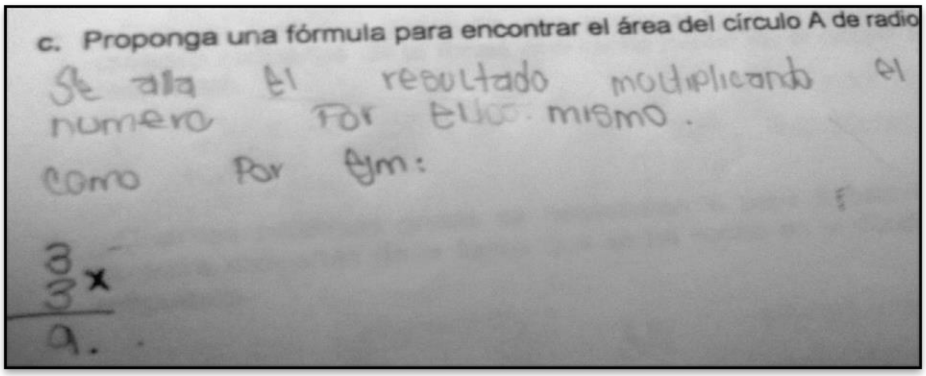


Figura 4- 15: Evidencia C4.

El 12% de los estudiantes proponen una fórmula desde la descripción verbal de las regularidades encontradas, es decir emplean la **generalización verbal**, empleando algunas expresiones como:

- Estudiante número 1: *multiplicando el radio al cuadrado de cualquier número,* como se observa en la Figura 4-16.

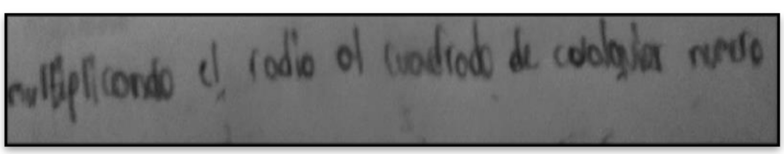


Figura 4- 16: Evidencia C5.

- Estudiante número 2: *se multiplica x^2 por el mismo número π y eso es igual a el área*, como se observa en la Figura 4-17.

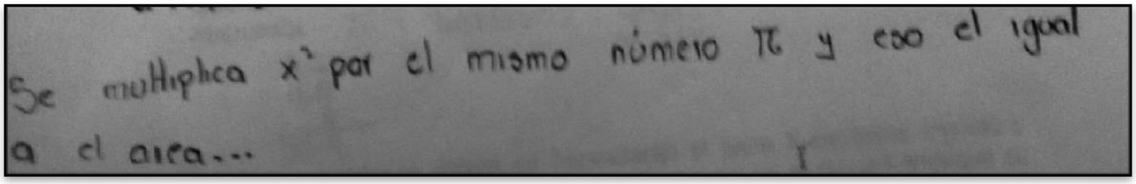


Figura 4- 17: Evidencia C5.

El 12% restante de los estudiantes plantearon una fórmula usando la variable x y el número π para calcular el área de cualquier círculo, indicando que se encuentran en un nivel de **generalización algebraica**, como se observa en la Figura 4-18.

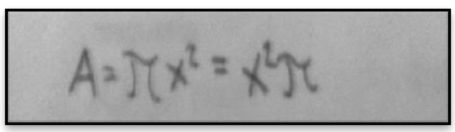


Figura 4- 18: Evidencia C6.

A diferencia de la actividad anterior que resultó trivial para los estudiantes, esta actividad tuvo un mayor grado de complejidad, no solo porque fue diseñada en una secuencia didáctica dirigida a estudiantes de grado octavo cuyo propósito era comprender y afianzar el significado de la factorización (Ballén, 2012, 35), síno, porque fue posible evidenciar en las estrategias de solución de los estudiantes de grado séptimo diferentes niveles de generalización de tipo empírico 64% y verbal 12%, que era lo esperado para estudiantes sin ningún tipo de instrucción en el uso del lenguaje algebraico; en contraste el 12% de los estudiantes fueron capaces de abordar, comprender y realizar esta actividad, alcanzando el mayor grado de generalización, la de tipo algebraico, sin haber recibido ningún tipo de instrucción previa.

Actividad No 4.

El 92% de los estudiantes que desarrollaron esta actividad recurrieron en los tres primeros ítems a la **representación icónica** de la situación y de esta manera determinaron el número de baldosas grises para cada orden de la secuencia, reconociendo de esta forma el patrón de la secuencia desde la reconstrucción de ejemplos gráficos, como se observa en la Figura 4-19.

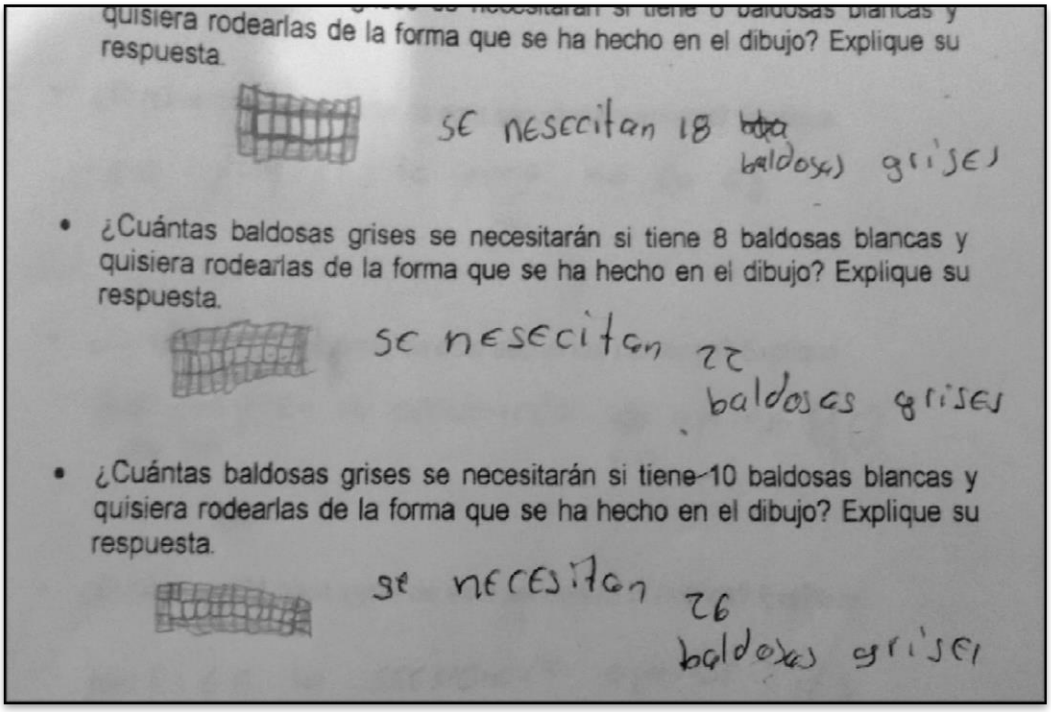


Figura 4- 19: Evidencia D1.

Pero este mismo porcentaje de estudiantes recurrió a una estrategia de tipo aritmético para encontrar el número de baldosas grises que se necesitaban si se tenían 99 baldosas blancas, como se observa en la Figura 4-20. (99 + 99 = 198, 198 + 6 = 204)

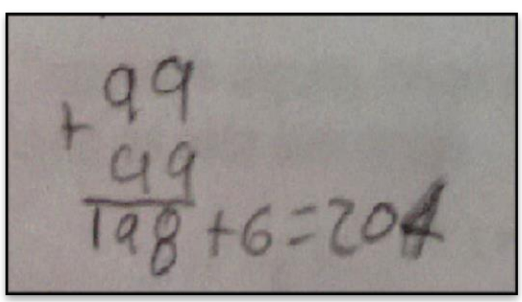


Figura 4- 20: Evidencia D2.

En cambio el 8% restante desde los primeros ítems de la actividad reconoció esta propiedad aritmética para cada uno de los casos pedidos.

- 6 + 6 + 6 = 18.
- 8 + 8 + 6 = 22.
- 10 + 10 + 6 = 26.
- 99 + 99 + 6 = 204.

El descubrimiento de este tipo de regularidades, les permitió a los estudiantes abordar la pregunta de ¿Cuántas baldosas grises se necesitarán si tiene **X** baldosas blancas y quisiera rodearlas de la forma que se ha hecho en el dibujo?, usando diferentes estrategias como:

1. Recurrir a un ejemplo para describir de nuevo la situación ignorando por completo la variable x (76%), como se observa en la Figura 4-21.

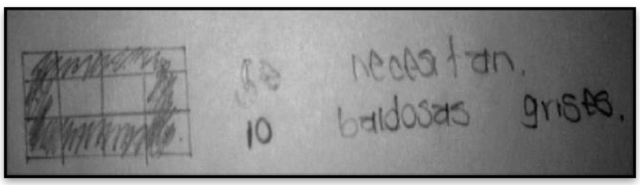


Figura 4- 21: Evidencia D3.

2. Describir el patrón encontrado usando como ejemplo ilustrativo un valor muy grande que asignaban a la variable x = 1.638.727; es decir, usaron la **generalización empírica**. (4%), como se observa en la Figura 4-22.

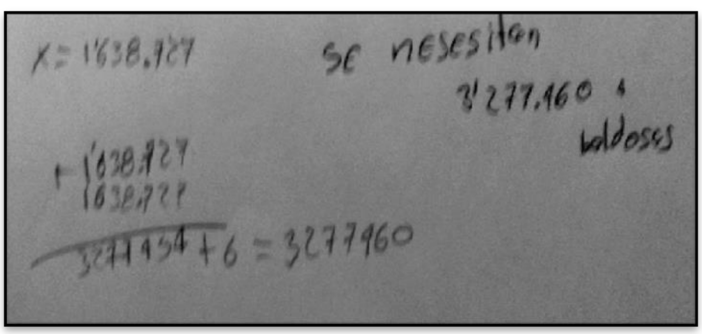


Figura 4- 22: Evidencia D4.

3. Se generaliza la propiedad común de todos los términos de la sucesión usando la representación gráfica de las baldosas, es decir usan la **generalización gráfica** (8%), aunque a su vez emerge un tipo de **generalización algebraica**, como se observa en la Figura 4-23.

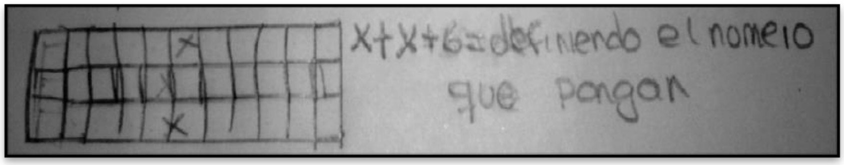


Figura 4- 23: Evidencia D5.

4. La propiedad común se hace desde la descripción verbal en términos de la variable x, que corresponde al nivel de **generalización verbal** (4%), como se observa en la Figura 4-24.

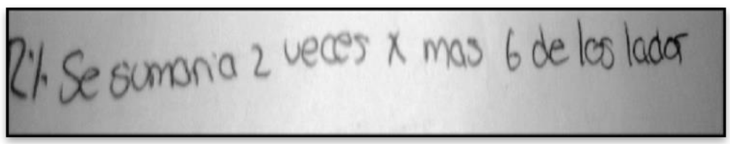


Figura 4- 24: Evidencia D6.

5. El 8% de los estudiantes construyó la **generalización algebraica** de la propiedad común de los términos de la sucesión, explicándola, como se observa en la Figura 4-25.

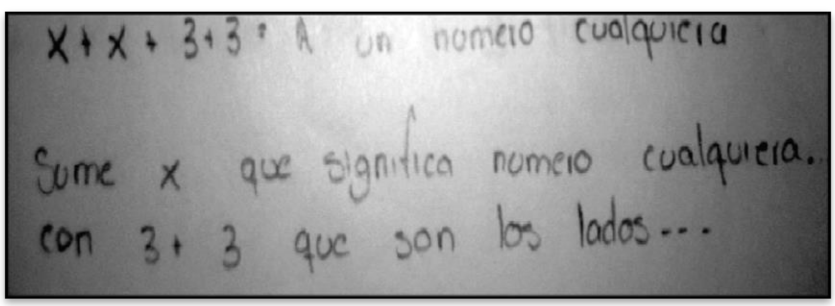


Figura 4- 25: Evidencia D7.

Las actividades 4 y 5 fueron aplicadas por Cañadas, Castro y Castro (2012) a 359 estudiantes de 3 y 4 grado de la educación básica secundaria de España, cuyas edades estaban entre los 14 a 16 años, que haciendo la comparación con nuestros estudiantes serían de grados octavo y noveno de la educación básica colombiana.

Con respecto a la actividad 4 encontraron que los procesos de generalización estaban fuertemente influenciados por el tipo de representación usado en la resolución de la situación, la cual se compara con las representaciones usadas por los estudiantes de séptimo del CED Jackeline.

<table>
<tr><td rowspan="2">Población que desarrolló las actividades 4 y 5</td><td colspan="4">Tipos de generalización</td></tr>
<tr><td>Numérico</td><td>Algebraico</td><td>Verbal</td><td>Gráfico</td></tr>
<tr><td rowspan="2">359 estudiantes (3° Y 4° ESO), en Cañadas, Castro y Castro (2012)</td><td>125 Estudiantes</td><td>3 Estudiantes</td><td>57 Estudiantes</td><td>11 Estudiantes</td></tr>
<tr><td>34,81%</td><td>0,83%</td><td>15,87%</td><td>30,64%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">25 estudiantes del CED Jackeline.</td><td>20 Estudiantes</td><td>2 Estudiantes</td><td>1 Estudiantes</td><td>2 Estudiantes</td></tr>
<tr><td>80%</td><td>8%</td><td>4%</td><td>8%</td></tr>
</table>

Tabla 3- 1: Comparación de datos actividad 4.

Encontrándose que a pesar de las diferencias de edad, nivel de escolaridad y contexto cultural, se privilegia en ambos grupos la representación numérica y por lo tanto la generalización empírica, pero hay una gran diferencia en la representación de tipo algebraica, debido a que mientras 0,83% de los estudiantes alcanzaron este nivel en España, 2 de 25 estudiantes (8%) realizaron estrategias de generalización similares, propias del nivel de generalización algebraica, situación que podría ser estudiada con mayor profundidad en futuras investigaciones.

Actividad No 5.

En esta actividad los estudiantes debían completar los términos de una sucesión cuya representación estaba dada solo desde la parte numérica, el 12% de los estudiantes no describieron correctamente los términos pedidos, aunque decían que los términos se hallaban de tres en tres, se equivocaron en el conteo, como se puede evidenciar en estos casos.

Estudiante 1, Figura 4-26.

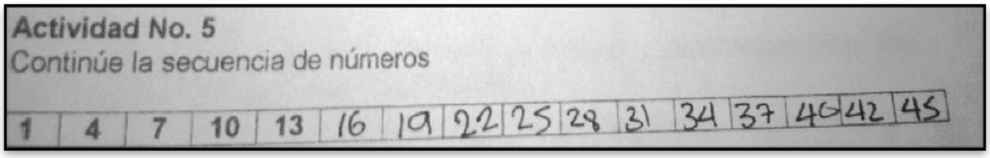


Figura 4- 26: Evidencia E1.

Estudiante 2, Figura 4-27.

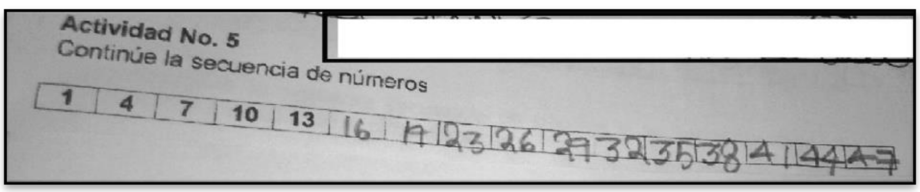
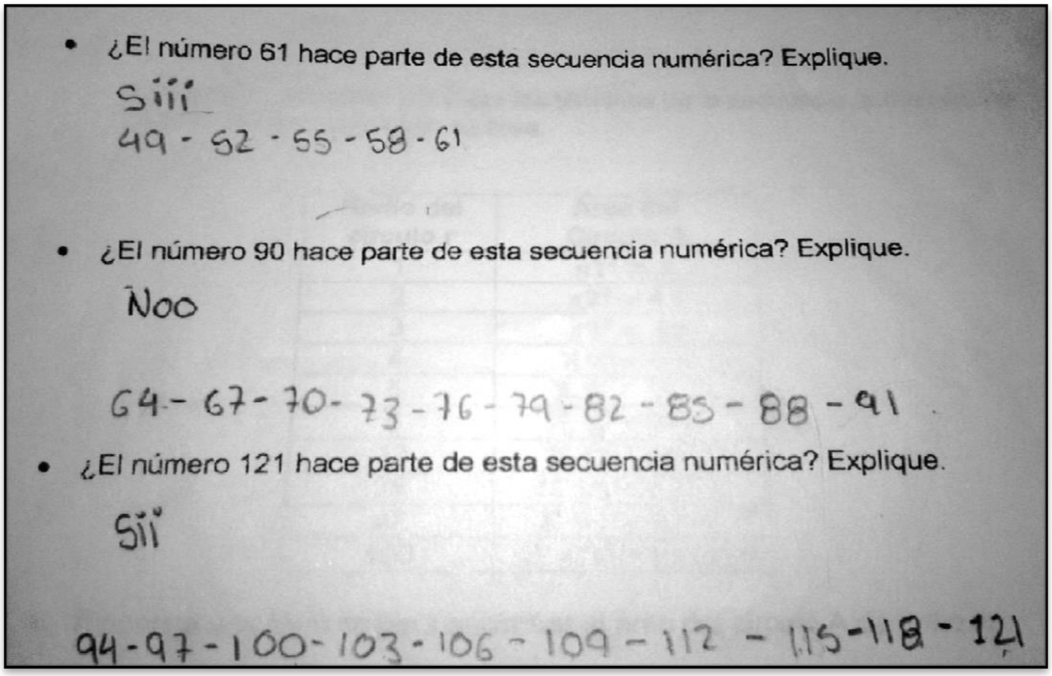


Figura 4- 27: Evidencia E2.

El 88% restante de los estudiantes identificaron los términos de la sucesión, además respondieron cada uno de los ítems usando la construcción de los términos de la sucesión uno a uno, sumándole tres unidades a cada término para encontrar el siguiente y así determinar si los números 61, 90 y 121 pertenecían o no a esta secuencia numérica, como se observa en la Figura 4-28.



- ¿El número 61 hace parte de esta secuencia numérica? Explique.

Siii
49 - 52 - 55 - 58 - 61

- ¿El número 90 hace parte de esta secuencia numérica? Explique.

Noo

64 - 67 - 70 - 73 - 76 - 79 - 82 - 85 - 88 - 91

- ¿El número 121 hace parte de esta secuencia numérica? Explique.

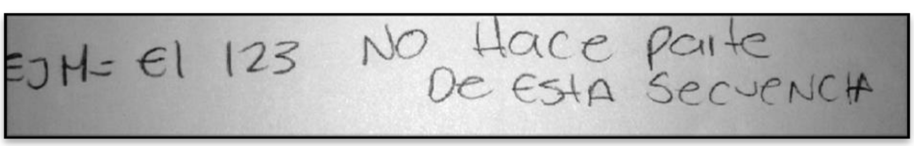
Sii

94 - 97 - 100 - 103 - 106 - 109 - 112 - 115 - 118 - 121

Figura 4- 28: Evidencia E3.

Cuando se les preguntó a los estudiantes que idearan alguna manera de determinar si un número específico hacía parte o no de la secuencia se encontró que:

1. El 16% de los estudiantes no contestaron la pregunta.
2. El 32% de los estudiantes escribían cosas como *contando* o escribían un número cualquiera que hacía parte o no de la secuencia numérica según los ítems resueltos anteriormente, como se observa en la Figura 4-29.



EJM= El 123 NO Hace parte
De ESTA SECUENCIA

Figura 4- 29: Evidencia E4.

3. El 20% de los estudiantes volvían a transcribir los términos de la sucesión, como se observa en la Figura 4-30.

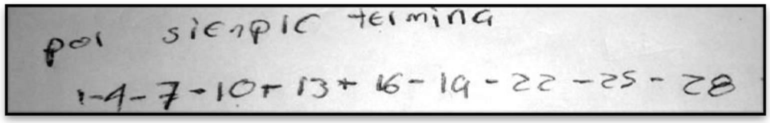


Figura 4- 30: Evidencia E5.

4. El 12% de los estudiantes afirmaban que se sumaba de tres en tres, sin ningún otro tipo de explicación, aunque puede ser considerado como un tipo de **generalización verbal**, faltaría hacer una mejor descripción del patrón encontrado, como se observa en la Figura 4-31.

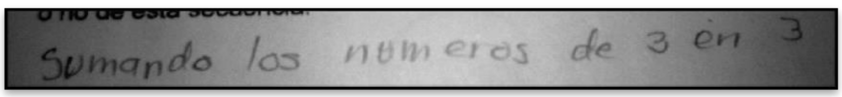


Figura 4- 31: Evidencia E6.

5. El 20% de los estudiantes contestaron que necesitaban hacer toda la secuencia para determinar si un número hacia parte o no de la misma, como se observa en la Figura 4-32.

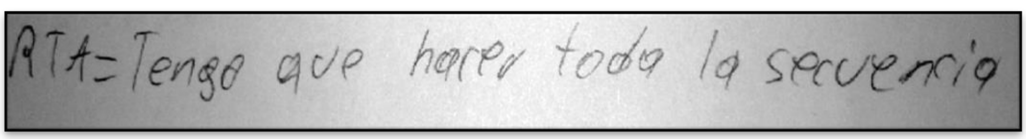


Figura 4- 32: Evidencia E7.

Es posible identificar que el tipo de generalización empleada por la mayoría de los estudiantes en la resolución de esta actividad fue de tipo **empírica** debido a que solo se basaron en la acumulación de los términos por recurrencia, a partir de la identificación del patrón y no les fue posible expresarlo de forma algebraica.

A partir de los datos documentados por Cañadas, Castro y Castro (2012) al aplicar esta misma actividad y relacionando los procesos de generalización con los tipos de representación empleadas en las estrategias de solución, se comparan los datos obtenidos con la población seleccionada en este trabajo.

Población que desarrolló las actividades 4 y 5	Tipos de generalización			
	Numérico	**Algebraico**	**Verbal**	**Gráfico**
359 estudiantes (3° Y 4° ESO), en Cañadas, Castro y Castro (2012))	222 Estudiantes	57 Estudiantes	26 Estudiantes	0 Estudiantes
	61,83%	15,87%	7,24%	0%
25 estudiantes del CED Jackeline.	22 Estudiantes	0 Estudiantes	3 Estudiantes	0 Estudiantes
	88%	0%	12%	0%

Tabla 3- 2: Comparación de datos actividad 5.

Evidenciándose según los datos la complejidad de esta actividad y la necesidad de tener un referente gráfico para alcanzar la generalización de tipo algebraica. Es posible afirmar que el trabajo con sucesiones y más aun el diseño de una secuencia de actividades debe partir del uso de diferentes tipos de representación que evidencien la necesidad de darle significado al patrón de variación y la descripción de diferentes propiedades, y no como se hace rutinariamente privilegiando la representación numérica.

Por otro lado en esta actividad se refleja que la diferencia entre el 15,8% de los estudiantes españoles que alcanzaron la generalización algebraica y el 0% de los estudiantes de grado séptimo del CED Jackeline que no la alcanzaron, radica en el trabajo previo con expresiones algebraicas, visto desde el contexto curricular, que les da un mayor grado de familiaridad con la variable y por ende en su proceso de construcción.

4.3 Consideraciones finales acerca de las estrategias encontradas

- Cuando se involucra en la descripción de la sucesión una representación icónica, los estudiantes pueden **ver** lo que varía y lo que permanece constante, además del trabajo con los casos particulares y la organización de los mismos, alcanzando el nivel de la **generalización empírica**. En contraste con la última actividad en donde este tipo de representación no fue usada, dificultó la observación de las regularidades y la identificación del patrón por parte de algunos estudiantes. Siendo estos procesos fundamentales para desarrollar el razonamiento por inducción, es posible contrastarlo con los procesos que seguían los pitagóricos, los cuales necesitaban ver (de forma icónica), trabajar y organizar los casos particulares para identificar el patrón de cada una de las sucesiones que estudiaban.

- El uso de **tablas** en las actividades propuestas permitió a los estudiantes trabajar con casos particulares, identificando el patrón y relacionando directamente cada uno de los términos de la sucesión con su número de orden, es decir asociarles un número natural y desprendiéndose paulatinamente de la representación icónica pasando a una representación numérica y en algunos casos con algún tipo de descripción de la propiedad encontrada a través de relaciones aritméticas. Hecho similar a los trabajos de Boecio en la edad media.
- En el momento en el que los estudiantes necesitaban **describir** o enunciar la regularidad o propiedad detectada en los términos de la sucesión a través de la formulación de conjeturas, usaban ejemplos ya fueran de los ya encontrados o con números de orden más grandes para verificar que esta propiedad si se cumplía.
- Emerge en las actividades de forma más natural la generalización empírica y la verbal que la generalización gráfica o algebraica para **escribir** las relaciones observadas, esta situación se debe muy posiblemente a que los estudiantes están en el proceso de transición entre la aritmética y el álgebra y por ende al proceso de construcción del significado de la variable, aunque muchos de ellos la reconocen como un número cualquiera.
- Un aspecto relevante en la aplicación de la actividad diagnóstico fue la motivación de los estudiantes para abordar cada una de las situaciones, debido inicialmente al uso de diferentes representaciones, la descripción clara de cada situación que no necesitó de una explicación por parte del docente y la posibilidad de desarrollar una actividad que les permitiera el uso de diversas estrategias las cuales no hacían parte de ningún tipo de evaluación escrita de la asignatura.
- Dos de los estudiantes que participaron en este diagnóstico (Daniel y Paula) en las cuatro primeras actividades mostraron y mantuvieron un nivel exitoso relacionado con la generalización algebraica, el cual se fundamentó en las representaciones iniciales de tipo empíricas, el uso de ejemplos aritméticos, gráficos y verbales que les permitió considerar una expresión algebraica, en

contraste con la actividad número cinco en la cual solo llegaron a la parte verbal, reforzando de nuevo la necesidad en este nivel de escolaridad de reconocer, usar y transitar entre los diferentes tipos de representación involucrados en los procesos de generalización.

El diseño de una secuencia de actividades que permita desarrollar en los estudiantes de grado séptimo el razonamiento por inducción a través del trabajo con situaciones problemas que involucren sucesiones numéricas o geométricas, debe tener en cuenta los anteriores aspectos que permitan de esta manera seleccionar las actividades adecuadas y el tipo de representación a emplear pasando desde las visualización de propiedades y regularidades de los términos de una sucesión de forma icónica; la construcción de tablas para asociar un número natural a cada término de la sucesión; la elaboración de conjeturas y su comprobación para casos particulares; hasta la formulación de una regla general la cual emerge desde el lenguaje natural y que se debe potenciar, para convertirse en una generalización de tipo algebraico, propuesta que se desarrollará en el siguiente capítulo de este trabajo.

5. Secuencia de actividades

5.1 Fundamentación didáctica

Para la construcción de esta secuencia de actividades relacionada con el desarrollo del razonamiento por inducción en estudiantes de grado séptimo, se debe tener en cuenta la teoría didáctica en la que será fundamentada. Inicialmente en términos de D´Amore (2006) el proceso de enseñanza-aprendizaje comprende de forma global ***dimensiones*** *epistemológicas, sociales y cognitivas que involucran las interacciones entre el saber, los estudiantes y el maestro en un contexto específico*, por lo tanto en la propuesta de la secuencia de actividades se relacionarán las consideraciones histórico-epistemológicas, el saber disciplinar y las consideraciones didácticas del razonamiento por inducción con las situaciones de enseñanza propuestas.

Desde la anterior perspectiva retomo la caracterización que hace la Escuela Francesa y específicamente Brousseau (1989) quien considera que el proceso de enseñanza y aprendizaje es un *fenómeno sistémico en donde no es posible estudiar por separado sus dimensiones* y en el cual se debe describir un **sistema didáctico** (maestro, estudiante, saber y contexto) y las relaciones que se establecen entre sus componentes.

Definido el sistema didáctico se debe precisar lo que se entiende por **situación didáctica**. D´Amore (2006, 95) la define como: *el conjunto de relaciones establecidas de modo explícito o implícito entre el maestro, el estudiante (o grupo de estudiantes) y los elementos de su contorno (instrumentos, materiales), teniendo como objetivo hacer que los estudiantes aprendan*. Además para que el estudiante se involucre en la situación didáctica propuesta para construir su propio conocimiento, se debe enfocar en la resolución de situaciones problema de la secuencia de actividades propuesta por el docente.

Con respecto a **la resolución de problemas** retomo en el desarrollo de este trabajo la perspectiva de Schoenfeld (1992) el cual supone la resolución de problemas como un proceso no lineal (en forma de zig-zag, que va de atrás hacia adelante), que se puede

delimitar en cuatro fases (análisis, exploración, ejecución y comprobación) las cuales no son ajenas a los procesos de generalización que van desde el **ver, describir y escribir** (como se mencionó en las consideraciones de tipo didáctico), al mismo tiempo se deben tener en cuenta aspectos muy importantes como el conjunto de conocimientos matemáticos de que dispone el estudiante para abordar los problemas (recursos o conocimientos previos), las técnicas generales de resolución (las heurísticas), la forma como cada estudiante aborda la situación problema (control) y las corrientes de opinión que influyen en los procesos de socialización de las estrategias de solución.
Por lo tanto la teoría de las situaciones didácticas es una teoría del aprendizaje de corte constructivista en la cual el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas, (Brousseau, 1989) y dentro de esta teoría se contemplan varios tipos de situaciones como lo son:

- **Las situaciones de acción:** que funcionan sobre el ambiente y favorecen el nacimiento de teorías implícitas.
- **Las situaciones de formulación:** que favorecen la adquisición de modelos y lenguajes explícitos.
- **Las situaciones de validación:** en donde se les pide a los estudiantes que den explicaciones sobre las teorías utilizadas y también expliciten los medios que subyacen a los procesos demostrativos.
- **Las situaciones de institucionalización:** cuyo objetivo es establecer o darle un status oficial a los conocimientos que se construyeron durante el desarrollo de las actividades propuestas. (D´Amore, 2006, 98).

Partiendo de esta fundamentación teórica, la construcción de la secuencia de actividades que permita desarrollar el razonamiento por inducción en los estudiantes de grado séptimo tendrá situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización, mediadas por una situación problema que involucre una sucesión con diversas representaciones ya sean icónicas, tabulares, geométricas o numéricas, y que a su vez contemple la siguiente estructura:

- Objetivo
- Metodología de trabajo claramente definida.
- Aprendizajes esperados.
- Materiales.

- Una descripción detallada de la situación problema.
- Un mecanismo o estrategia de evaluación.
- La explicitación de posibles actividades complementarias.

5.2 Situaciones de acción. Actividad 1- El juego del tetris.

Con este tipo de situaciones se busca explorar los conocimientos previos de los estudiantes y reestructurarlos. En este sentido se emplearán las fichas del juego del tetris para armar sucesiones, partiendo de la manipulación concreta y su relación con otros tipos de representación.

Objetivo

Establecer correspondencias entre el número de orden de una sucesión y sus términos usando representaciones icónicas, gráficas y numéricas, usando las fichas del juego del Tetris.

Metodología de trabajo

En una sesión de 90 minutos, se desarrollará la actividad propuesta, la cual se dividirá en dos partes; la primera parte será de forma individual usando las fichas del juego del Tetris, para abordar posteriormente las preguntas del cuestionario; en la segunda parte se realizará la socialización de las respuestas, estrategias y nuevas preguntas generadas por los estudiantes a partir del trabajo individual.

Aprendizajes esperados

Dados los términos de una sucesión relacionarlos con el número de orden de los mismos, usando diferentes representaciones.

Materiales

A cada estudiante se le entregarán 30 fichas del juego del Tetris y una fotocopia del cuestionario propuesto.

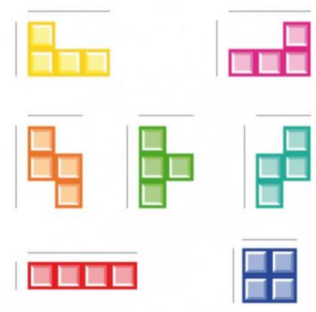


Figura 5- 1: Fichas del Tetris.

Descripción de la situación problema.

Primera parte: a cada estudiante se le hace entrega de 30 fichas del juego del Tetris para que se familiaricen inicialmente con ellas por un tiempo de 10 minutos. Posteriormente se les pide que armen figuras de forma libre con dos fichas, tres fichas, cuatro fichas, cinco fichas, etc., por un tiempo de 10 minutos.

Ahora a cada estudiante se le entregará el siguiente cuestionario, el cual será desarrollado durante 30 minutos de forma individual.

Cuestionario actividad "El juego del Tetris"

1. Observa la siguiente sucesión de términos la cual ha sido construida con las fichas del juego del Tetris.

Gráfica construida						
Número de orden de la figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Número total de cuadros	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**

Tabla 4- 1: Sucesión actividad 1-a, Situación de acción.

2. Dibuja los términos de la sucesión correspondientes a los números de orden 7, 8 y 9.

3. ¿Cuántos cuadros tendrá la figura de número de orden 10 ($\mathcal{F}_{10}$)? compruebe su respuesta haciendo la gráfica correspondiente.

4. Teniendo en cuenta los términos hallados anteriormente complete el siguiente esquema:

No total de cuadros	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**											
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
No de orden de la figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**						

Tabla 4- 2: Sucesión actividad 1-b, Situación de acción.

5. ¿Cuántas cuadros tendrá la figura de número de orden 25 ($\mathcal{F}_{25}$)? ¿Para responder necesitó hacer la figura correspondiente? Explique su respuesta.

6. ¿Cuántas cuadros tendrá $\mathcal{F}_{51}$? Explique su respuesta.

7. ¿Existe alguna relación entre la cantidad de cuadros y el número orden de la figura? Explique su respuesta

Segunda parte: se hace la socialización de las respuestas del cuestionario realizado en la primera parte, con todos los estudiantes retomando pregunta por pregunta. Se hará énfasis en el uso de la representación gráfica del primer punto, la correspondencia explícita que se hace entre el número de cuadros y el número de orden de la figura del punto 4. Luego se revisarán las posibles soluciones a la pregunta 7 en donde se determinará el tipo de generalización que ha empezado a emerger como producto de esta actividad, en la cual no se profundizará sino se dejará como una *teoría implícita*, basada muy posiblemente en generalizaciones empíricas o verbales.

Estrategias de evaluación

- Participación de cada uno de los estudiantes en la parte individual.
- Revisión del cuestionario.
- Participación de los estudiantes en la socialización.

Actividades complementarias

Cada estudiante debe ingresar a internet y jugar por 20 minutos el Juego del Tetris, se recomienda ingresar al link http://www.juegosjuegos.tv/juego-10-tetris-clasico.html

5.3 Situaciones de formulación.

Se proponen **3 actividades** de formulación, las cuales están contextualizadas desde las ciencias naturales e involucran el uso de representaciones icónicas, la reconstrucción de tablas para identificar patrones, la búsqueda de regularidades y propiedades expresadas desde lo aritmético, para potenciar la generalización algebraica pasando por la generalización empírica y verbal.

5.3.1 Actividad 1: Los panales de cera y las abejas.

Objetivo

Establecer conjeturas identificando el patrón de una sucesión en contextos biológicos como la construcción de panales de cera.

Metodología de trabajo

En una sesión de 90 minutos, se desarrollará la actividad propuesta, la cual se dividirá en dos partes; la primera parte será de forma individual para abordar las preguntas del cuestionario en el que se explícita la situación problema; en la segunda parte se realizará la socialización de las respuestas, estrategias y nuevas preguntas generadas por los estudiantes a partir del trabajo individual.

Materiales

A cada estudiante se le entregará una fotocopia del cuestionario.

Aprendizajes esperados

Trabajar y organizar casos particulares para identificar el patrón y establecer una conjetura.

Descripción de la situación problema

Primera parte: cada estudiante contará con 45 minutos para desarrollar el siguiente cuestionario:

Cuestionario actividad "los panales de cera y las abejas"

Un **panal** es una estructura formada por celdillas de cera, las cuales tienen paredes en común y son construidas por las abejas melíferas (las productoras de miel) para contener sus larvas y almacenar miel y polen dentro de la colmena. Las construcciones de las celdas del panal tienen forma hexagonal y crecen gracias a las glándulas cereras de las abejas obreras que las construyen de forma consecutiva como la muestra la figura 5-2. (Las celdas de color gris son las últimas celdas construidas en cada panal).

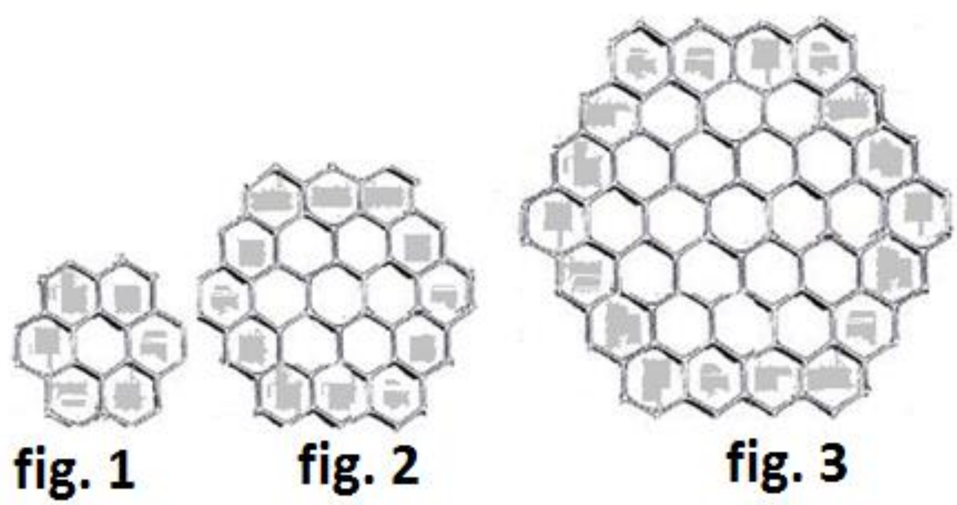


Figura 5- 2: Los panales de cera.

1. Encuentre los términos 4, 5 y 6 de la sucesión anterior. Explique su respuesta.

2. Complete la siguiente tabla que relaciona el número de orden de cada panal y el número de celdas nuevas de cada panal.

Número de orden del panal	**Número de celdas nuevas del panal**
1	6
2	12
3	18
4	
5	
6	
9	
10	
20	
50	

Tabla 4- 3: Actividad 1, Situación de formulación.

3. Encuentre el número de celdas nuevas para el panal correspondiente a la figura de orden 101. Explique su respuesta.

4. Existe alguna relación entre el número de orden de los panales y el número de celdas nuevas en cada uno de ellas. Explique su respuesta de forma verbal.

5. Si llamáramos $\mathcal{F}_x$, al número de orden correspondiente a la figura x, exprese la relación anterior usando estos símbolos.

Segunda parte: se hace la socialización con todos los estudiantes durante los 45 minutos restantes, retomando pregunta por pregunta del cuestionario, haciendo énfasis en la identificación del patrón y el establecimiento de una posible conjetura, la cual posiblemente se base en la generalización verbal y en la demostración a través de ejemplos, encaminándose a la generalización algebraica a través de la pregunta 5 del cuestionario.

Estrategias de evaluación

- Revisión del cuestionario.
- Participación de los estudiantes en la socialización.

Actividades complementarias

Hacer un juego por parejas en donde cada estudiante da un número de celdas nuevas y el otro debe dar el número de orden de la figura, justificando su respuesta.

5.3.2 Actividad 2: La división celular.

Objetivo

Establecer y verificar conjeturas identificando el patrón de la sucesión en un contexto biológico como la reproducción celular.

Metodología de trabajo

En una sesión de 90 minutos, se desarrollará la actividad propuesta, la cual se dividirá en dos partes; la primera parte será de forma individual para abordar las preguntas del cuestionario en el que se explícita la situación problema; en la segunda parte se realizará la socialización de las respuestas, estrategias y nuevas preguntas generadas por los estudiantes a partir del trabajo individual.

Materiales

A cada estudiante se le entregará una fotocopia del cuestionario.

Aprendizajes esperados

Trabajar y organizar casos particulares para identificar el patrón, establecer una conjetura y ponerla a prueba.

Descripción de la situación problema

Primera parte: cada estudiante contara con 45 minutos para desarrollar el siguiente cuestionario:

Cuestionario "La división celular"

La **división celular** es una parte muy importante del ciclo celular en la que una célula inicial (llamada "madre") se divide para formar dos células hijas. Gracias a la división celular se produce el crecimiento de los organismos pluricelulares, el crecimiento de los Tejidos y la reproducción vegetativa en seres unicelulares. Dentro de los múltiples procesos que tiene la célula en su interior, la reproducción le permite regenerarse, a partir de una célula "madre" se originan dos células, proceso conocido como la ***mitosis***[13].

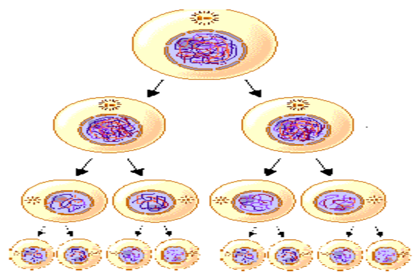


Figura 5- 3: Reproducción celular.

1. Si la primera división celular generó 2 células nuevas, la segunda división celular generó 4 células nuevas y la tercera división generó 8 células nuevas, ¿Cuántas células nuevas se encontraran en la cuarta división celular?
2. ¿Cuántas células nuevas se encontrarán en la quinta división celular?
3. Construya una tabla que relacione el número de orden de la división celular y el número de células nuevas.
4. ¿Existe algún tipo de relación entre el orden de la división celular y el número de células nuevas? Explique.
5. Si llamáramos $\mathcal{F}_x$, al número de orden correspondiente a la división celular x, exprese la relación anterior usando estos símbolos.
6. Muestre que la expresión construida en el ítem anterior funciona para todos los casos.

[13] Tomado de http://www.cellsalive.com/mitosis.htm

Segunda parte: se hace la socialización con todos los estudiantes, durante 45 minutos, retomando pregunta por pregunta del cuestionario, haciendo énfasis en la relación entre el número de orden de la división celular y el número de células nuevas, la construcción de ejemplos, la representación tabular, la descripción de propiedades y la posibilidad de establecer una conjetura de forma explícita y ponerla a prueba a través de diferentes ejemplos.

Estrategias de evaluación

- Revisión del cuestionario.
- Participación de los estudiantes en la socialización.

Actividades complementarias

Por parejas un estudiante da un término de la sucesión de los números pares y el otro encuentra:

- El anterior.
- El siguiente.

5.3.3 Actividad 3: Las aves migratorias.

Objetivo

Realizar una generalización de tipo algebraica de una sucesión en un contexto biológico como el vuelo de las aves.

Metodología de trabajo

En una sesión de 90 minutos, se desarrollará la actividad propuesta, la cual se dividirá en tres partes; en la primera parte inicialmente se proyectara un video que ambiente la situación problema que luego será abordada en la segunda parte de forma individual en el cuestionario; en la tercera parte se realizará la socialización de las respuestas, estrategias y nuevas preguntas generadas a partir del trabajo individual.

Aprendizajes esperados

Implementar la noción de término general de una secuencia a partir del estudio de casos particulares y regularidades.

Materiales

A cada estudiante se le entregará una fotocopia del cuestionario, además se necesita una sala de audiovisuales para la proyección del video.

Descripción de la situación problema

Primera parte: proyección del video de ambientación sobre el vuelo de las aves migratorias, 5 minutos.

http://www.youtube.com/watch?v=3Cc9dVawy14

Figura 5- 4: Pantallazo video vuelo de las aves.

Posteriormente se les permite a los estudiantes debatir durante 5 minutos, sobre las impresiones del video, orientándolos hacia la forma como vuelan las aves.

Segunda parte: Se les hará entrega del cuestionario a cada estudiante, los cuales contarán con 35 minutos para desarrollarlo:

Cuestionario "Las aves migratorias"

Algunas especies de aves migratorias van volando en forma de "V", muchos científicos han investigado las ventajas de este estilo de vuelo para adaptarlo al vuelo de los aviones de combate[14].

Figura 5- 5: Vuelo de las aves y de los aviones.

Según las observaciones de varios científicos, las aves crean estas formaciones para ahorrar energía mediante la posición del cuerpo, al sincronizar el movimiento de sus aleteos. Los individuos que vuelan de esta forma en grupo a menudo cambian su posición y alteran el momento de su aleteo para conseguir la mejor ventaja aerodinámica posible. Al volar en formación en "V" –detrás y al lado del pájaro de delante– los demás pájaros agitan sus alas en forma escalonada y sincronizada.

En esta secuencia cada figura representa un grupo de aves en un orden específico. Presentamos a continuación los 4 primeros términos de la sucesión.

[14] Esta situación fue adaptada de Ponte, Matos y Branco (2009). Sequências e funções.

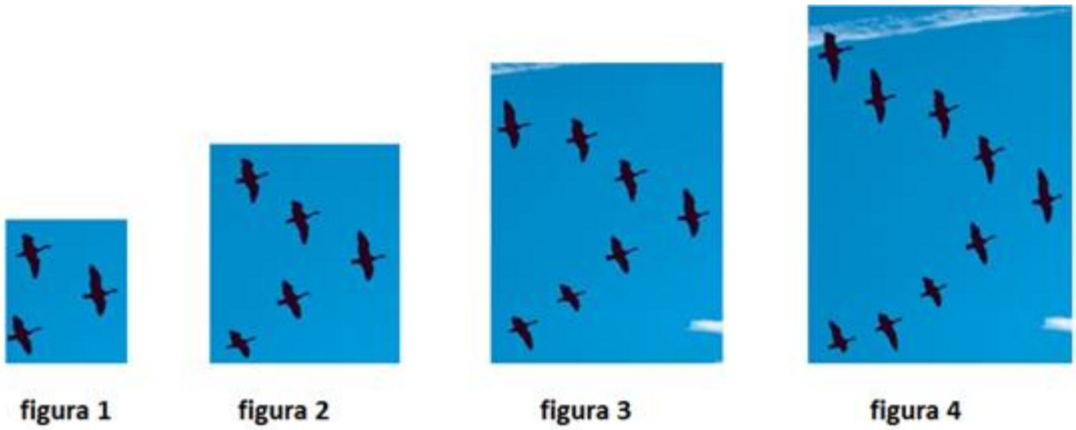


Figura 5- 6: Sucesión del vuelo de las aves.

Responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas aves tiene la figura número 5?
2. ¿Cuántas aves tendrá el término de orden 100 de esta sucesión?
3. ¿Existe en esta secuencia algún término que tenga 86 aves?, si es así indique el orden que ocupa en la sucesión.
4. ¿Existe en esta secuencia algún término que tenga 135 aves?, si es así indique el orden que ocupa en la sucesión.
5. Escriba una fórmula o regla general que permita encontrar el número de aves de cualquier orden de la sucesión.
6. Escriba una expresión matemática que describa la regla anterior, para el número de orden X de la sucesión.

Tercera parte: se hace la socialización, durante 45 minutos, con todos los estudiantes retomando pregunta por pregunta del cuestionario, haciendo énfasis en la construcción de la generalización verbal y algebraica de la situación presentada, el uso de la variable x y las expresiones algebraicas que se intentaron construir en términos de la figura de orden x, que fue llamada $\mathcal{F}_x$ y su relación con esta nueva situación problema.

Estrategias de evaluación

- Revisión del cuestionario.
- Participación de los estudiantes en la socialización.

Actividades complementarias

Actividades de traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

5.4 Situaciones de validación.

Se proponen tres actividades de validación en las cuales se buscará hacer la transición de la generalización empírica y verbal a la generalización algebraica a partir del reconocimiento y la explicitación de las propiedades de los números cuadrados, oblongos y triangulares.

5.4.1 Actividad 1: Números cuadrados.

Objetivo

Realizar una generalización de tipo algebraica de los números cuadrados a partir de representaciones gráficas y expresiones aritméticas.

Metodología de trabajo

En una sesión de 45 minutos, se desarrollará la actividad propuesta, la cual se dividirá en dos partes; en la primera parte se abordará la situación problema a través de un cuestionario aplicado de forma individual; en la segunda parte se realizará la socialización de las respuestas, estrategias y nuevas preguntas generadas a partir del trabajo individual.

Aprendizajes esperados

Encontrar el término general de la sucesión de los números cuadrados usando una expresión algebraica.

Materiales

A cada estudiante se le entregará una fotocopia del cuestionario.

Descripción de la situación problema

Primera parte: cada estudiante contara con 45 minutos para desarrollar el siguiente cuestionario:

Cuestionario "Los números cuadrados y oblongos"

1. Observe la siguiente sucesión de números cuadrados llamados así porque forman una figura de forma cuadrada de puntos, donde C1 es el primer número cuadrado, C2 el segundo número cuadrado, C3 el tercero, C4 el cuarto número cuadrado, etc.

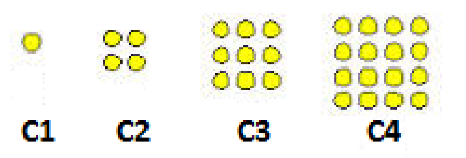


Figura 5- 7: Sucesión de los números cuadrados.

2. Complete la siguiente tabla con base en la sucesión anterior. Observe bien el número de orden relacionado.

Número de orden.	Número cuadrado	Propiedad aritmética
C1	$1^2 = 1$	(1 x 1)=1
C2	$2^2 = 4$	(2 x 2)=4
C3		
C4		
C10		
C25		
C51		

Tabla 4- 4: Actividad 1-a, Situaciones de validación.

3. Considere a Cn como el número de orden "n" de un número cuadrado, complete la tabla y justifique su respuesta.

Número de orden.	Número cuadrado	Propiedad aritmética
Cn		

Tabla 4- 5: Actividad 1-b, Situaciones de validación.

4. Compruebe que la propiedad aritmética enunciada en el punto anterior funciona para todos los casos.

5. Observe la siguiente propiedad de los números cuadrados, que se ha representado por medio de gráficos.

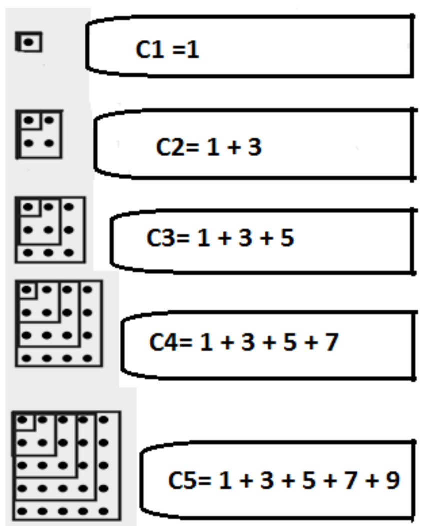


Figura 5- 8: Propiedad de los números cuadrados.

6. Exprese esta propiedad para los números cuadrados

1. C7=
2. C8=
3. C10=
4. C25=
5. C50=

7. ¿Cuál es la característica común que tienen los números que se están sumando para formar un número cuadrado?
8. Considere a Cn como el número de orden "n" de un número cuadrado, cuál será la expresión que describe la propiedad anterior correspondiente a Cn. Explique su respuesta.

Segunda parte: se hace la socialización, durante 45 minutos, con todos los estudiantes retomando pregunta por pregunta del cuestionario, buscando la generalización algebraica a partir de la exploración de algunos ejemplos, la introducción de símbolos y la descripción de algunas propiedades de los números cuadrados, las cuales se ejemplifican desde una reconstrucción gráfica.

Estrategias de evaluación

- Revisión del cuestionario.
- Participación de los estudiantes en la socialización.

Actividades complementarias

Buscar en diferentes lugares la representación gráfica de números cuadrados (pisos, paredes, cuadrículas de cuadernos, entre otros).

5.4.2 Actividad 2: Números oblongos y su relación con los números cuadrados.

Objetivo

Realizar una generalización de tipo algebraica de la relación establecida entre los números cuadrados y oblongos.

Metodología de trabajo

En una sesión de 120 minutos, se desarrollará la actividad propuesta, la cual se dividirá en dos partes; en la primera parte se abordará la situación problema a través de un cuestionario aplicado de forma individual; en la segunda parte se realizará la socialización de las respuestas, estrategias y nuevas preguntas generadas a partir del trabajo individual.

Aprendizajes esperados
Describir por medio de una expresión algebraica la relación que se estableció entre los números cuadrados y los números oblongos.

Materiales
A cada estudiante se le entregará una fotocopia del cuestionario.

Descripción de la situación problema

Primera parte: cada estudiante contará con 60 minutos para desarrollar el siguiente cuestionario:

Cuestionario "Los números oblongos y su relación con los números cuadrados"

1. Observe la siguiente sucesión de números oblongos también llamados rectangulares, porque forman una figura de forma rectangular de puntos, donde O1 es el primer número oblongo, O2 el segundo número oblongo, O3 el tercero, O4 el cuarto número oblongo, etc.

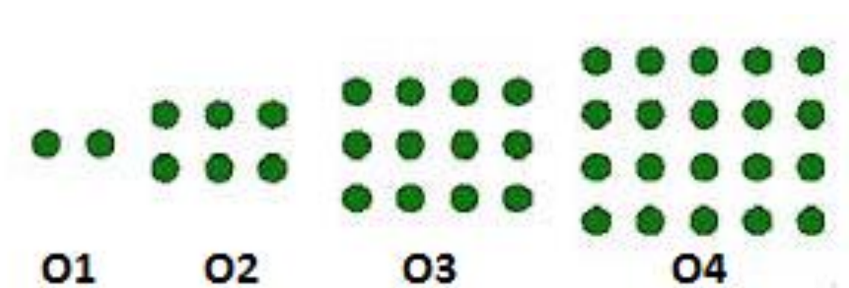


Figura 5- 9: Números oblongos.

2. Complete la siguiente tabla con base en la sucesión anterior.

Número de orden.	**Número oblongo**	**Propiedad aritmética**
O1	2	(1 x 2)=2
O2	6	(2 x 3)=6
O3	12	
O4		
O10		
O25		
O51		

Tabla 4- 6: Actividad 2-a, Situaciones de validación.

3. Considere a On como el número de orden “n” de un número oblongo, complete la tabla y justifique su respuesta.

Número de orden.	**Número oblongo**	**Propiedad aritmética**
On		

Tabla 4- 7: Actividad 2-b, Situaciones de validación.

4. Compruebe que la propiedad aritmética enunciada en el punto anterior funciona para todos los casos.

5. Observe la siguiente relación que se establece entre los números cuadrados y los números oblongos

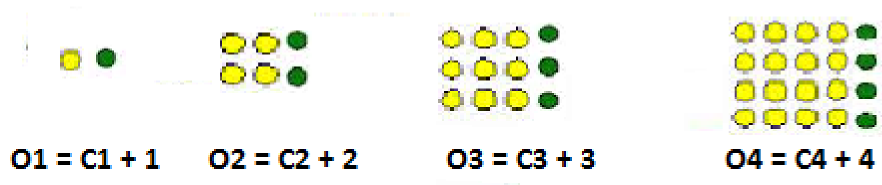


Figura 5- 10: Relación entre los números cuadrados y los oblongos.

6. Complete la siguiente tabla con base en la sucesión anterior.

Número de orden.	**Número oblongo**	**Número cuadrado**	**Propiedad aritmética**	
O1	2	C1 = 1	O1 = C1 + 1	2 = 1 + 1
O2	6	C2 = 4	O2 = C2 + 2	6 = 4 + 2
O3	12	C3 = 9	O3 = C3 + 3	12 = 9 + 3
O4				
O10				
O15				
O25				
O51				

Tabla 4- 8: Actividad 2-c, Situaciones de validación.

7. Considere a On como el número de orden “n” de un número oblongo, complete la tabla y justifique su respuesta.

Número de orden.	**Número oblongo**	**Número cuadrado**	**Propiedad aritmética**
On			On =

Tabla 4- 9: Actividad 2-d, Situaciones de validación.

8. Compruebe que la propiedad aritmética enunciada en el punto anterior funciona para todos los casos.

Segunda parte: se hace la socialización, durante 60 minutos, con todos los estudiantes retomando pregunta por pregunta del cuestionario, haciendo énfasis en la construcción de la generalización algebraica a partir de la exploración de los ejemplos que relacionan explícitamente el número de orden de Ci, o de Oi, para todo $i \in \mathbb{N}$. Al introducir estos símbolos se busca que aparezca la generalización algebraica necesaria para el desarrollo de esta actividad.

Por otro lado se debe consolidar las exploraciones de propiedades numéricas como la establecida entre un número cuadrado y su número de orden para obtener un número oblongo y que a su vez esta relación se exprese usando un lenguaje algebraico.

Estrategias de evaluación

- Revisión del cuestionario.
- Participación de los estudiantes en la socialización.

Actividades complementarias

Usando palillos y bolitas de plastilina de diferentes colores construir números cuadrados, y oblongos y relacionarlos como se propuso desde la resolución del cuestionario de forma concreta.

5.4.3 Actividad 3: Números triangulares.

Objetivos

Realizar generalizaciones de los números triangulares a partir de una propiedad enunciada.

Generalizar algebraicamente la suma de dos números triangulares consecutivos como un número cuadrado.

Metodología de trabajo

En dos sesiones de trabajo cada una de ellas de 60 minutos, se desarrollará la actividad propuesta, la cual se dividirá en dos partes; en la primera parte se abordará la situación problema a través de un cuestionario aplicado de forma individual; en la segunda parte se realizará la socialización de las respuestas, estrategias y nuevas preguntas generadas a partir del trabajo individual.

Aprendizajes esperados

Generalizar que la suma de números naturales consecutivos es un número triangular y que la suma de dos números triangulares consecutivos equivale a un número cuadrado.

Materiales

A cada estudiante se le entregará una fotocopia del cuestionario.

Descripción de la situación problema

Primera sesión: cada estudiante contará con 60 minutos para desarrollar el siguiente cuestionario:

Cuestionario "Los números triangulares"

1. Observe la siguiente sucesión de números triangulares llamados así por la figura que forman con la distribución de sus puntos, donde T1 es el primer número triangular, T2 el segundo número triangular, T3 el tercero, T4 el cuarto número triangular, etc.

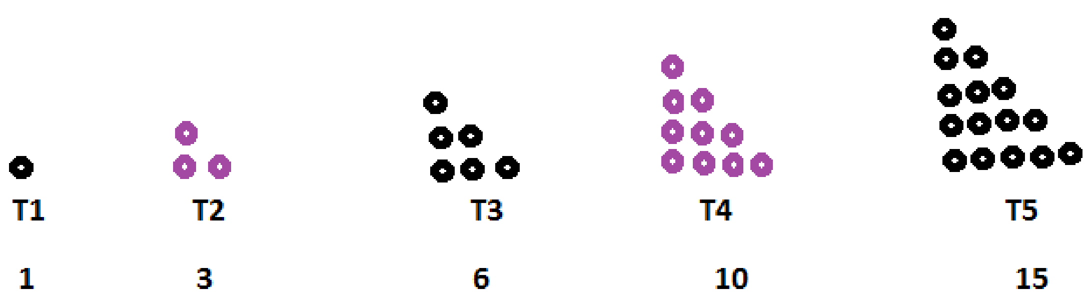


Figura 5- 11: Números triangulares.

Con relación a la sucesión de números triangulares podemos determinar qué:

Número de orden.	**Número triangular**	**Propiedad aritmética**
T1	1	T1 = 1
T2	3	T2 = 1+2
T3	6	T3 = 1 + 2 +3
T4	10	T4 = 1 + 2 + 3 + 4
T5	15	T5= 1 + 2 + 3 +4 +5

Tabla 4- 10: Actividad 3-a, Situaciones de validación.

2. Complete los términos de la sucesión de números triangulares

T6	**T7**	**T8**	**T9**	**T10**	**T11**	**T12**	**T13**	**T14**	**T15**	**T16**	**T17**	**T18**	**T19**

Tabla 4- 11: Actividad 3-b, Situaciones de validación.

3. Cuál será el número triangular correspondiente a T50. Explique su respuesta.

4. Uno de sus compañeros afirma que para hallar el número triangular T90 es necesario resolver la siguiente suma:

T90 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+…+ 86+87+88+89+90

- Está de acuerdo con la estrategia de solución anterior. Justifique su respuesta.
- Existe alguna manera de encontrar el T90 sin necesidad de hacer todas las sumas. Como lo haría. Justifique su respuesta.

5. Un estudiante del curso encuentra esta relación entre los números oblongos y los números triangulares

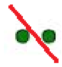
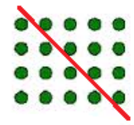
En la gráfica divido en dos partes iguales al número oblongo.				
Número de orden oblongo	O1	O2	O3	O4
Propiedad de los oblongos	(1 x 2)	(2 x 3)	(3 x 4)	(4 x 5)
Número de orden triangular	T1	T2	T3	T4
Expresión para encontrar un triangular	$\frac{(1\ x\ 2)}{2} = 1$	$\frac{(2\ x\ 3)}{2} = 3$	$\frac{(3\ x\ 4)}{2} = 6$	$\frac{(4\ x\ 5)}{2} = 10$

Tabla 4- 12: Actividad 3-c, Situaciones de validación.

- Explique la relación anterior y por qué funciona para varios números triangulares.
- Considere a Tn como el número de orden "n" de un número triangular, cuál será el número triangular correspondiente a Tn, con base en la anterior relación. Explique su respuesta.

6. Compruebe que la expresión enunciada en el punto anterior funciona para cualquier número triangular.

7. Observe la siguiente relación entre los números triangulares y los números cuadrados.

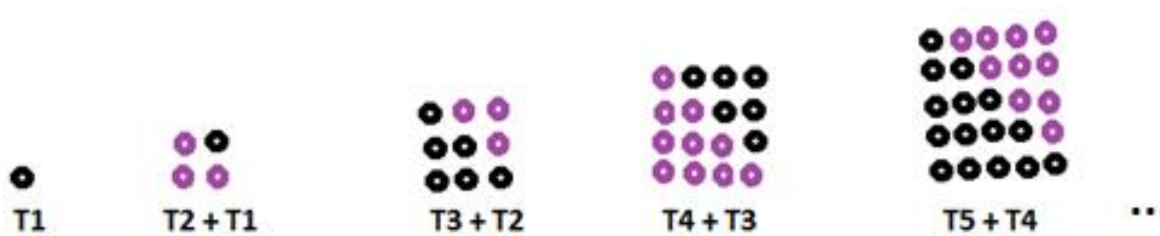


Figura 5- 12: Relación entre los números triangulares y cuadrados.

Con base en la anterior sucesión:

A) Construya las gráficas correspondientes a:

- T5 + T6
- T6 + T7
- T8 + T9
- T10 + T11

B) Complete la siguiente tabla:

Número cuadrado	**Propiedad de los números triangulares**
C1	C1 = T1
C2	C2 = T2 + T1
C3	C3= T3 + T2
C4	
C5	
C23	
C50	
C100	
C201	

Tabla 4- 13: Actividad 3-d, Situaciones de validación.

C) Considere a Cn como el número de orden "n" de un número cuadrado, complete la tabla y justifique su respuesta

Número cuadrado	**Propiedad de los números triangulares**
Cn	Cn =

Tabla 4- 14: Actividad 3-e, Situaciones de validación.

Segunda Sesión: se hace la socialización durante 60 minutos, con todos los estudiantes retomando pregunta por pregunta del cuestionario, haciendo énfasis en la construcción de expresiones que permitan obtener un número triangular desde la suma de números naturales consecutivos o desde la construcción de la expresión algebraica $Tn = \frac{n\,(n+1)}{2}$, buscando que los estudiantes usen este tipo de representaciones simbólicas, para formular, desarrollar y comprobar conjeturas desde contextos gráficos o numéricos, y de esta forma consolidar y complejizar el razonamiento por inducción y el uso del lenguaje algebraico.

Estrategias de evaluación

- Revisión del cuestionario.
- Participación de los estudiantes en la socialización.

Actividades complementarias

Observa mes a mes como se reproducen estas parejas de conejos.

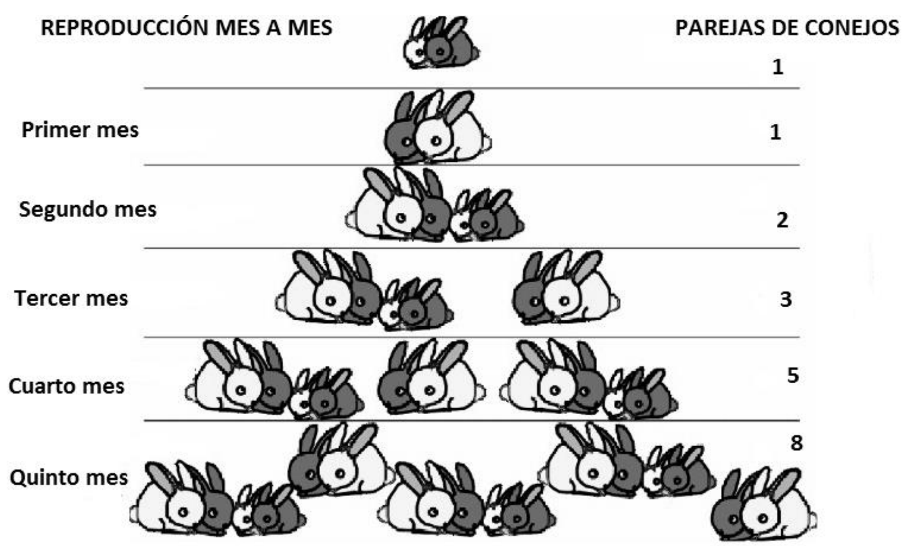


Figura 5- 13: Reproducción de conejos mes a mes.

Busque alguna manera de encontrar el número de parejas de conejos después de dos años de reproducción y explíquelo a uno de sus compañeros del curso.

5.5 Situaciones de institucionalización.

Es importante considerar que al finalizar cada una de las actividades de acción, formulación o validación se planeó hacer una socialización cuyo objetivo implícito es institucionalizar el conocimiento circulante en el aula para verificar, poner a prueba y consolidar las estrategias de solución seguidas por los estudiantes en cada una de las situaciones problema planteadas, por lo tanto las situaciones de institucionalización están inmersas en la última parte de cada una de las actividades propuestas en esta secuencia.

Para finalizar esta secuencia de actividades se recomienda como actividad de institucionalización de cierre la aplicación de nuevo del instrumento de diagnóstico para comparar de esta manera los aprendizajes alcanzados por los estudiantes con relación a las respuestas dadas inicialmente y a las que pueden llegar a dar después de ejecutar toda la secuencia didáctica, determinando cuidadosamente el uso de la generalización verbal y algebraica para las justificación de cada una de las estrategias desarrolladas.

6. Conclusiones y recomendaciones.

6.1 Conclusiones

- Las representaciones involucradas en los procesos de generalización de una sucesión de términos genera diferentes formas de abordar una situación problema y estas a su vez evidencian un nivel de complejidad en los procesos de generalizar patrones, es así que este trabajo permite evidenciar la importancia de la representación como registro de un proceso mental seguido por el estudiante y que genera a su vez un tipo de estrategia acorde a un nivel de complejidad especifico.

- En este trabajo se usó la historia como un recurso didáctico importante desde los procesos de generalización, debido a que en las consideraciones históricas fue posible evidenciar que el ver, describir y escribir fue aparentemente el proceso seguido por la humanidad y por ello se siguió con los estudiantes de grado séptimo del CED Jackeline.

- A pesar de que en los estándares curriculares se habla de la generalización de patrones, búsqueda de regularidades, trabajo con sucesiones, elaboración de conjeturas y comprobación de las mismas, que son de vital importancia para el desarrollo de razonamiento por inducción, se ha dejado de lado en la planeación de actividades propias del álgebra escolar, debido a que se enfatiza más en la adquisición de un lenguaje algebraico de tipo operacional y no desde la construcción significativa del mismo.

- La implementación de actividades didácticas con sucesiones numéricas o geométricas favorece en los estudiantes el desarrollo del razonamiento algebraico a través de la resolución de situaciones problemas desde diferentes contextos, las cuales no deberían esperar a trabajarse en el grado octavo y noveno, sino en grados anteriores, buscando de esta forma la construcción del significado de la variación desde el reconocimiento de patrones, la búsqueda de regularidades y de fórmulas o expresiones generales susceptibles a ser compradas y verificadas.

- La posibilidad de proponer situaciones problemas con sucesiones numéricas y geométricas desde contextos biológicos como la conformaciones de panales, la reproducción celular y el vuelo de las aves permite establecer relaciones entre las ciencias exactas y las ciencias naturales desde una perspectiva mucho mas integral y no fragmentada del conocimiento.

6.2 Recomendaciones.

- El trabajo con sucesiones posibilita el desarrollo posterior del concepto de función desde el establecimiento de la relación uno a uno entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales, definiéndolo intuitivamente como el número de orden de la figura y el término de la sucesión propuesta, se recomienda explorar este aspecto en trabajos posteriores.

- Otros trabajos finales de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales podrían implementar la actividad de diagnóstico diseñada en este trabajo con diferentes grupos de estudiantes para comparar los resultados documentados y analizarlos desde las consideraciones históricas, disciplinares y didácticas de los procesos de generalización expuestas en los capítulos anteriores.

- Espero poder publicar los resultados de la implementación de la secuencia didáctica propuesta en este trabajo y de esta manera poder contrastar lo planeado y lo esperado con los aprendizajes desarrollados en un grupo de estudiantes especifico.

Bibliografía

APOSTOL, T. (1988) Calculus, Vol 1. Cálculo de funciones en una variable, con una introducción al algebra lineal. Barcelona-Bogotá- Buenos Aires- México: Editorial Réverte.

BALLÉN, J. (2012) El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado. Trabajo final de la MECEN. Universidad Nacional de Colombia.

BOYER, C. (1994) Historia de la Matemática. Alianza Universidad.

BUSSEY, W. (1917) The origin of Mathematical Induction. The American Mathematical Monthly, Vol. 24. No. 5, p (199-207).

CAÑADAS, C. y CASTRO, E. (2007) A proposal of categorisation for analyzing inductive reasoning, PNA 1 (pp. 67–78).

CAÑADAS, C., CASTRO, E. y CASTRO, E. (2012) Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. Revista la Gaceta Vol 15, Num 3, p (561-563).

D´ AMORE (2006) Didáctica de las matemáticas. Universidad de Bologna, Italia. Traducción de Angel Balderas. Editorial magisterio. Bogotá. Colombia.

FALK, M. (2012) Corrientes del pensamiento matemático del siglo XX. Universidad Antonio Nariño. Bogotá. Colombia.

GODINO, J., CASTRO, W., AKÉ, L. y WILHELMI, M. (2012) Naturaleza del razonamiento algebraico elemental, Bolema, Rio Claro. (SP), v. 26, n. 42B, p. 483-511.

GONZALES, E. (2012) Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas. Trabajo final de la MECEN. Universidad Nacional de Colombia.

LASPRILLA, A. Y CAMELO, F. (2012) Generalizando patrones figurales con estudiantes de 8 y 9 años: una interpretación de los medios semióticos de objetivación movilizados, Colombia. Appl. Linguist. J. ISSN 0123-4641 Vol. 14 • Number 2 • Bogotá, Colombia. p. 35-50.

MARKUSHÉVICH, A. (1986) Sucesiones recurrentes. Mir. Moscu.

MEN. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2003), Estándares básicos de competencias en matemáticas, Bogotá.

MUÑOZ, J.M. (2014) Introducción a la teoría de conjuntos. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

PÉREZ, A. (2000) Los números poligonales. Una caja de sorpresas con mucha historia, Revista La Gaceta p. (331-337).

PONTE, J., MATOS, A. y BRANCO, N. (2009). Sequências e funções. DGIDC, Ministerio de educación de Brasil. (Documento suministrado por el autor en el ECME 13- ASOCOLME 2014).

POSADA, E. y otros (2005) interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas. Medellín: Gobernación de Antioquia.

RADFORD, L. (2012, July). Early algebraic thinking epistemological, semiotic, and developmental issues. In 12th international Congress on mathematical education (pp. 8-15).

RANGEL, L (2012). Patrones y Regularidades Numéricas: Razonamiento Inductivo. Trabajo final de la MECEN. Universidad Nacional de Colombia.

RUANO. R., SOCAS. M. y PALAREA. M. (2008), Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, Generalización y modelización en Álgebra, España, Universidad de Granada.

SALAZAR J. y ACEVEDO B. (1997) Sucesiones y series numéricas. Universidad Nacional de Colombia.

SÁNCHEZ, C. (2002) Inducción Filosófica- Inducción matemática. Bogotá: Memorias del XIII encuentro de aritmética y I de geometría.

SÁNCHEZ, C.; SERRANO, G. y PEÑA, J. (2009) Argumentación y lógica. Herramientas para un análisis crítico de argumentos, Grupo Dialéctica y mos geometricus. Universidad Nacional de Colombia.

SÁNCHEZ, C. (2013) El origen de los Números y de los sistemas de numeración. Universidad Nacional de Colombia. Notas de clase.

SANTOS-TRIGO, M. (2007). La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. México: Trillas.

SCHOENFELD, A. (1992) Learning to think matematically problem solving, metacognition and sense making in mathematics. NY. Universidad de California.

TAKEUCHI, Y. (1983) Sucesiones y series. Mexico: Limusa.

TAKEUCHI, Y. (1993) Temas elementales de sucesiones. Universidad Nacional de Colombia.