REDES

RED DISTRITAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Educación matemática

Experiencias de trabajo en el aula

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.
Secretaría Educación

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Bogotá sin indiferencia

EDUCACIÓN MATEMÁTICA:
Experiencias de trabajo en el aula

Secretaría de Educación Distrital
RED DISTRITAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Compiladores:
Martha Bonilla E., Cecilia Barón Páez
Jaime H. Romero Cruz, Pedro J. Rojas Garzón

ALCALDÍA MAYOR
DE BOGOTÁ D.C.
Secretaría
Educación

Bogotá sin indiferencia

ALCALDÍA MAYOR
DE BOGOTÁ D.C.
Secretaría
Educación

Alcalde Mayor de Bogotá D. C.
LUIS EDUARDO GARZÓN
Secretario de Educación del Distrito
ABEL RODRÍGUEZ CÉSPEDES
Subsecretario Académico
FRANCISCO CAJIAO RESTREPO
Subsecretario Administrativo
ÁNGEL PÉREZ MARTINEZ
Subsecretaria de Planeación y Finanzas
LILIANA MALAMBO MARTÍNEZ
Directora de Evaluación y Acompañamiento
CECILIA RINCÓN BERDUGO
Subdirectora de Formación de Educadores
MARINA ORTIZ LEGARDA

Título original de la obra: EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Experiencias de trabajo en el aula

Coompiladores: Martha Bonilla E., Cecilia Barón Páez
Jaime H. Romero Cruz, Pedro J. Rojas Garzón

ISBN: 958-20-0869-5
Primera edición: Año 2006. 400 ejemplares

Avenida El Dorado No. 66 - 63
Teléfono: 571 (324 1000)
Bogotá D.C. - Colombia

Portada: Mauricio Suárez

Diseño y Diagramación: Cooperativa Editorial MAGISTERIO
www.magisterio.com.co

Impreso en Colombia

Contenido

Presentación

La Secretaría de Educación Distrital, desde la Subdirección de Formación de Educadores, ha emprendido el proyecto de apoyo a grupos de saber pedagógico como una iniciativa que pretende suscitar en el maestro el deseo de trabajar con sus colegas de área, de institución, de localidad o de región, y construir el compromiso de organización en la búsqueda de oportunidades para intercambiar y apoyarse como gremio.

Cada profesional de la educación tiene una responsabilidad y una motivación individual, que no desconocemos, sino que pretendemos afianzar a partir de considerarlo como parte de un tejido social y profesional que requiere actitudes gremiales de convivencia, trabajo conjunto y construcción de sentidos, al servicio del sector educativo.

En ese orden de ideas, la conformación de Redes Distritales de maestros tiene como objetivo principal fomentar el carácter de agremiación a través de la cooperación, el desarrollo colaborativo y el intercambio, con el compromiso de poner los saberes y experiencias de cada maestro al servicio del desarrollo profesional del gremio en la perspectiva de producción colectiva de conocimiento.

Hasta el momento hemos contado con la espontaneidad y compromiso de los maestros que pertenecen a las redes; a través de ellos hemos aprendido algunas de las dificultades que implica el trabajo en RED, el tiempo de maduración que conlleva y la constancia que se requiere para lograr grupos realmente cohesionados.

El apoyo a redes desde la Secretaría de Educación se ha realizado mediante una estrategia que en la primera etapa fue implementada por equipos académicos de universidades quienes durante un año acompañaron con procesos de formación a los maestros de redes temáticas; esta experiencia mostró, entre otras cosas, que las redes de maestros requieren procesos de organización que les permitan gestionar como gremio, que los maestros tienen la idoneidad suficiente para realizar procesos de autoformación en los encuentros, pero que es necesario superar la etapa de experiencias puestas en común y emprender la etapa de producción de conocimiento, ya que se requiere iniciar procesos de autorregulación de las Redes. Esta publicación da cuenta del esfuerzo y el trabajo de los maestros y maestras que aportan sus reflexiones individuales a este texto colectivo de maestros para maestros.

Marina Ortiz Legarda
Subdirectora Formación de Educadores
Secretaría de Educación Distrital

Introducción

En la actualidad es reconocida ampliamente la necesidad de contribuir en la construcción y consolidación de una comunidad académica que privilegie la reflexión y discusión acerca de la educación matemática. En este sentido, la Secretaría de Educación Distrital de Bogotá, dentro del Proyecto de Cualificación y Mejoramiento Profesional de los Maestros y las Maestras, ha promovido el fortalecimiento de las organizaciones autónomas del saber pedagógico de los docentes, a través del apoyo a las Redes de Maestros. En este proceso, ha coordinado con la Universidad Distrital Francisco José de Caldas actividades orientadas a la construcción de una Red de Educadores Matemáticos.

La Red Distrital de Educación Matemática es un espacio académico y de organización abierto a maestros y maestras que desarrollan de manera autónoma actividades de investigación, innovación y sistematización de sus experiencias pedagógicas en matemática educativa. La Red se ha configurado como estrategia de gestión de conocimiento pedagógico y como forma de organización de los docentes interesados en vislumbrar rumbos para la educación matemática en el Distrito Capital. Por tanto el trabajo de los docentes en la Red ha ofrecido opciones de respuesta a dos tipos de interrogantes, uno, relativo a la enseñanza y el aprendizaje de tópicos específicos de las matemáticas escolares, y otro, a las formas de organización que permitan la comunicación y socialización de experiencias entre los profesores de matemática de cada institución educativa, de cada una de las localidades y de la ciudad.

Con el propósito de socializar y divulgar más ampliamente algunos de los trabajos desarrollados por docentes o grupos de docentes, integrantes de la Red de Distrital de Educación Matemática, la Secretaría de Educación Distrital de

Bogotá y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas han coordinado la publicación de dichos trabajos.

Este libro contiene ocho escritos sobre los trabajos diseñados y desarrollados por integrantes de la Red, con estudiantes de Educación Básica de Bogotá, en el área de matemáticas. En estos escritos se presenta una síntesis de los referentes teóricos que orientaron la propuesta y se expone, por una parte, vivencias de los docentes en el desarrollo de su experiencia de aula y, por otra, análisis de los resultados obtenidos. Además, en algunos casos, incluye tanto sugerencias sobre estrategias de trabajo específicas, como posibilidades de uso de materiales como recurso didáctico. Es importante reconocer el trabajo realizado por estos docentes, no sólo por el esfuerzo requerido para el diseño y desarrollo de estas propuestas, sino también por el trabajo realizado en el proceso de sistematización de su experiencia, así como por el interés de socializarla en el espacio de la Red.

Sin duda, este escrito se constituye en un aporte en el proceso de construcción y consolidación de la comunidad de educadores matemáticos del país que, desde hace más de una década, cuenta con reconocimiento académico a nivel nacional.

La revisión y el análisis de los documentos presentados en este libro aportan elementos que permiten al profesor de matemáticas orientar propuestas de trabajo en el aula, en las que se incorpore no sólo el conocimiento generado desde la experiencia profesional específica de cada docente, sino también el obtenido a partir de procesos de interacción con otros profesionales y a partir de la revisión de elementos teóricos propios de la didáctica de las matemáticas.

Pedro Javier Rojas G.
Red de Educación Matemática
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Aprendizaje del concepto de área

Incidencia del trabajo en colaboración, la resolución de problemas y el Cabri-Geometry en la comprensión de aspectos asociados al concepto de área

LUIS ÁNGEL BOHÓRQUEZ ARENAS (1)
IED FEDERICO GARCÍA LORCA

Experiencia con herramientas tecnológicas en el aula de matemática

Desde hace mucho tiempo, para mí ha sido de gran interés, diseñar una propuesta pedagógica que genere un ambiente efectivo de aprendizaje de las matemáticas. Esta idea tomó mayor fuerza cuando participé en un proyecto que buscaba propiciar cambios en las prácticas pedagógicas de los docentes, incorporando nuevas herramientas informáticas en la clase de matemáticas. Este proyecto, liderado por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, me permitió conocer y discutir personalmente con los creadores de los programas que había estudiado, las propuestas pedagógicas que planteaban. Este hecho me llevó a profundizar más sobre el trabajo con un software, Cabri-Geometry, diseñado con el propósito de enseñar matemáticas, en particular geometría.

Este software es un micromundo para la construcción y manipulación de figuras geométricas. Con él es posible construir puntos, segmentos, rectas, circunferencias y casi la totalidad de las figuras de geometría plana que se presentan en la enseñanza secundaria. El programa hace posible transformar y modificar estas figuras, así como visualizar conjuntos de puntos de muy diversa naturaleza, explorar sus propiedades y realizar construcciones geométricas que creen relaciones entre estos objetos. El software está diseñado para que cuando los objetos básicos se desplacen, se conserven las relaciones definidas entre ellos, de modo que es posible observar de forma continua las modificaciones experimentadas por la figura y las características de los objetos básicos.

A pesar de las posibilidades de manipulación de este software y las bondades del programa para trabajar geometría, observé que la manera como se involucró el software en las aulas durante nuestro proyecto con el MEN no fue la más conveniente, posiblemente porque muchos consideraron que la entrada del programa a la clase motivaba por sí misma a los alumnos a estudiar matemáticas. Con esta concepción, los maestros se dedicaron más que todo a enseñar el manejo mecánico del software y no a dar soporte a los alumnos para que lo usaran en sus exploraciones de la geometría plana. Este hecho generó en mí la inquietud de diseñar una propuesta pedagógica que permitiera involucrar de manera efectiva el software en el aula. Lo logré, en alguna medida, cuando inicié labores en una institución educativa del distrito como docente del área de matemáticas. Allí conocí las dificultades que presentaban los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos matemáticos, en particular los asociados a la geometría, y generé usos diferentes del software para apoyar su comprensión. Sin embargo, los problemas y las actividades que propuse por esa época dependían casi exclusivamente de la utilización del software, lo cual hacía que se mantuviera mi inconformidad con las características de mis intervenciones en el aula. En la medida que aclaré la concepción constructivista del aprendizaje y las prácticas que tienen como base sus principios, empecé a definir las características de la propuesta pedagógica que deseaba diseñar e implementar.

En este escrito defino las características a partir de un resumen de informes de investigación, experiencias de aula y documentos teóricos que tienen en común el constructivismo y la aplicación pedagógica de sus principios para mejorar la comprensión de un concepto geométrico particular, el del área, implementando el trabajo en grupo (trabajo en colaboración) y el uso de recursos informáticos y, específicamente, del programa Cabri-Geometry. Inicialmente haré explícitos los principios constructivistas que tendré en cuenta durante la revisión. En segundo lugar presentaré informes que revelan las estrategias de solución que utilizan las personas para enfrentar problemas matemáticos y las formas como acuden a herramientas tecnológicas en el proceso. Seguiré con informes y documentos que hablan sobre las ventajas del trabajo colaborativo en la solución de problemas y el desarrollo del conocimiento. Luego presentaré documentos que mencionan los beneficios de involucrar software en el aula de matemáticas. Continuaré con informes de investigación que revelan la importancia del programa Cabri-Geometry en el desarrollo de conceptos matemáticos y finalmente presentaré documentos sobre las dificultades de los niños en el aprendizaje del concepto de área y la conveniencia de diseñar actividades para superarlas.

Constructivismo y aprendizaje colaborativo

Los principios constructivistas caracterizan el aprendizaje como un proceso que ocurre en quien aprende, debido a su propia acción en contexto y con los demás. Piaget (1970) fue el primero en definir el desarrollo cognoscitivo como un proceso gradual de construcción de conocimiento por parte del sujeto a partir de la experiencia. Para este autor el aprendizaje es un proceso que ocurre en la interacción del sujeto con los objetos y con el medio. Vygotsky (1978) también considera el aprendizaje como un proceso, pero para él, éste ocurre en la interacción del sujeto con otros, con el lenguaje y los objetos como mediadores. Esto es, presenta al ser humano como un aprendiz social. Llama al potencial de desarrollo mediante la interacción con los demás Zona de Desarrollo Próximo y la define como la distancia entre la capacidad de resolver independientemente un problema y la potencial de resolver otros en colaboración de socios de aprendizaje más avanzados. Se aprende, entonces, bajo la guía de un adulto o en colaboración con iguales más capaces.

El trabajo en colaboración es una práctica pedagógica que se basa primordialmente en el principio constructivista descrito anteriormente. Este tipo de trabajo constituye un proceso de negociación y discusión entre pares que favorece la argumentación y sustentación de ideas (Rogoff, 1993). De esta manera, se espera que en el intercambio de ideas entre pares, quienes hablan organicen e integren ideas a medida que hablan y quienes escuchan reciban información que les permita construir ideas nuevas (Bruffe, 1999). Al respecto, Savery y Duffy (1996) sostienen que los otros son fuente de puntos de vista diferentes a los propios que los retan, y sirven, así como fuente de confusión, también de estímulo para nuevos aprendizajes. Al parecer, la manera como actúan los estudiantes y verbalizan estas actuaciones permite establecer qué aprenden y qué están aprendiendo.

En otras palabras, es posible establecer la comprensión que sobre un concepto están logrando los estudiantes y cómo avanzan por medio de desempeños que además les permiten verbalizar su comprensión. Esta afirmación está basada en

Perkins (1997), quien establece que la comprensión se presenta cuando la gente puede pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que sabe. Este autor también manifiesta que para apreciar la comprensión de una persona en un momento determinado, conviene pedirle que resuelva un problema, que construya un argumento o arme un producto, esto es, que ponga su comprensión en juego por medio de desempeños. Además, añade que lo que los estudiantes responden no sólo demuestra su nivel de comprensión actual sino que lo más probable es que los haga avanzar. Desde este punto de vista, la discusión en grupo en la solución de un problema matemático puede hacer parte de un desempeño o conjunto de desempeños que manifiestan diferentes niveles de comprensión de los integrantes, además de la construcción de una comprensión más compleja por parte de cada uno.

Establecer cómo enfrentan problemas matemáticos las personas, tanto individualmente como en colaboración con iguales, y comparar las actividades que realiza la gente común, los estudiantes de matemáticas y los expertos matemáticos al hacerlo, fue el interés de una investigación efectuada por Brown, Collins & Duguid (1989) en Inglaterra. Los investigadores observaron que existe gran similitud entre las actividades que emprende la gente común y las que realizan los expertos para solución de problemas. Hallaron, por ejemplo, que la gente común razona en términos de relaciones causales y los expertos con modelos de la misma naturaleza, y que ambos grupos intentan producir un significado negociable y una comprensión socialmente construida. La diferencia está en los estudiantes de matemáticas, quienes intentan producir significados fijos y respuestas únicas. Según los investigadores, esta semejanza resalta la importancia de hacer énfasis en el uso de estas estrategias durante la solución de un problema en clase de matemáticas. Describen el aprendizaje ideal de las matemáticas como una práctica que se desarrolla dentro de una comunidad en constante interacción.

Teniendo en cuenta estos resultados, Santos (1997) efectuó una investigación de características similares con estudiantes de secundaria y estudiantes de maestría, pero centró su atención en la manera como los sujetos recurrieron en este proceso a diferentes herramientas tecnológicas y seleccionaron de forma natural aquellas que les brindaban mayor información para la resolución del problema. Santos corroboró la similitud de los grupos en las estrategias para enfrentar el problema, y, además, encontró que los estudiantes acudían a diferentes herramientas tecnológicas como la calculadora algebraica, dependiendo de la utilidad que encontraran en ellas y aún sin conocerlas completamente. Así mismo, observó que los estudiantes interactuaban con otros en la solución de problemas, de manera que compartían diferentes métodos que podían ayudarles a resolverlos. Vio que analizaban su pertinencia, evaluaban su potencial particular o general y de allí pasaban a determinar la importancia de una herramienta en la solución.

Un estudio desarrollado por Solomon, Watson, Deluchi, Schaps y Battistich (1998), muestra que al interactuar con otros en la solución de un problema, los estudiantes desarrollan una mayor disposición para ayudar al otro, más autonomía y autocontrol, más responsabilidad y sentido de pertenencia a un grupo. Estos resultados, según un estudio realizado por Johnson D. y Johnson R. (1989) en los Estados Unidos, son algunas de las evidencias que muestran que el trabajo colaborativo comparado con los métodos competitivos e individualistas genera relaciones más positivas en los alumnos. Otras evidencias de este hecho son el incremento del espíritu de equipo desarrollado por los estudiantes, relaciones solidarias y comprometidas y el respaldo personal y escolar. Este respaldo que se da en los grupos que trabajan en colaboración es importante porque permite a sus integrantes evaluar su propia comprensión y examinar la de otros, de tal manera que este tipo de trabajo se convierte en un mecanismo para ampliar la comprensión individual sobre temas o fenómenos particulares (Savery & Duffy, 1996).

Una investigación, cuyos resultados respaldan las afirmaciones de Savery y Duffy, es la efectuada por Johanning (2000) para entender cómo es el razonamiento de los estudiantes en la escuela cuando enfrentan un problema en forma individual y luego en grupos pequeños. En esta investigación se concluye que el conocimiento desarrollado por los estudiantes y su seguridad para expresar dichos conocimientos mejora a raíz de la interacción con los otros. De acuerdo con Bruffe (1999), es posible que esto ocurra porque en la interacción, el debate y la negociación con pares se aprende a analizar críticamente y a vivir con las diferencias de opinión. Otro estudio que muestra cómo al trabajar con pares los estudiantes adquieren más habilidad para discutir y explicar sus razonamientos, realizado en la Vienna International School (VIS), concluyó que los estudiantes aprenden a manejar diferentes formas de representación y desarrollan más conciencia de sus fortalezas y debilidades. Adicionalmente incrementan la apreciación por el proceso de evaluación, ya que el trabajo de cada grupo no sólo es evaluado por el profesor sino por otros grupos. Torres, (2001).

Software en la enseñanza de las matemáticas

Una experiencia de aula de Campistrous y López (2001), con estudiantes de secundaria de 15 y 17 años, los obligó a enfrentar problemas matemáticos de manera individual y a contrastar luego su solución con las de otros. El objetivo primordial de esta intervención fue mostrar el carácter heurístico de la calculadora algebraica. En otras palabras, se deseaba verificar que este instrumento computacional, caracterizado por tener software de geometría dinámica y tratamiento algebraico, puede ser una herramienta importante para ayudar a solucionar problemas. Los autores manifiestan que los estudiantes acuden de manera natural a la calculadora algebraica al enfrentar problemas, dada la posibilidad que tienen de manipular los objetos que aparecen en pantalla. Esta afirmación coincide con la hecha en varios trabajos teóricos de Moreno (2001), quien manifiesta que los objetos virtuales que aparecen en la pantalla pueden ser manipulados de tal manera que se genera una sensación de existencia casi material.

Es por esta razón que Balacheff y Kaput (1996), habían asegurado con anterioridad que las herramientas computacionales han generado un nuevo realismo matemático. Los supuestos teóricos propuestos por estos investigadores fueron tenidos en cuenta en un trabajo de investigación desarrollado por Cedillo (1999), cuyo objetivo primordial fue establecer que la calculadora algebraica, a diferencia del lápiz y papel, permite una retroalimentación inmediata al estudiante porque no sólo puede usarla para registrar expresiones algebraicas, sino para obtener de manera casi inmediata el valor numérico específico de una variable o para construir tablas y gráficas necesarias para exploraciones subsiguientes. Los resultados que obtuvo lo llevaron a afirmar que involucrar la calculadora programable en el aula daba origen a que los estudiantes abordaran las actividades planteadas mediante estrategias no convencionales que generaban al seguir sus propias formas de razonamiento.

Estas mismas ventajas de incorporar el software en la enseñanza de las matemáticas son consideradas por Laborde (1998) en un estudio sobre la enseñanza de la noción de variación con geometría dinámica, con base en una investigación anterior suya que reveló la dificultad que tienen los alumnos para lograr pasar de lo espacial a lo teórico, construir objetos variables por medio de funciones (no solamente con la ayuda de informaciones visuales que toman del dibujo) y razonar sobre un objeto variable y no sobre un caso específico representado. Consideró como hipótesis que esta dificultad se reduce cuando se involucra el software de geometría dinámica Cabri Geometry. Laborde observó cómo este software se constituyó en una ventana hacia las concepciones de los alumnos, pues ayuda a la exteriorización de su pensamiento gracias a que permite gran cantidad de acciones y experimentos, más ricos en posibilidades que el papel.

Santos (2001) también exploró la mayor cantidad de posibilidades que ofrece el software Cabri Geometry sobre el papel, en la enseñanza de conceptos geométricos. Observó que, gracias a la posibilidad que brinda el software de manipular los objetos geométricos, su uso ayudó a los estudiantes a definir estos objetos según sus propiedades, a diferencia de lo que sucede con lápiz y papel, que no dejan identificar claramente invariantes. La posibilidad de observar invariantes resultó fundamental, tanto para el desarrollo de conjeturas por parte de los estudiantes, como en el proceso de argumentación y comunicación de esas conjeturas. Esto, según el investigador, supera muchas de las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de conceptos geométricos.

Aprendizaje del concepto de área

Las dificultades en la comprensión de conceptos específicos han sido objeto de discusión teórica y también de investigación entre personas interesadas en el aprendizaje de las matemáticas. Hart (1984) por ejemplo, encontró que el error más frecuente que presentaban los niños estaba asociado a la confusión entre área y perímetro. En muchos de los casos calculan el área y el perímetro y le asignan el dato mayor al área y el menor al perímetro. Otra dificultad que observó es que los estudiantes no asociaban fácilmente figuras de diferente forma con la misma área, de modo que no manejaban la conservación del área. Este hecho lo había observado con anterioridad Hutton (1978), quien en un estudio realizado a un grupo de 48 de niños de 11 años encontró que un tercio de ellos fueron incapaces de conservar el área sistemáticamente.

Algunas dificultades se asocian con la medida del área. Éstas se deben en la mayoría de los casos, según trabajos de Del Olmo, Moreno y Gil (1993), a metodologías que no tienen en cuenta el uso de los sentidos para manejar atributos de superficie y que se reducen al uso de instrumentos de medida convencionales, que generan elecciones poco afortunadas para medir, como la de usar la regla para medir la longitud de una curva. Además, establecen que también se presentan dificultades en la comprensión del área cuando se plantean a los estudiantes problemas que contienen datos erróneos o no reales o en donde sólo se calcula la medida de figuras regulares. De igual manera, consideran erróneo como tratamiento metodológico de la medida abusar de la medida exacta y confundirla con la medida entera. Los autores afirman que si se tienen en cuenta en el diseño de actividades para desarrollar el concepto de área principios de autonomía en la construcción del conocimiento, como los establecidos por Piaget y Vygostky, los estudiantes tendrán menos dificultades en la comprensión real del área. Así mismo, estos investigadores proponen un proceso para la enseñanza del concepto de área, el cual está estrechamente relacionado con la comprensión del concepto de medida. Por esta razón sugieren que inicie con la percepción de la cualidad, luego la comparación de la superficie, la artimetización y finalmente la estimación.

Innovación pedagógica

A partir de los informes de investigación, las experiencias de aula y los documentos teóricos que he presentado en esta revisión, parece claro que la efectividad de una intervención en el aula para el aprendizaje matemático, y en particular para la comprensión de conceptos geométricos, puede relacionarse con el diseño pedagógico de actividades consistente con principios constructivistas. La literatura indica la conveniencia de plantear a los estudiantes problemas que generen diversas estrategias para resolverlos y la necesidad de acudir al software de manera natural. Así también, parece que introduce a la discusión en grupo de las diferentes estrategias utilizadas para resolver un problema y de las formas y ventajas de utilizar el software, como aspectos que pueden generar ambientes propicios de aprendizaje. Aunque los documentos revisados no presentan explícitamente prácticas pedagógicas que busquen el desarrollo de conceptos específicos teniendo en cuenta todos los aspectos descritos anteriormente, parece que la resolución de problemas, el trabajo en colaboración y programas como el Cabri-Geometry pueden establecer diferencias importantes en la comprensión de algunos conceptos de la geometría y que vale la pena diseñar una intervención con estas características para desarrollar dicha comprensión.

Considerando lo anterior, diseñé una intervención en el aula que cambió mis clases de geometría, en esencia las dedicadas a trabajar el concepto de área. Este cambio se enfocó en el planteamiento de una serie de problemas para que los estudiantes aprendieran aspectos del concepto de área. Esto se evidenció en la consideración del principio de los desempeños auténticos (Boix Mansilla y Gardner, 1997; Ordóñez, 2004) que son los desempeños propios de especialistas de disciplinas que las practican o utilizan en el mundo real o aquellos que se reconocen al analizar los problemas y modos de pensar propios de la vida diaria que mejor pueden constituirse tanto en medios como en objetos de aprendizaje de diferentes disciplinas. Asociado a este principio está la concepción de compresión establecida por Perkins (1997). Estos problemas se dividieron en dos grandes grupos: Adoquines en el parque Tercer Milenio y Casos de Peritaje.

Los problemas que están bajo estos dos grupos siguen, aunque no de una manera lineal, las propuestas de Del Olmo, Moreno & Gil (1993) para la adquisición del concepto de área. Esto es, permiten a los estudiantes percibir la cualidad de área distinguiéndola de otras cualidades que tienen los objetos; les permiten reconocer de manera cualitativa figuras de diferente apariencia y con menor o mayor área por medio de comparaciones directas (de si una figura es parte de otra) o indirectas (después de aplicar transformaciones de romper y rehacer); permiten aplicar congruencias y otras transformaciones conservando el área y actividades de cálculo de área sin que sea imprescindible realizar mediciones. Así mismo, permiten que los estudiantes elijan una unidad de medida para la medición de áreas. Allí los estudiantes podían acudir al uso de unidades arbitrarias (piezas pequeñas congruentes de cartón) y analizar algunas que no valgan como unidades de medida (silueta de la mano). Algunos de estos problemas requieren de la aritmetización (obtención de una fórmula para el cálculo del área) y otros necesitan de la estimación, pues resulta muy difícil la medición directa.

Otra característica de la innovación es que los estudiantes enfrentaban algunos de los problemas, primero de manera individual y luego en grupos conformados por tres estudiantes. En general los grupos trabajaron en colaboración para enfrentar la totalidad de problemas desarrollados a lo largo de la intervención. Esto es, tuve en cuenta que el sujeto aprende a través de la interacción con el objeto (Piaget, 1970) y la interacción con otros (Vygotstky, 1978). De igual manera, algunos de los problemas requerían que los estudiantes generaran estrategias para enfrentarlos acudiendo al software Cabri-Geometry en donde analizarían la utilidad del mismo. Estaba previsto que durante el desarrollo de la innovación se haría recolección de datos que permitieran responder las siguientes preguntas:

Preguntas de investigación

1. ¿Qué aspectos del concepto de área comprenden las estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital Técnico Menorah con una práctica pedagógica que tenga como base principios constructivistas?
2. ¿Cómo manifiestan las estudiantes la comprensión de estos aspectos del concepto de área?
3. ¿Qué aporta el trabajo en colaboración a la comprensión detectada de los diferentes aspectos del concepto de área en estos estudiantes?
4. ¿Qué aporta el software Cabri - Geometry a la comprensión detectada de los diferentes aspectos del concepto de área en estos estudiantes?

Metodología

Para dar respuesta a estas preguntas desarrollé mi investigación en la Institución Educativa Distrital Técnico Menorah, institución femenina de carácter oficial ubicada en la zona 14 de Bogotá. Seleccioné esta institución porque en ella me permitieron desarrollar la innovación pedagógica que diseñé y conté con la aceptación y colaboración de los directivos y los docentes del área de matemáticas que laboran allí. Trabajé con las estudiantes del curso 902 de la jornada de la mañana, porque el concepto de área se trabaja con mayor contundencia en este grado según el currículo de matemáticas de la institución. Esto me permitió llevar a cabo mi propuesta sin generar traumatismos por cambios de contenidos o modificaciones del programa de estudios. El número de estudiantes fue de 33 niñas, cuyas edades oscilaban entre los doce y catorce años con las cuales trabajé a lo largo de un bimestre académico cuatro horas a la semana. Durante este bimestre las 33 estudiantes fueron divididas en grupos de 3 niñas, los cuales una vez conformados, se mantuvieron a lo largo de la intervención. Estas estudiantes conocieron de manera general los objetivos de mi investigación y la manera como emplearía los datos obtenidos.

Recolección de datos

Esta investigación fue en esencia de carácter cualitativo, aunque unos datos obtenidos a partir de la aplicación de un instrumento de indagación fueron de carácter cuantitativo. Para responder la primera pregunta recogí datos por medio de un instrumento de indagación que permite determinar los aspectos comprendidos por los estudiantes sobre el concepto de área. Bohórquez, L. Apliqué este instrumento en dos momentos distintos durante el bimestre: el primero y el último día de clases con el propósito de determinar cambios entre las comprensiones sobre el concepto de área que las estudiantes tenían antes de iniciar la intervención y los aspectos que sobre este concepto lograron comprender al finalizar la misma.

Para responder la segunda pregunta utilicé dos métodos de recolección de datos: el primero consistió en grabar las discusiones que sostuvieron doce estudiantes al interior de cuatro grupos al resolver los problemas asignados durante el bimestre de clases.

El segundo método consistió en recoger los trabajos que surgieron como producto de las soluciones que las estudiantes presentaban a los problemas. Además de utilizar los datos obtenidos de las grabaciones de las discusiones de los grupos de trabajo, recogí datos a través de entrevistas no estructuradas. Estas entrevistas las efectué a diferentes estudiantes durante el desarrollo de las clases para responder a la tercera y cuarta preguntas.

Análisis de datos

Para contestar la primera pregunta sobre los aspectos del concepto de área que comprendían las estudiantes, asigné cero puntos a las respuestas incorrectas y cinco puntos a las correctas. Esta convención me permitió obtener promedios por pregunta tanto en el momento inicial como en el momento final de aplicación del instrumento. Las diferencias estadísticamente significativas entre los promedios de los puntajes obtenidos por las estudiantes en cada pregunta las determiné por medio de la prueba t. El valor de la probabilidad (p), que aparece al final de la tabla 1, representa el margen de error de las pruebas de nivel estadístico; el grado de confiabilidad de los datos corresponde al complemento de la probabilidad ((1 – p) * 100). Los valores que he registrado de la prueba t, asumen el estándar empleado en estadística para grados de confianza de 90% (p = 0,1), 95% (p = 0,05) o 99% (p = 0,01).

Del proceso de construcción de categorías, (Bohórquez, L), se obtuvieron las siguientes:

Categoría 0. En esta categoría se ubicaron las estudiantes que no reconocen ninguna de las características de la cualidad de superficie.

Categoría 1. Percepción. En esta categoría las estudiantes diferencian la superficie de una región poligonal de otros atributos. Se encontró en esta categoría dos tipos de estudiantes: aquellas que además de identificar el área admitan la conservación de la misma y aquellas que no. Así, esta categoría se dividió en dos:

- *Categoría 1P. Identificación. Las estudiantes que se encuentran en esta categoría identifican la superficie de una región, pero ignoran las unidades fraccionadas que cubren una figura y si reconocen fracciones de la unidad, sólo tienen en cuenta aquellas que forman una unidad. También es posible que no mantengan la unidad de medida o que si la mantienen cubran parcialmente las figuras planas en donde no sea necesario fraccionarla.*

- *Categoría 2P. Conservación. Además de cumplir con las características de la categoría 1P, las estudiantes admiten la conservación de áreas frente a ciertas transformaciones como rotaciones, traslaciones, romper y rehacer.*

Categoría 2. Comparación. En estas categorías se encuentran las estudiantes que están en capacidad de comparar objetos que comparten la misma área. Esta categoría está dividida en dos subcategorías:

- *Categoría 1C. Comparación Cualificada. Las comparaciones se hacen sin recurrir a unidades de medida, simplemente por pura observación y tanteo. Usualmente las estudiantes comparan correctamente con términos relacionales "más que", "menos que" y "tanto como".*

- *Categoría 2C. Comparación Cuantificada. Las comparaciones ya no se hacen en términos relacionales generales, sino que adoptan criterios que emplean relaciones como el doble, el triple, la mitad, etc.*

Categoría 3. Medida. Las estudiantes acuden a criterios más precisos para comparar las áreas de las figuras, pues escogen una cantidad fija, denominada unidad de medida. Así mismo cuentan las fracciones de la unidad que cubren una figura. De igual forma construyen figuras *que tengan el doble, el triple de una unidad dada o de otra figura. Esta categoría se divide en dos subcategorías:*

- *Categoría 1M. Iteración, en donde las estudiantes mantienen las características descritas anteriormente.*
- *Categoría 2M. Superposición, en donde las estudiantes, además de lo anterior definen o construyen una unidad de medida conveniente para comparar el área de dos figuras.*

Categoría 4. Aritmétización. Las estudiantes son capaces de asociar de manera conciente el área de una figura regular con la longitud de los lados. En otras palabras, pueden deducir una fórmula que les permita calcular el área de una figura.

Categoría 5. Estimación. Las estudiantes realizan juicios subjetivos correctos y apropiados sobre la medida del área de algunas figuras sobre todo cuando es muy difícil calcularla de manera directa.

Las categorías descritas anteriormente también las utilicé para la segunda pregunta de mi investigación. De igual manera, busqué la respuesta a la tercera pregunta a partir de tales categorías: una adicional denominada cambios de concepciones por interacción y las entrevistas a algunas estudiantes donde pregunté directamente por su opinión sobre el trabajo en colaboración. Además, a partir de estas categorías asociadas con la categoría cambios por el trabajo con software, encontré información en las discusiones al interior de los grupos que me permitió responder la cuarta pregunta de investigación, la cual contrasté con las respuestas de las estudiantes a las preguntas de las entrevistas que indagaban por este aspecto.

Resultados

El análisis estadístico de cada uno de los puntos del instrumento de indagación muestra que las estudiantes del curso comprendieron aspectos como la percepción, medida, aritmetización y estimación del concepto de área al finalizar la intervención. El análisis de las grabaciones y de los trabajos escritos de las estudiantes muestran que las mismas manifiestan la comprensión de los aspectos del concepto de área como percepción, medida, aritmetización y estimación suya a través de las estrategias que establecen al enfrentar los problemas. Así mismo, el análisis de estas grabaciones contrastado con el análisis de las entrevistas mostró que el trabajo en colaboración hace que las estudiantes se familiaricen y discutan sobre los aspectos del concepto de área y, finalmente, estos análisis permitieron establecer que el software aportó en el fortalecimiento de un aspecto del concepto de área, básicamente el de la conservación.

Sobre los aspectos del concepto de área que comprenden las estudiantes
En respuesta a la primera pregunta de investigación, la Tabla 1 muestra los promedios de los resultados obtenidos por las 33 estudiantes en cada uno de los puntos del instrumento de indagación aplicado al inicio y al final de la intervención. De igual manera presenta los resultados de la prueba estadística t de Student.

Tabla 1. Estadísticas y pruebas t para el instrumento de indagación.

Preguntas	Inicial	Final	t student	
1 Conservación	3,939394	4,242424	0,640264	
2 Percepción	2,727273	3,333333	1,015505	*
3 Conservación	4,242424	3,939394	0,640264	
4 Medida	0,909091	2,575758	3,033226	***
5 Comparación	0,909091	1,060606	0,309726	
6 Aritmetización	0,909091	1,818182	1,693979	*
7 Medida	1,818182	3,030303	2,031010	**
8 Medida	0,606061	2,424242	3,499632	***
9a Medida	3,030303	4,545455	3,070598	***
9b Medida	0,151515	1,969697	4,034101	***
9c Medida	0,303030	0,909091	1,535299	*
9t Medida	0,000000	0,454545	1,816590	*
10 Comparación	2,058824	2,352941	0,489956	
11 Estimación	0,617647	2,235294	3,417879	***
12 Aritmetización	1,382353	1,676471	0,558960	

* $p < 0,10$ ** $p < 0,05$ *** $p < 0,01$

En la tabla anterior se muestra que existe una diferencia estadísticamente significativa entre los promedios de los resultados obtenidos por las estudiantes en siete de las preguntas del instrumento aplicado al iniciar el curso y al finalizar el mismo, con resultados más altos en el final. Estas preguntas donde se observan resultados más altos están asociadas a los aspectos de percepción, medida y aritmetización del concepto de área.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, al parecer los aspectos que comprendieron las estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital Técnico Menorah son los de percepción, medida y estimación.

Cómo manifiestan las estudiantes la comprensión de estos aspectos del concepto de área

El análisis de los datos a partir de las grabaciones de las discusiones al interior de los cuatro grupos a los que hice seguimiento durante el bimestre de clase, arrojó información que me permitió establecer que en el primer problema denominado "Adoquines en el parque Tercer Milenio", en donde se debe determinar el número de baldosa necesarias para cubrir completamente un terreno plano e irregular, nueve (9) de las estudiantes se encontraban en la categoría 0 de comprensión del concepto de área. Manifestaciones de este hecho se encontraron en conversaciones como la siguiente:

Estudiante 18 (2). ...este terreno no tiene cara de nada...
Estudiante 25. No se preocupe no ve que nos dan tres datos, pues fácil los sumamos y ¡listo!
Estudiante 18. Ah, pero creo que no debemos sumar, creo que debemos multiplicar dos de los tres.
Estudiante 1. O sea... digamos... ¿que sacamos el área?
Estudiante 18. Sí, pero entonces multipliquemos los números más grandes que nos dan, yo recuerdo que hacía eso hace años.

En esta conversación observé que las niñas consideraban que multiplicar cualquier par de números les permite hallar el área de la figura sobre la cual están trabajando. Otras manifestaciones que dan muestra del nivel de comprensión de las estudiantes se encuentran en la conversación de otro grupo:

Estudiante 33. ¿Bueno qué vamos a hacer?
Estudiante 19. ...pues, aquí no entiendo muy bien qué es lo que toca hacer...como que aquí dan una grafica y uno lo que hace es poner baldosas sobre ella hasta taparla.
Estudiante 25. Bueno eso sería como lo que están haciendo afuera ¿cierto? [En la institución están colocando baldosa en los pisos del patio].
Estudiante 33. Si, entonces es fácil sumamos los laditos y sabemos cuántas van
Estudiante 19. Y cómo sabemos el valor de los laditos, no ve que no hay
Estudiante 33. Pues nos los inventamos, por eso no nos los dan.

En el diálogo anterior las manifestaciones de las estudiantes dan muestras de no tener claridad sobre el concepto de área, pues consideran que la suma de los lados de la figura les permite hallarla, esto es, confunden perímetro con área. El análisis de los trabajos escritos entregados por las estudiantes en esta sesión establece que sólo tres niñas están en la categoría 1P, las demás dan respuestas similares a las presentadas en los diálogos anteriores o simplemente escriben que ese problema no se puede resolver. En la fase final de este problema, después de tres sesiones de clase en donde se analizaron las condiciones del mismo y se socializaron las diferentes soluciones, las conversaciones de los grupos sobre sus nuevas estrategias de solución del problema dan muestras de cambios en las concepciones de las estudiantes. Este hecho se observa en el diálogo siguiente:

Estudiante 25. Bueno nos toca averiguar el área para saber la cantidad de baldosas que se necesitan.
Estudiante 19. Bueno y cómo la averiguamos.
Estudiante 25. Una de las maneras para encontrar el área es...es...¿con una regla?...No esperen podríamos tratar de volver esta figura en una figura regular.
Estudiantes 33 y 19. Nena no hay necesidad de volver la figura en una figura regular.
Estudiante 33. Más bien dividimos las figuras en figuras fáciles de medir.
Estudiante 25. Pues dividamos en cuadritos y triángulos como hizo Nata.
Estudiantes 19 y 33. Sí, pero mejor los cuadritos completos.
Estudiante 25. Sí

En esta conversación las manifestaciones de las estudiantes dan muestras de que reconocen la cualidad de área. En el trabajo entregado por ellas, observé que en realidad no dividieron la figura sino la cubrieron con cuadros, pero ignoraron las fracciones de los mismos. Estas manifestaciones y acciones hacen que puedan ser ubicadas en la categoría Identificación 1P. En general las estrategias establecidas tanto en los diálogos como en los trabajos escritos entregados por 10 grupos tienen características similares a las expuestas anteriormente. Esto es, las estudiantes identifican la superficie de una región, pero ignoran las unidades fraccionadas. De esta manera, 30 estudiantes quedaron ubicadas en la categoría 1P.

Otro problema que enfrentaron las estudiantes en la intervención se denominó *La herencia de los hermanos* Torres. En este problema, las estudiantes debían comparar las áreas de tres terrenos de forma irregular y decidir si eran iguales o no. La decisión debía estar sustentada con el proceso que consideraran conveniente utilizar. En esencia, el problema buscaba que las estudiantes comprendieran que era posible comparar áreas cualitativa o cuantitativamente, y que estas comparaciones podían estar acompañadas de la medida. Considero conveniente aclarar que las estudiantes enfrentaron el problema en primera instancia de manera individual y luego lo trabajaron en colaboración con sus grupos.

En la primera sesión, donde las estudiantes enfrentaron este problema, las manifestaciones que se observaron en las conversaciones y en los trabajos escritos eran muy similares a las expresadas en la fase final del problema "Adoquines en el parque Tercer Milenio", y por esto se mantenían en la categoría de identificación 1 P. Sin embargo, en la tercera sesión de trabajo sobre este problema, las estudiantes en sus diálogos hacen referencia a la utilidad de comparar las áreas de las figuras con una unidad de medida, incluyendo las fracciones de la misma, lo cual las ubicaría en la categoría de iteración 1M. Al contrastar con los trabajos escritos se observa que otros tres grupos establecen las mismas estrategias, de esta forma se obtuvo que veintiún (21) estudiantes se encontraban en la categoría de iteración 1M. Un ejemplo de discusión al interior de un grupo donde se aprecian las manifestaciones de las estudiantes con relación a esta categoría es el siguiente:

Estudiante 24: ... bueno como la figura... no tiene medidas, entonces yo cogí el primer terreno que es el lote de Evaristo como un cuadrado, y pues la medida que yo le saco es 20 cm. Entonces..., bueno suponiendo que..., que éstos dos lados valen 9,3 cm entonces... y el otro es 8,4 cm. ya... Eso yo lo tomé como una medida de cada lado ¿sí' y para saber más o menos, pues el área. Entonces cogí las..como cuadrículas y conté. Entonces voy a equivaler esto: 9,3 cm. equivalen a tantas cuadrículas... si pero más o menos.

Estudiante 22: Yo iba a hacer el de el cuadrado, pero me pareció más fácil hacer un rectángulo (Estudiante 24: ¡No!, pero es que tu estás haciendo la segunda parte) ah... entonces tu haces la primera y yo la segunda.

Estudiante 27:... Yo cogí e hice lo mismo que Gina tomé el cuadradito y el número de cuadritos. Entonces yo cogí conté los cuadrados que estaban completos...entonces cogía los que estaban completos y los fui contando hasta formar un buen grupo de los que estaban (Estudiante 2: De los que estaban más o menos) los juntaba para formar de a uno.

Estudiante 22: Yo estaba pensando en cada figura. ¿Con la figura es necesario trabajar con el cuadrado?... medimos cuadrito por cuadrito con figuras más pequeñitas o sea en está parte. Entonces yo haría lo de los cuadritos con cada una de las figuras ¿no?

Estudiante 24: Natalia, ¿cuál es la tuya al fin?

Estudiante 22: Es que estoy haciendo la de Gonzalo, o sea sería hacer lo mismo con cada una, pues... cojamos y cada una, pues lo parte ¿listo?, o sea cogemos aquí las cuadrículas del cuaderno y las partimos (Estudiante 3: en la mitad de cada cuadrito), ajá le sacamos y luego empezamos a contar cuadrito a ver... luego pasamos a contar ¿bueno?...

Estudiante 24:...pero Natalia vamos a hacer esta figura...

Estudiante 24: Natalia, una pregunta: ¿Para, para qué lo estás midiendo?

Estudiante 27: para que nos quede más fácil.

Estudiante 22: Es que lo nosotras tenemos pensado es...coger mira se ves que esto esta cuadriculado, entonces vamos a empezar... Como no nos dan medidas vamos a coger y a dividirlo por cada cuadrito ¿sí? O sea vamos dividirlo en cuadritos, o sea bien pequeñito con eso al final contamos y más o menos para determinar...o sea cómo va a hacer nuestra unidad de medida para determinar cuál es más grande si son iguales, pequeños ¿si?, porque es que mira en estas partes que son muy irregulares, pues nos va a quedar muy difícil decir, decir con el cuadrito completo o sea si son o no porque de todos modos... ¿si? ¿Cierto?

Estudiante 27: Dividimos los cuadritos en cuadritos...

Estudiante 24: ¿Cuándo terminemos de dividir las...los cuadritos los contamos en total? (Estudiante 27: Contamos los que están completos y luego sus partes).

Cuando las estudiantes manifiestan que deben elegir o construir una unidad de medida conveniente para comparar el área de dos figuras están comprendiendo un aspecto asociado a la medida del área denominado superposición. Estas manifestaciones se dieron a raíz de las comparaciones que hicieron las estudiantes para resolver un grupo de problemas denominados "casos de peritaje".Esto se muestra en la siguiente conversación:

Estudiante 27. En este momento podemos averiguar el área de las dos figuras utilizando un cuadrito como unidad de medida.
Estudiante 24. Si, bien y lo usamos en las dos.
Estudiante 22. Bueno, construyamos el cuadrito y contamos cuantos caben en cada figura.

De acuerdo a los resultados anteriores es posible inferir que la comprensión de aspectos como percepción y medida de área se manifiesta a través de las estrategias que establecen o expresan cuando enfrentan problemas que involucren estos conceptos. Estas estrategias pueden ser: distinguir el área de otras cualidades, distinguir una unidad de medida, reiterar la unidad de medida tantas veces como sea necesario, construir una unidad de medida cuando deseen comparar dos áreas o más.

Sobre los aportes del trabajo en colaboración

En diferentes momentos de la intervención se preguntó a once (11) estudiantes sobre la utilidad del trabajo en grupo en la solución de los problemas y en la comprensión de la temática trabajada: las once coincidieron en afirmar que este tipo de trabajo les permitía contrastar lo que pensaban ellas con lo de sus compañeras acerca de la solución de un problema. Indicaron, además, que se sorprendían al ver cómo entre todas podían generar una buena estrategia de solución a partir de las ideas de cada una:

Estudiante 10. "Mira Ángel cuando nos pusiste el problema de la Herencia, que primero nos tocó solas. Yo...yo...Bueno a mi se me ocurrió una cosa que me parecía loquísima, yo quería dividir los terrenos en figuras iguales, pero no hice nada. Cuando nos pusiste en grupos, les dije mi idea a mis compañeras y entre todas la mejoramos y solucionamos lo de la Herencia".

Otra respuesta que guarda una idea similar es la siguiente:

Estudiante 2. "A mí me ha gustado trabajar en grupo porque definitivamente resolver estos problemas sin escuchar varias ideas es muy difícil, es que uno piensa que algo da y otra dice; no eso no da. Y luego entre todas buscamos algo que funcione. Y claro a veces uno no tiene clara las cosas y es bueno que le expliquen".

Encontré en las grabaciones de las discusiones al interior de los cuatro (4) grupos cambios de concepciones por la interacción. En otras palabras, encontré evidencias que corroboran las ideas expresadas por las estudiantes en las entrevistas sobre cómo la discusión con otras y las explicaciones que reciben por sus pares les permite comprender algunos aspectos del área.

Estudiante 19. Mira lo que yo estoy diciendo es... a ver; si tu tienes un cuadrado es imposible que tengas un triángulo con la misma área. No puedes.
Estudiante 25. ¿Estas diciendo que si tengo un cuadrado y sé el área no puedo tener un triángulo que tenga la misma área?
Estudiante 19. Exacto nena, mira tomas un cuadrado y si haces un triángulo, es como la mitad.
Estudiante 33. Ya está, mira tu tomas estos dos triángulos (Estudiante 19. Si) y si les das la vuelta forman otro triángulo ¿cierto?
Estudiante 19. mmm...no se...si es un triángulo.
Estudiante 25. Ese tiene la misma área del cuadrado.
Estudiante 19. Nooooo, porque no es la misma figura.

Hasta este momento se observa que las estudiantes 25 y 33 comprenden que es posible que el área de una figura se mantenga frente a ciertas transformaciones como rotaciones, traslaciones, romper y rehacer. Por el contrario, la estudiante 19, no. Sin embargo, el trabajo en colaboración permitió que esta estudiante comprendiera este aspecto del área. El diálogo siguiente da muestra de este hecho.

Estudiante 25. No importa que tengan diferente forma, ¿no te diste cuenta que lo que hicimos fue tomar el cuadrado dividirlo en dos y armar el triangulo?
Estudiante 33. Si, pero si quieres calculamos el área de cada una para que veas.
Estudiante 19. Eso estoy haciendo y tienen razón, que lenta no se me había ocurrido algo así nunca.

Sobre el aporte del Cabri-Geometry a la comprensión de diferentes aspectos del concepto de área

Las once estudiantes entrevistadas respondieron que el programa les permitía hacer modificaciones de una figura manteniendo la misma área. Al respecto una estudiante dijo:

Estudiante 23. El programa es chévere porque uno puede mover las figuras y cambiarlas. Como en el problema de las baldosas donde uno podía ver varios diseños que tuvieran la misma área.

Otra respuesta que menciona la utilidad del programa para manipular figuras manteniendo el área constante es la siguiente:

Estudiante 19. La verdad Ángel, a mi el programa me gustó porque entendí eso de la conservación, viste que construí el cuadrado y pude cambiarlo a otra figura. Aunque lo que más *me gustó fue el problema de los diseños, porque yo primero lo hice a mano y pensé que se podían hacer siete distintos, pero con el programa hice un montón.*

En las grabaciones que efectué a los grupos mientras utilizaban el software en la solución de problemas encontré evidencia sobre la importancia del mismo para afianzar la comprensión de la conservación del área. El siguiente diálogo ilustra este hecho:

Estudiante 22. Miren logré construir un cuadrado como el que nos da el problema.
Estudiante 24. Bueno, pues ponle el diseño que hicimos a mano.
Estudiante 27. Si y lo movemos a ver qué pasa.
Estudiante 22.¿Les parece bien éste?
Estudiantes 24 y 27. Ese está bueno, pero cumple con lo que piden
Estudiante 22. Yo creo que sí midamos y lo movemos.
Estudiante 24.Ven yo lo mido y lo muevo.
Estudiante 27. Si ven sólo con mover éste ya tenemos varios diseños y todos con la misma área.

Los resultados anteriores mostraron que el aporte del Cabri-Geometry se centró en la posibilidad de manipular para comprobar invariantes. El aspecto que más se fortaleció con la entrada del software fue el de conservación.

Discusión

Como mencioné con anterioridad, los aspectos del área en los que se apreciaron avances significativos con relación a la prueba inicial fueron los de percepción, medida y estimación, lo cual puede sugerir que la intervención no incidió mucho en la comprensión de este aspecto. Considero que se debió primordialmente a que en la mayoría de los problemas las estrategias establecidas por las estudiantes generaban unidades de medida y con ellas obtenían la solución, lo cual obedeció indudablemente a la irregularidad de las figuras que aparecían en los problemas, así que, precisamente, construir unidades de medida e iterarlas era la mejor opción, pues generar una fórmula posiblemente no sería de utilidad para esos casos. Esto mismo explicaría que el aspecto medida del concepto de área sea precisamente el de mejores resultados en la prueba final.

Por otro lado, algo que observé pero que no reporté como resultado de este estudio es la confianza que desarrollaron las estudiantes para enfrentar problemas (complejos o no); esto probablemente porque toda la innovación estaba basada en la solución de problemas. Así mismo este logro se vio facilitado por el trabajo en colaboración y la discusión entre pares, pues estas discusiones estimulan el conflicto cognoscitivo dando la oportunidad a los integrante de evaluar su propia comprensión y la de sus compañeros y así ampliar la comprensión sobre fenómenos particulares, tal y como lo mencionan Savery y Duffy (1996), particularmente para mi caso, los aspectos asociados al área.

Ahora bien, si reviso los resultados obtenidos con relación al aporte del Cabri-Geometry en la comprensión de los aspectos del área, debo decir que esperaba que el aporte fuera más allá de mejorar la comprensión de la conservación de área. Creo que esto se dio fundamentalmente porque los problemas donde mejor se utilizó el software fueron precisamente aquellos donde se trabajaba este aspecto del concepto. Así mismo, considero que lograr que las estudiantes acudan de manera natural al software en la solución de un problema, tal y como lo menciona Santos (2001), requiere de problemas con características distintas a las que originalmente planteé.

Los resultados obtenidos sugieren que una innovación que tenga como base principios constructivistas y acuda al software es efectiva para permitir que las estudiantes comprendan aspectos del concepto de área. De igual manera, me indican que los problemas a trabajar deben estar diseñados para que su solución permita desarrollar claramente todos los aspectos del área que se desea que las estudiantes comprendan. Particularmente considero que en esta intervención debo fortalecer los problemas asociados a la aritmetización. También los resultados mostraron la utilidad de la importancia del trabajo en colaboración para la compresión de los diferentes aspectos del área, dada la posibilidad de la discución y confrontación entre ellas de las diferentes estrategias de solución.

Agradecimientos.

Agradezco inmensamente a la Doctora Claudia Lucía Ordoñez directora del CIFE universidad de los Andes por sus valiosos aportes y su oportuna y clara orientación en el desarrollo de esta investigación

Notas

(1) Miembro grupo de investigación "De las concepciones a las prácticas pedagógicas" - CIFE- Universidad de los Andes.

(2) El número hace referencia al código de la estudiante en el listado de la institución.

Referencias Bibliográficas

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996).Computer-Based Learning Enviroment in Mathematics. En A.J. Bishop; K. Clements; C. Keitel; J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.) International Handbook of Mathematical Education (469 – 501). Dordrecht: Kluver Academic Publishers.

Brown, J.S., Collins, A. & Duguid, P.(1989) Situated Cognition and the culture of learning. Educational Researcher, 18, 32-42.

Bruffe, K.(1999). Collaborative learning, hiher education, interdependence, and the authory of knowlwdgw. Baltimore, MD: The Johns Hopkins University Press.

Bohórquez, L. (2004). Sobre las formas efectivas de involucrar el Cabri- Geometry en la Enseñanza de Conceptos Matemáticos. Red, 19, 106-112.

Bohórquez, L. (2005) Aprendizaje del Concepto de Área Incidencia del trabajo en Colaboración, la Resolución de Problemas y el Cabri-Geometry en la Comprensión de aspectos asociados al Concepto de Área. Tesis de Maestría en Educación. U. Andes.

Campristrous, L. & López J. (2001). La Calculadora como una herramienta heurística. Revista UNO, 28, 84-99.

Cedillo, T. (1999). Desarrollo de habilidades algebraicas. México: Editorial Iberoamericana.

Hart, K. (1984). Problemas en el aprendizaje del concepto de área. México: Labor.

Del Olmo, M.; Moreno, M.F. & Gil, C.F.(1993). Superficie y Volumen.¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Madrid: Síntesis.

Jaime, A. Gutierrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En: Llinares, S. y Sánchez, M. Teoría y Práctica en Educación Matemática. Sevilla: Alfar.

Johanning, D. (2000). An analysis of writing and post writing group collaboration in meddles school pre-algebra. School science and mathematics, 100, 151 – 160.

Laborde C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in computer-based enviroment. En: C. Mammana & V. Villani (Eds.) Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century. ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publisther.

Ordóñez, C. (2004) Editorial: Pensar pedagógicamente el constructivismo. De las concepciones a las prácticas pedagógicas. Revista de estudios sociales RES. 19, 7-12.

Perkins D. (1997). GAT is Understanding?. En M.S. Wiske (ed.) Teaching for Understanding: Linking research with practice. 39-57. San Francisco: Jossey-Bass

Piaget, J. (1970). Piaget □s Theory. En P.H. Mussen (Ed.). Carmichael's Manual of Child Psychology (Vol.1). New York: Wiley.
Moreno, L. (2001).Cognición, mediación y tecnología. Avance y Perspectiva, 20, 65-68.
Santos, M. (1997). ¿Qué significa el aprender matemáticas? Una experiencia con estudiantes de cálculo. Educación Matemática, 7,46-62.
Santos, M. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. Avance y Perspectiva, 20, 247-258.
Savery J.R. & Duffy, T.M. (1996). Problem based Learning: An instructional model and its constructivist framework. En B. Wilson (Ed.) Constructivist learning environments: Case studies in instructional design (134-147). Englewood Cliffs, N.J: Educational technology publications, Inc.
Torres (2001). Alternative assessment models: Assessment through proup work and the use of CAS as a Self. Assessment Tool. The International Journal of Computer Algebra Mathematics Education; 2001; 8, 1, (61-83).
University Joseph Fourier (1997). Cabri-Geometry. Texas Instruments Incorporated
Vygotsky, L.(1978). Interaction between learning and development. En: Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Construcción y uso significativo del concepto de proporcionalidad
Una experiencia de investigación acción

NIDIA STELLA MARTÍNEZ MELO
COLEGIO CAFAM
JORGE GILBERTO GONZÁLEZ CAMARGO[1]
I.E.D. VIRREY JOSÉ SOLÍS

Introducción

La investigación se desarrolló dentro del programa de Especialización en Educación Matemática de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en el periodo 2004 – 2005.

Nuestras motivaciones iniciales, por una parte, en relación con la metodología de la resolución de problemas para el desarrollo de las clases y la búsqueda de alternativas de respuesta a cómo se aprende a aprender matemáticas y, por otra, lograr iniciar la construcción y uso significativo del concepto de proporcionalidad, constituyeron el punto de partida para el desarrollo de nuestra investigación en la cual fue fundamental la mirada del quehacer en el aula a la luz de teorías, investigaciones y experiencias.

El trabajo lo desarrollamos con una metodología de investigación acción dentro de cuatro ciclos, teniendo en cuenta dentro de cada uno tres componentes que se dieron en forma paralela: referente teórico, reflexión sobre nuestro actuar y diseño de actividades de aprendizaje.

En el ciclo cero, que hemos llamado: "Defiendo un punto de partida", logramos la caracterización del problema y definimos los objetivos de la investigación, centrando nuestro objetivo general en el diseño de actividades de aprendizaje para propiciar la construcción y uso significativo del concepto de proporcionalidad, para lo cual fue necesario tener en cuenta que los estudiantes tienen sus propias estrategias para resolver situaciones de proporcionalidad y por ello la necesidad de definir un objetivo específico dirigido hacia la cualificación de estas estrategias. No siendo suficiente tener en cuenta este aspecto a la hora de diseñar actividades de aprendizaje, vimos también la necesidad de fortalecer nuestras prácticas en el aula, para así mismo alimentar el diseño. Por ello surge un segundo objetivo específico, relacionado con el enriquecimiento de nuestra acción en el aula desde el autoreconocimiento de fortalezas y oportunidades de mejoramiento.

En el ciclo uno, que llamamos: "Acercamiento a un primer diseño", nuestro referente teórico se enmarcó, por una parte, en una mirada epistemológica del concepto de proporcionalidad a partir de las primeras cinco definiciones del libro V de Los Elementos de Euclides y, por otra, en la revisión de algunas consideraciones relacionadas con el aprendizaje de la proporcionalidad (Lesh, Post, Crammer 1998 y Lamon 1994). Este acercamiento teórico, además de los referentes consultados en la definición del problema, fueron constituyendo la luz teórica bajo la que revisamos nuestro actuar. Finalmente, como resultado de este ciclo, obtuvimos un primer diseño que se fue enriqueciendo en el proceso de la investigación acción.

En el ciclo dos, que hemos llamado: "Validando y enriqueciendo el diseño", nuestro referente teórico se enmarcó en la definición de una metodología para el desarrollo de las clases, respondiendo a qué es hacer matemáticas, qué es enseñarla y qué es aprenderla. Con las respuestas que fuimos dando a estas preguntas se enriqueció el diseño en relación con la forma como trabajamos con los estudiantes en la construcción de conocimiento y, para poder analizar en más detalle nuestra acción dentro del aula y la pertinencia o no de la propuesta, surgió la construcción de un proceso de observación.

En el ciclo tres vimos la necesidad de revisar nuevamente el referente tenido en cuenta en el ciclo cero en relación con las consideraciones sobre el aprendizaje de la proporcionalidad, para establecer categorías de análisis que nos permitieran clasificar las estrategias utilizadas por los estudiantes, así como también seguir enriqueciendo la metodología para el desarrollo de las clases, esta vez desde el trabajo propuesto por Brousseau sobre las relaciones maestro – saber – estudiante.

De esto modo, diseñamos un conjunto de actividades de aprendizaje que permitieran propiciar en los estudiantes la construcción y uso significativo del concepto de proporcionalidad. En el desarrollo del presente escrito, el lector encontrará inicialmente la caracterización del problema, seguida de los referentes teóricos tenidos en cuenta para la investigación y, finalmente, los resultados de la investigación.

1. Caracterización del problema

Los pronunciamientos de algunos autores, referidos a las prácticas de las clases de matemáticas, señalan que en muchas ocasiones mostramos a los estudiantes únicamente la manera correcta de solucionar un problema haciendo énfasis en el algoritmo que se utiliza para dar la solución (2), sin detenernos en analizar las relaciones entre los conceptos matemáticos involucrados.

Pareciera que esto se reflejara en los resultados obtenidos por los estudiantes tanto en pruebas nacionales como internacionales. De acuerdo con lo resultados obtenidos por los estudiantes colombianos en el Tercer Estudio Internacional de Ciencias y Matemáticas –TIMSS (3) y las pruebas "Saber" realizadas por el Ministerio de Educación desde 1991, se muestra la necesidad de revisar el tratamiento que se da en las clases a la solución de problemas y específicamente en lo que se refiere a la proporcionalidad. Nuestros estudiantes fueron evaluados en desempeños, procedimientos de rutina, solución de problemas y razonamiento matemático, mostrando un bajo nivel especialmente en estos dos últimos, pues como se afirma en el análisis de estos resultados, seguramente poseen esquemas aislados de operaciones y transformaciones, numerador, denominador, amplificar, simplificar, pero no han asumido el carácter comparativo de la razón.

Al relacionar los resultados de las pruebas que han presentado los estudiantes, específicamente en relación con la resolución de problemas que involucran los conceptos de razón y proporción, con nuestras maneras de actuar en el aula, nuestras concepciones de lo que es la enseñanza de las matemáticas, y lo que desde la teoría y la legislación se espera al señalar como objetivo de la enseñanza de las matemáticas el formar y desarrollar en los estudiantes capacidades de observación, análisis, creación y toma de decisiones para solucionar situaciones problema de la vida cotidiana, se hizo pertinente adelantar una investigación, bajo los principios de la investigación – acción, para buscar mejorar nuestras prácticas educativas en pro de permitir a los estudiantes la construcción de conceptos más sólidos frente a la resolución de problemas que involucran los conceptos de proporcionalidad, es decir, una investigación acción que facilite elementos para responder:

¿Cómo desarrollar en los estudiantes la capacidad para resolver situaciones problema haciendo uso significativo del concepto de proporcionalidad?

2. Referentes teóricos

2.1 Mirada epistemológica del concepto de proporcionalidad

En los primeros cuatro libros de Los Elementos de Euclides, el autor da tratamiento a la relación de igualdad entre los objetos geométricos, pero al llegar al libro V, cambia esta mirada y centra su atención en las magnitudes que aunque no sean iguales, mantienen cierta relación. La manera de abordar el tratamiento de la proporcionalidad en Euclides inicia así:

Definición 1: Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.

En términos modernos la definición 1, quedaría así:

$$\textit{Sea } a, b \textit{ magnitudes, se dice que "} a \textit{ es parte de } b \textit{" si}:$$
$$a < b \ \wedge \ \exists n \in \mathrm{N}, \textit{ tal que } b = na.$$

Definición 2: Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.

En términos modernos la definición 2, queda así:

$$\textit{Sean } A, B \textit{ magnitudes, se dice que "} B \textit{ es múltiplo de } A\textit{" si}:$$
$$B > A \wedge \exists n \in N, \textit{ tal que } B = nA$$

Definición 3: Una razón es determinada relación respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.

Definición 4: Se dice que las magnitudes guardan razón entre sí cuando, al multiplicarse, puedan exceder la una a la otra.

Definición 5: Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda, que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.

En las definiciones 1 y 2, se establecen relaciones particulares entre tamaños de magnitudes, esto en un submundo del mundo de las magnitudes. En la definición 3 se establece cierta relación entre los tamaños de dos magnitudes homogéneas, a la que se le llamó razón, es decir, que esta relación se establece entre dos submundos del mundo de las magnitudes homogéneas, y en la definición 4 se establece una condición de necesidad para que la relación razón se pueda establecer entre dos magnitudes, con la cual se descarta el uso de magnitudes cero o infinitas.

Ahora, en la definición 5, surge una nueva relación, "guardar la misma razón", que puede expresarse como guardar la misma "cierta relación", es decir, esta nueva relación se establece en el mundo de las razones (mundo de relaciones) pero para poder evidenciar la relación "guardar la misma razón" hay que acudir a la relación "ser múltiplo de" entre los cuatro elementos que están relacionados dos a dos mediante razones. Hay que tener claro que la relación "ser múltiplo de" se establece en el mismo submundo, por lo tanto es coherente comparar los múltiplos de la primera y la tercera (que pertenecen al mismo submundo) y los múltiplos de la segunda y la cuarta (que pertenecen al otro submundo, con el que se estableció la relación "razón").

Antes de mirar cómo se acude a la relación "ser múltiplo de" para evidenciar la relación "guardar la misma razón", se hace pertinente aclarar: Los equimúltiplos de dos magnitudes son parejas de múltiplos, donde el primer elemento de la pareja corresponde al n-simo múltiplo de la primera magnitud y el segundo elemento corresponde igualmente al n-simo múltiplo de la segunda magnitud. En otros términos tenemos:

$$M_A = \{x / x = nA, n \in N\}$$
$$M_C = \{y / y = mC, m \in N\}$$
$$Equimúltiplos_{A\,y\,C} = \{z / z = (nA, mC)\, con\, n = m;\ n, m \in N\}$$

Ahora bien, sean A, B, C y D magnitudes, entonces, A guarda con B la misma razón que C con D, si y solo si, los equimúltiplos de A y C resultan mayores, inferiores o iguales que los equimúltiplos de B y D, respectivamente.

En la notación que se usa actualmente, la simbolización de la relación "guardar la misma razón" es: A guarda con B la misma razón que C con D, si y solo sí,

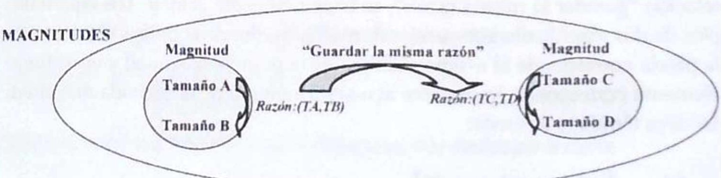
$$\forall m, n \in N,\ (nA > mB) \wedge (nC > mD)$$
$$\vee$$
$$(nA = mB) \wedge (nC = mD)$$
$$\vee$$
$$(nA < mB) \wedge (nC < mD) \vee$$

En esta definición se establece una nueva relación entre cuatro magnitudes, relación que se da cuando se cumple cierta condición entre los equimúltiplos de las magnitudes. La relación "guardar la misma razón" lo que busca es resaltar el hecho que a pesar del cambio en los tamaños de las magnitudes, la relación que se establece entre ellas se conserva, es decir, la razón se mantiene invariante a pesar del cambio en los tamaños de las magnitudes.

Figura 1

Construcción y uso significativo del concepto de proporcionalidad
Una experiencia de investigación acción

Nidia Stella Martínez Melo
Colegio Cafam
Jorge Gilberto González Camargo
I.E.D. Virrey José Solís



2.2 Sobre las estrategias de los estudiantes

Desde el estudio realizado por Lamon (1994), se evidencia la tendencia de los estudiantes por establecer unidades para reinterpretar las situaciones en términos de éstas, configurando así estrategias propias, encontrando además que la habilidad para conceptualizar una situación en términos de grupos, conjuntos y paquetes los capacitó para resolver algunos problemas y para tomar decisiones al escoger la unidad más apropiada con la cual reinterpretar una situación, basados en las condiciones específicas del problema.

Lamon, indagó por las estrategias intra e inter del proceso de normación que son utilizadas por los estudiantes para hallar el término desconocido de una proporción. La estrategia "intra" consiste en encontrar el factor escalar que permite relacionar dos valores dentro de un mismo espacio de medida. La estrategia "inter", por lo contrario, consiste en equiparar dos razones entre espacios de medida distintos estableciendo una relación funcional.

Figura 2

Estrategias Intra

Cantidad de Cuadernos	Precio
4	$2000
12	x

x3 x3

Estrategias Inter

Cantidad de Cuadernos	Precio
4	$2000
12	x

2000 = 500 • 4

F(x) = 500x

6000= 500 • 12

Lamon(1994) encontró también que la preferencia de los estudiantes por estrategias inter e intra es dependiente de las variables de la tarea y que los estudiantes no solamente piensan en términos de unidades sino que también eligen la unidad más apropiada para trabajar la situación.

2.3 El aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas

Al revisar nuestra acción encontramos coherente que nuestros estudiantes alcancen niveles similares a los que muestran las pruebas TIMSS en relación con la debilidad en el uso del concepto de razón, por cuanto la conceptualización es hecha más desde las definiciones y desde un trabajo algorítmico con números. En este sentido, nuestra acción en el aula debe ser enriquecida permitiendo a los estudiantes el desarrollo de situaciones de aprendizaje en las que puedan hacer distintas representaciones de los conceptos matemáticos más allá de las definiciones y ejercicios algorítmicos, que les permita construirlos y usarlos significativamente, relacionando cada vez los nuevos aprendizajes con los que ya se tienen desde el uso de un lenguaje natural. Es así como, desde las reflexiones sobre nuestro actuar, surgió la necesidad de consultar referentes a partir de los cuales tomar posición frente a ¿cómo enseñar matemáticas? Al darnos a la tarea de responderla, encontramos necesario empezar por explicitar qué son para nosotros las matemáticas, qué es para nosotros aprenderlas y enseñarlas.

Asumimos las matemáticas, desde Schoenfeld (1992), como una actividad social propia de las personas en una determinada comunidad, quienes se apropian de unos principios y reglas para observar, recoger y analizar información en búsqueda de patrones poniendo en uso un punto de vista matemático. Aprenderlas implica desarrollar ese punto de vista matemático y enseñarlas debe brindarle al estudiante un ambiente propicio donde tenga la oportunidad de manipular objetos, activar su capacidad mental propia, ejercitar su creatividad, divertirse con su propia actividad mental, reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento, hacer transferencias, adquirir confianza en sí mismo al verse capaz de resolver problemas, Guzmán (1992) y comunicar de manera verbal y escrita los resultados encontrados, en un lenguaje común que se convierte progresivamente en lenguaje matemático.

Para lograr lo anterior, Schoenfeld (1992) propone que la clase de matemáticas debe propiciar en los estudiantes la búsqueda de soluciones, no solamente la memorización de procedimientos o algoritmos; impulsar la exploración de patrones, no solamente la memorización de fórmulas o recetas para utilizar de acuerdo con la instrucción y, finalmente, afirma que la formulación de conjeturas deberá ser una acción fundamental en el proceso de enseñanza – aprendizaje y no únicamente limitar la acción matemática a hacer ejercicios. En este sentido, enseñar matemáticas es brindarle al estudiante la oportunidad de hacer matemáticas desde él, en su contexto real, y desde las situaciones que para él sean problemas.

Los problemas existen en el mundo de cada persona, entendiendo por mundo la concepción que dicha persona tiene de éste. Así, un problema nace en una situación que se presenta en el mundo de la persona para la cual aparece un reto intelectual, entendido éste como una acción que pone a prueba, mediante una pregunta específica, la capacidad de la persona para leer y comprender la situación (escrita o vivida), para determinar los factores influyentes en dichas situaciones, para representar y modelar las relaciones entre las variables de la situación y, finalmente, pone a prueba la capacidad critica, reflexiva y argumentativa. Sin embargo, para que exista el problema es indispensable que la persona asuma un posicionamiento de la situación, es decir, acepte el reto y se dé a la tarea de buscar posibles soluciones.

En concordancia con lo anterior y teniendo en cuenta que el pensamiento matemático se caracteriza por la actividad de resolución de problemas, resulta coherente enseñar matemáticas apoyándonos en el conocimiento informal de los estudiantes y sus estrategias heurísticas para verificar la validez o no de sus conjeturas en situaciones reales y construir así desde situaciones reales concretas los conceptos matemáticos.

En síntesis, si las matemáticas son una actividad social, en una comunidad determinada, donde los individuos ponen en uso un punto de vista matemático para resolver problemas, aprenderlas implica desarrollar ese punto de vista y enseñarlas es brindar al estudiante un ambiente propicio para que pueda desarrollarlo. Consideramos que la metodología de resolución de problemas permite convertir el aula en un laboratorio matemático teniendo como objetivo resolver situaciones problema de la vida diaria. Configurando así el salón de clase, se podrá desarrollar habilidades mentales en los estudiantes y maestros, como también trabajar en pro de mejorar las relaciones interpersonales entre ellos, en la medida en que se van convirtiendo en personas reflexivas, criticas y, en general, entran en un constante crecimiento intelectual al sentirse parte de una comunidad matemática dándole sentido al hacer matemático.

3. Proceso del diseño de actividades de aprendizaje

El diseño de actividades de aprendizaje con las que se permitiera propiciar en los estudiantes la construcción y uso significativo del concepto de proporcionalidad, dentro de la investigación acción, fue enriquecido mediante la realización de un "proceso de observación" en el que se contó con un observador externo, quien realizó la descripción de las clases y diligenció un instrumento, "Guía del Observador", con preguntas específicas sobre los fenómenos que pretendimos observar. De manera similar, el profesor investigador realizó una descripción de las clases y diligenció un instrumento, "Guía Profesor Investigador", con preguntas específicas referentes a lo que se pretendía observar. Se contó también con la evaluación realizada por los estudiantes a las actividades desarrolladas mediante preguntas específicas formuladas en la "Guía del Estudiante" y además se contó con una filmación.

Hasta el momento el proceso de diseño de actividades consta de tres unidades de trabajo en las cuales se han construido situaciones de aula que involucran movimiento corporal, un juego de cartas y el trabajo con un juego de carteles. A continuación presentamos las actividades de la primera unidad y algunos apartes del proceso de investigación acción realizado en el desarrollo de esta unidad.

La primera unidad la llamamos para nosotros "Explorando relaciones Aditivas y Multiplicativas", y para los estudiantes, "Saltos Aplausos y Algo más para pensar matemáticamente". Se desarrolla en cinco momentos así:

Momento 1: Exploración con el grupo grande. Se organizan los estudiantes fuera del salón, el profesor dará algunas instrucciones relacionadas con la cantidad de movimientos que deben dar los estudiantes, buscando explorar relaciones aditivas y multiplicativas, para que los estudiantes den cuenta de ellas.

Ejemplo: El profesor comienza con la instrucción: "por cada dos aplausos que yo dé, ustedes dan 3". El profesor da 2 aplausos, los estudiantes dan 3. El profesor da 4 aplausos, los estudiantes deben encontrar la cantidad que les corresponde dar, es decir, 6. El profesor da 12 aplausos y los estudiantes actúan con la misma cantidad que les corresponde conservando la relación 2:3.

Momento 2: Trabajo en dos grupos. Se divide el salón en dos grupos, el grupo A y el grupo B, quienes se ubican en filas frente a frente. En esta ocasión se trabaja con relaciones numéricas como por ejemplo 2:3. Por cada 2 palmadas que da el grupo A, el grupo B debe dar 3. Así, si el grupo A da por ejemplo 6 palmadas, el grupo B debe responder con 9. El profesor es quien propone la cantidad de movimientos.

Momento 3: Trabajo en parejas. Los estudiantes se organizan por parejas. El profesor asigna a cada pareja una relación numérica para trabajar y después de llevar un tiempo trabajando la relación, variando las cantidades, el profesor pedirá a cada integrante de la pareja explicar a su compañero cuál es la manera de proceder para determinar la cantidad de movimientos que le corresponde dar. Posteriormente se socializa en plenaria, buscando formas de expresión matemática.

Momento 4: Socialización. Algunas parejas presentan frente al grupo el trabajo desarrollado. El profesor actúa como moderador, para permitir que los estudiantes participen de la discusión que se pueda generar a raíz de la presentación.

Momento 5: Trabajo individual. Los estudiantes desarrollan una guía individual en la que se les pide, por una parte, describir las estrategias utilizadas para determinar la cantidad de movimientos que debían dar y los conocimientos matemáticos utilizados y, por otra, responder a las siguientes situaciones:

SITUACIÓN A: Por cada 2 palmadas que el profesor daba, tú tenías que dar 3.

a. Si el profesor daba 4 palmadas, tú dabas____ palmadas
b. Si el profesor daba 10 palmadas, tú dabas____ palmadas
c. Si el profesor daba____ palmadas, tú dabas 12 palmadas

SITUACIÓN B: Por cada giro que el profesor daba, tú tenías que dar dos giros

a. Si el profesor daba 3 giros, tú dabas____ giros
b. Si el profesor daba 7 giros, tú dabas____ giros
c. Si tú diste 16 giros, entonces el profesor dio____ giros

SITUACIÓN C: Por cada 5 (pasos, aplausos,...) que el profesor daba, tú tenías que dar 7 (pasos, aplausos,...)

a. Si el profesor daba 10 (pasos, aplausos,...),tú dabas____
b. Si el profesor daba 20 (pasos, aplausos,...), tú dabas____
c. Si el profesor daba___ (pasos, aplausos,...), tú dabas 21.

4. Resultados de la investigación

4.1. Se evidenció el uso de estrategias tanto inter como intra para hallar el término desconocido de una proporción en el momento en que determinaron la cantidad de aplausos que debían dar desde el uso de la relación de equimúltiplos (estrategia intra) o una relación funcional (estrategia inter). Desde las descripciones realizadas por los estudiantes sobre sus maneras de proceder para determinar la cantidad de movimientos que debían dar, se encontró que utilizaron estrategias tanto inter como intra, siendo la intra la más utilizada (65.71%), mientras que el 11.42% utilizó estrategias inter. Los demás, es decir, el 22.87%, no se clasificaron, pues, aunque lograron responder las situaciones presentadas en la guía individual, no lograron comunicar por escrito de manera clara el procedimiento utilizado por ellos para determinar la cantidad de movimientos que debían dar. Los siguientes son ejemplos de uso de estrategias intra e inter, respectivamente:

Estrategia Intra: Por cada 3 golpes que daba mi compañero, yo daba 4 golpes, o sea, yo hacía mentalmente la tabla del 3 y él la del 4.

Estrategia Inter: Mi compañero unía los puños de su mano y yo estiraba los brazos. Por 3 puños que él diera con sus manos, yo estiraba los brazos el triple de puños que diera. Si él daba 3, yo daba 9. La estrategia era que yo multiplicaba por 3 el número de puños que él diera y así yo sabía cuántas veces debía estirar los brazos.

4.2. La preferencia de los estudiantes por estrategias intra o inter reafirma lo dicho por Lamon, en cuanto a que esta selección es dependiente de las variables de la tarea. Encontramos también que es dependiente de la relación que se trabaje, pues en relaciones como por cada uno dos, los estudiantes utilizaban una relación inter en lugar de una relación intra.

4.3. Se evidenció de manera natural o empírica el concepto de equimúltiplos, pues utilizan expresiones como "ella dio la veinteava parte", "hay que dar el mismo múltiplo", "cada uno lleva su cuenta personal, él va con la tabla del tres y yo con la tabla del cuatro".

4.4. En los primeros cuatro momentos del desarrollo de la clase prevaleció el trabajo matemático como actividad social:

- Los estudiantes actuaron bajo la norma "cuando alguien se equivoca, lo identificamos para ayudarle", de manera que durante todo el tiempo se corrigieron unos a otros.
- Desde la mirada de la observadora se dio tratamiento al error por medio de preguntas que permitieron a los estudiantes encontrar el por qué de su equivocación y además participar para la corrección de los errores que presentaron los compañeros.
- Escuchar a los compañeros permitió generar procesos de validación del conocimiento desde el lenguaje propio de los estudiantes, acudiendo a representaciones matemáticas.
- La socialización del trabajo desarrollado en parejas fue determinante para iniciar la validación de estrategias para analizar las relaciones establecidas y filtrar posibles errores cometidos.
- Los estudiantes actuaron por exigencias de la situación, puesto que de una forma natural surgió la necesidad de participar "correctamente" de un juego que los llevó a poner en uso el punto de vista matemático para identificar las relaciones dadas entre las cantidades utilizadas dentro del juego, surgiendo la necesidad de expresar de forma verbal para luego colocarlo por escrito.

4.5. La actividad permitió a los estudiantes poner en uso conocimientos previos, hecho que es reconocido por algunos de ellos en la evaluación de la unidad frente a las preguntas, "¿durante el desarrollo de la actividad utilizaste algunos conocimientos matemáticos?, ¿cuáles y en qué forma te fueron útiles?, "expresa mediante una frase lo que aprendiste hoy en la clase de matemáticas". Ellos dieron respuestas como:

Vanesa M. "Aprendí... y también a utilizar de una manera y otra lo que aprendí en años pasados. Aprendí otro tipo de operación donde se utiliza más que todo la lógica".

Daniela L. "En la clase aprendí a utilizar mejor los múltiplos."
Erika A. "Utilizamos la multiplicación y la suma, fueron muy útiles pues si no multiplicamos ni sumamos no se realiza lo que hicimos pues no hubiéramos sacado ni mitades ni terceras y no hubiéramos sabido cual era el resultado de la otra persona".

4.6. El 77.13% de los estudiantes entre quienes utilizaron estrategias inter o intra, logró analizar relaciones entre los tamaños de magnitudes de la misma naturaleza y los expresó en lenguaje natural.

4.7. El análisis de los distintos momentos de la clase nos dejó ver que nuestros estudiantes pasaron por distintos estadios, acudiendo en algunos casos a la suma, y luego buscaron una manera más rápida de realizar las operaciones, encontrando la necesidad de usar la multiplicación o los múltiplos para explicar desde ellos. Vimos que durante el desarrollo de la sesión utilizaron distintas estrategias y en la medida que observaron las que otros usaron, modificaron las propias mostrando procedimientos cada vez más sofisticados. Una evidencia de ello es lo realizado por una estudiante:

"Mi compañera Natalia y yo decidimos escoger 2 números, 3 y 5. A mi me tocaba el 3 y a ella el 5 y por cada dedo que yo daba, ella daba lo que le correspondía. Ejemplo: si yo daba 3, ella daba 5; si yo daba 6, ella daba 10; si yo daba el doble, Natalia tenía que dar el doble; si yo daba la 20 aba parte, ella tenía que darme lo mismo."
"Utilizamos la multiplicación y la suma, fueron muy útiles pues si no multiplicamos ni sumamos no se realiza lo que hicimos pues no hubiéramos sacado ni mitades ni terceras y no hubiéramos sabido cual era el resultado de la otra persona".
Natalia: Cada vez que Erika da tres, yo tengo que dar 5
Erika: Yo doy 3, ella tiene que dar el mismo 5. Después yo doy 8, ella tiene que dar 13.
- Profesora: ¿Por qué?, escríbelo.

3	5
8	13
16	21

- Erika: Se le suma el resultado mío más lo que ella tiene que dar.
- Profesora: (dirigiéndose al grupo de estudiantes) y... ¿ustedes qué piensan?
- Carlos: Cuando Erika da 8 aplausos no puede dar 13 porque mira que si da 3 aplausos ella tiene que dar 5 pero ahí da sólo 6 aplausos que puede completarlos. 5 entonces tiene que dar 10 aplausos, no 13.
- Profesora: No me quedó claro lo que dijiste. ¿Estás de acuerdo con 3:5?
- Carlos: Sí.
- Profesora: ¿Estás de acuerdo con 8:13?
- Carlos: No.
- Profesora: ¿Por qué?

- *Carlos: Porque ya los 8 sólo se cumpliría 2 veces 3, ¿sí? Pero no le alcanza a dar otros tres para que Natalia dé 15.*
- *Daniel: Cada persona tiene su cuenta personal. Porque si ella da 3, ella tiene que dar 5; si ella da 6, ella tiene que dar 5 más que es el doble, todos dan el doble.*

En el registro del video, que corresponde a un momento de la clase anterior al desarrollo de la guía individual, vemos que Erika no había logrado comprender la relación que se pretendía (razón). Cuando la estudiante responde su guía después de haber hecho su exposición y de escuchar los aportes de sus compañeros, hay un cambio, pues en las respuestas dadas a las dos primeras preguntas de la guía individual se evidencia el uso de una estrategia intra, pues para saber su número de movimientos analiza la relación entre los que la compañera tenía que dar y los que efectivamente dio. Por otro lado, cuando la estudiante hace la afirmación: "si yo daba la veinteava ella tenía que dar lo mismo" (5), se refiere a que si la estudiante da 20 veces lo que le corresponde, ella tiene que actuar en consecuencia.

4.8. Hubo un porcentaje significativo de estudiantes en los cuales se evidenció el cambio entre concepciones iniciales y finales.

4.9 Se observó en algunos estudiantes la construcción de una correspondencia. A "n" aplausos le corresponden "y", y así sucesivamente, y esta construcción se dio a lo largo de toda la actividad. Si tuviéramos en cuenta sólo esta respuesta, pensaríamos que todos los estudiantes utilizaron solamente estrategias inter, pero ya vimos anteriormente que usaron estrategias intra en su mayoría, dejando ver la puesta en juego de la noción de razón.

4.10. Vimos que al comienzo de la sesión varios estudiantes se mostraron confusos, no daban el número de movimientos que les correspondía de acuerdo con la instrucción dada o no lograban explicar claramente su respuesta. Sin embargo el trabajo desarrollado en los primeros cuatro momentos tuvo importantes repercusiones para el trabajo individual, pues al contrastar con el rendimiento obtenido en el desarrollo de la guía del estudiante podemos afirmar, sin lugar a dudas, que un porcentaje significativo de estudiantes pudo cualificar sus estrategias. El 70% de los estudiantes tuvo un rendimiento alto, puesto que respondió entre 7 y 9 preguntas correctamente, mientras que solamente un 8.6% logró responder entre 3 y 4, lo cual evidencia que con la actividad se consiguió una buena comprensión.

4.11. Logramos acercar a los estudiantes al hacer matemático, utilizando situaciones cercanas a su realidad, simples y divertidas, lo cual se consiguió integrando elementos que por lo general no son considerados para desarrollar una clase de matemáticas, como lo es en este caso el movimiento corporal.

4.12. Logramos que los estudiantes se pregunten a si mismo, lo que es para nosotros una actitud de posicionamiento frente a las situaciones que presentamos como problema, en tanto que es una evidencia de que analizaron las relaciones, que de alguna manera identificaron para poder argumentar sus respuestas. Otra evidencia del posicionamiento de los estudiantes frente a las situaciones es el hecho de que ellos se corrigieron entre sí o hicieron aclaraciones y generaron discusiones; también se observó que algunos estudiantes intervinieron teniendo en cuenta los planteamientos de sus compañeros.

4.13. Se identificó como oportunidad de mejoramiento el uso dado a las representaciones. La profesora investigadora pidió a sus estudiantes pasar al tablero para representar de manera matemática o no lo que hicieron en parejas. Los estudiantes dieron bastante importancia a los dibujos como representación para los movimientos, más que a buscar una forma de representar las relaciones matemáticas. Este hecho se atribuye a la comprensión que tiene cada uno de los interlocutores de lo que significa "representar", pues para los estudiantes hace referencia a: "representar una obra", "realizar un dibujo", y para la profesora hace referencia a modelar mediante símbolos una situación. Esto es, se presenta un inconveniente en la comunicación por el tipo de código usado por el emisor.

4.14. Uno de los aspectos en el que se enriqueció la acción desarrollada en el aula fue la mirada que hacemos como docentes a las respuestas dadas por los estudiantes de forma verbal y escrita, en tanto que no lo asumimos como éxito o fracaso de ellos, sino como una fuente de información valiosa para lograr identificar fortalezas o debilidades en nuestro proceso de mediación.

4.15. Con la experiencia que hemos tenido en el desarrollo de las actividades de aprendizaje implementadas con 14 grupos de estudiantes, aunque no podemos afirmar que el 100% estuvo completamente comprometido con el desarrollo de la actividad, sí se consiguió que la mayoría se sintieran cómodos durante el desarrollo de la clase para expresar sus respuestas y formas de proceder, de manera que esos momentos fueron bien aprovechados para lograr alguna construcción que se reflejó en el alto porcentaje de respuestas correctas, así como las afirmaciones hechas por ellos en el momento de evaluar la actividad.

5. Recomendaciones

- Tener cuidado con el tipo de movimientos que se seleccione, pues cuando éste fue más complicado se desvió la atención de los estudiantes, dejando de lado el análisis de las relaciones que se establecen entre dos magnitudes. Para evitar esto, desde el trabajo con el grupo grande es conveniente hacer observaciones que permitan a los estudiantes de manera conciente ver la trivialidad del tipo de movimiento.
- Asegurarnos que lo que queremos decir esté en un código común para el profesor y para los estudiantes, y así evitar situaciones como la que se presentó con la noción de "representar". En la próxima ocasión seremos más específicos si pedimos a los estudiantes "representar matemáticamente lo que pensaron", en lugar de afirmar "representen lo que hicieron". Dada la escolaridad de los estudiantes, resulta pertinente realizar con ellos una reflexión frente a la diferencia que existe entre estas dos frases.
- Como durante el análisis identificamos la importancia que tiene la socialización del trabajo por parejas, consideramos que se debe buscar dedicarle un poco más de tiempo a este tipo de acciones para lograr mejores resultados.
- Siempre tener presente los conceptos previos de los estudiantes, pues el trabajo dentro de la metodología de resolución de problemas consiste en mejorar esas concepciones.

Conclusión final

Con la implementación de nuestra propuesta se dio una dinámica de construcción de saberes que tuvo en cuenta la metodología de la resolución de problemas, iniciándose con una situación de aprendizaje que permitió poner en uso los conocimientos previos de los estudiantes, y generó una responsabilidad compartida en el grupo, donde, por una parte, cuando un estudiante identificó un error en su intervención, buscó superarlo para corregirlo y por la otra, hubo estudiantes que identificaron los errores de sus compañeros con sus correspondientes causas mostrando que lograron la construcción esperada, desde la mirada epistemológica del concepto de proporcionalidad.

Referencias Bibliográficas

BONILLA, M., SÁNCHEZ, N. y VIDAL, M. (1999). Cómo enseñamos la aritmética, IDEP – Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

BOYER, C. (1987). Historia de las Matemáticas. Madrid: Alianza Editorial

EUCLIDES. Elementos Libro V.

FIOL, L. y FORTUNY, J. (1990). Proporcionalidad Directa. La Forma y el Número. Madrid: Síntesis.

GARCÍA, G. y SERRANO, C.(1999). La Comprensión de la Proporcionalidad, una Perspectiva social y Cultural. Bogotá: Gaia. Colección: Cuadernos de Matemática Educativa. No. 3

ETCHEGARAY, S. Didáctica de la matemática: algunas consideraciones sobre el programa epistemológico. www.unrc.edu.ar/publicar/cde/05/Etchegaray.htm

GODINO, J. y BATANERO, C. (2002). Proporcionalidad para maestros. Proyecto Edumat Maestros. España

JOMTIEM (1990). Declaración Mundial sobre Educación para Todos. Tailandia.

LAMON, S. (1994). Razón y proporción: fundamentos cognoscitivos en unitización y normación. En: The Developmen Multiplicative Reasoning in Learning of Mathematics Cap. 4 Ny State University Or New York Pág. 89 – 120 (Traducción: Pedro J. Rojas G. y Cecilia Barón P. UDFJC Bogotá)

LESH,R., POST , y BEHR, M. (1988). Proportional Resoning. In J. Hiebert y M. Behr (Eds) Number Concepts and Operations in the Middle Grades (pp. 93 – 118) Reston, VA: Lawrence Eribaum y NCTM.

LUENGO, R. et al. (1997). Proporcionalidad Geométrica y semejanza. Madrid: Síntesis.

Ley 115 de 1994, Ley general de la educación.

MEN (1998). DOCUMENTOS: Matemáticas: Lineamientos curriculares. Bogotá: Magisterio.

MEN (1997). Análisis y Resultados de las pruebas de matemáticas. TIMSS Colombia

MEN (1999). Estándares para la Excelencia en La Educación.

MEN (1998). Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas: Lineamientos curriculares. Bogotá: Magisterio.

PEÑA, M. El Propósito de Mejorar la Calidad de la Educación Básica en Colombia. Bogotá: Corpoeducación.

PEREZ, G (1998). Investigación Cualitativa. Retos e Interrogantes.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DISTRITAL – UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA (2000). Evaluación de Competencias Básicas, Resultados de la Cuarta Aplicación. Bogotá.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE BOGOTÁ. (2000). Resultados Evaluación de Competencias Básicas En Lenguaje, Matemática y Ciencias. Tercera Aplicación. Calendario A. Octubre de 1999 Grado Séptimo y Noveno. Unibiblos. U. NAL.

SANTOS, L. (1996). Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. México: Iberoamericana.

SCHOENFELD, A. (1992). Aprender a Pensar Matemáticamente: Solución de Problemas, Metacognición y Sentido de Hacer en Matemáticas.

VEGA, L. (1991). Introducción a los Elementos. Madrid: Gredos

VERGNAUD, G. (1997). El Niño, las Matemáticas y la Realidad. México: Trillas.

Notas

1. Profesores Licenciados en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y Especialistas en Educación Matemática de la misma Universidad.
2. LESTER (1983). Citado por Santos, L. Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. Ed. Iberoamericana 1996.
3. Este estudio, realizado entre 1991 y 1997 contó con la participación de 41 países, siendo Colombia el único país latinoamericano que reunió la totalidad de las condiciones para mantenerse en el estudio hasta el final.
4. La intención es permitir que los estudiantes exploren un poco y se familiaricen con la relación dada desde la actividad concreta, para que luego progresivamente desde las discusiones entre ellos, logren explicar sus ideas acudiendo a representaciones matemáticas.
5. La respuesta de Erika, constituye también una muestra de que en algunas ocasiones los estudiantes pueden estar procediendo de manera correcta, sin embargo, a la hora de describir su estrategia, utilizan términos que nos podrían hacer pensar que no proceden correctamente, como en este caso la expresión "veinteava parte", en lugar de 20 veces el número. En este sentido, vemos que la evaluación de los estudiantes es necesaria desde las distintas actividades de aprendizaje que se desarrollen y no solamente desde la prueba escrita.

Secuencia de actividades para la iniciación al álgebra

WILLIAM BAUTISTA*
I.E.D SIMÓN RODRÍGUEZ J.T.

El trabajo que se presenta a continuación es un esbozo general del proyecto de aula que he implementado en dos oportunidades como parte inicial del curso de álgebra en grado octavo. En ambas oportunidades se ha hecho la experiencia en la I.E.D Simón Rodríguez (jornada de la tarde). Se ha tomado como base la secuencia didáctica experimentada y reportada que hizo parte del trabajo de grado de la especialización en Educación Matemática, entre 1998 y 1999. Al revisar y ajustar dicha propuesta, he cambiado y aumentado las actividades atendiendo las recomendaciones y sugerencias hechas en el reporte.

Un objetivo principal que se persigue es indagar sobre los procesos de generalización y simbolización, ya que son base para el análisis sobre la aproximación de los estudiantes a una interpretación de los símbolos literales (letras) como número generalizado y así posibilitar una construcción significativa del trabajo en el álgebra escolar. Los estudios internacionales, nacionales y la experiencia particular señalan que sobre la enseñanza del álgebra se requiere de un trabajo previo en significación de la letra en contextos algebraicos y su uso como elemento generalizador al que se le atribuyen propiedades numéricas. Esto es lo que a través de la siguiente secuencia de actividades se pretende potenciar.

1. El Álgebra y su enseñanza

Posiblemente en los procesos de enseñanza del álgebra escolar se ha enfatizado el trabajo desde lo sintáctico, lo cual ha conllevado a la memorización de fórmulas y procedimientos, muchas veces carentes de sentido y significado para los estudiantes. Con base en el conocimiento y la reflexión del docente sobre diferentes interpretaciones de álgebra, de los símbolos utilizados, del desarrollo de los distintos procesos cognitivos necesarios para comprender el álgebra (generalización y simbolización entre otros) y del reconocimiento de los diferentes estadios de desarrollo de pensamiento en los estudiantes, se espera no sólo una comprensión de las dificultades que encuentran los estudiantes al inicio del álgebra escolar, sino opciones de trabajo en el aula.

Considerando los diferentes aspectos que involucra el aprendizaje del álgebra, y en particular, lo concerniente a las interpretaciones de las letras, un currículo de álgebra debería tomar en cuenta diversas lecturas: entendida como aritmética generalizada, como resolución de ecuaciones, como relación entre parámetros o como estructura, entre otras. Considero que un primer acercamiento al álgebra se debe iniciar desde la concepción aritmética generalizada, teniendo en cuenta las estructuras aritméticas previas que poseen los estudiantes y el hecho que, considerando sus edades, ellos estén en el estadio último de operaciones concretas (formal temprano o de generalización concreta) según la visión de Collis (1975, citado por PRETEXTO). Una perspectiva como ésta, puede favorecer el desarrollo de otras interpretaciones como pueden ser: el estudio de métodos para resolver ciertos problemas concretos (ecuaciones), el estudio de relación entre cantidades (función) y su aspecto estructural.

Es importante y cobra sentido en el desarrollo del currículo el conocimiento de la clasificación de las concepciones de álgebra expuesta por Usiskin (1988) así:

Concepciones de álgebra	Uso de la letra	Destrezas asociadas
Aritmética generalizada	Patrones generalizados	Traducir y generalizar relaciones entre número
Estudio de procedimientos para resolver problemas	Incógnitas	Simplificar y resolver
Estudio de relaciones entre cantidades	Argumentos	Relacionar, tabular y graficar parámetros
Estudio de estructuras	Objetos arbitrarios	Manipular, justificar

En principio se deben presentar situaciones donde las ideas comunicadas están en un lenguaje habitual, es decir, donde las palabras e ideas son conocidas y utilizadas frecuentemente por los estudiantes, con la intención de favorecer la comunicación y comprensión. Teniendo éste como base, se debe generar la necesidad de uso de un lenguaje más específico para contextos matemáticos, conocido como lenguaje aritmético con estructuras y reglas matemáticas propias. Por ejemplo, se puede proponer el uso de otras formas de representación como tablas, gráficos, diagramas, como medio o herramienta para acercarse al lenguaje algebraico.

2. Procesos de generalización y simbolización

Siguiendo los planteamientos del Grupo Azarquiel (1993, p.28), "una de las vías por las que un principiante puede encontrarse con el álgebra y quizá de las más naturales y constructivas, es precisamente el trabajo con situaciones en las que debe percibir lo general y, sobre todo, expresarlo". La generalización en contexto algebraico es un proceso que debe involucrar una amplia diversidad de situaciones, a través de las cuales se busque potenciar la capacidad de abstraer lo común, la regularidad subyacente en los casos particulares e ir expresando, primero sólo con palabras, luego con palabras y símbolos y finalmente con símbolos matemáticos, y específicamente se llegue a la comprensión de la letra como elemento medular del sistema de representación propio del álgebra. El camino hacia la generalización debe ir acompañado del estudio de otro proceso: el de simbolización, que podemos decir, constituye la última fase del proceso de generalización.

Este desconocimiento de las fases del proceso de generalización es una de las causas por las que en nuestro ejercicio docente, en muchas ocasiones, pretendamos que nuestros estudiantes logren dar un "paso" apresurado desde una situación concreta al uso directo de símbolos, sin considerar el tránsito (generalmente lento) por etapas intermedias en las que el estudiante recurre a dibujos, a combinaciones de estos con palabras o símbolos.

El grupo Azarquiel (1993) propone la introducción de los símbolos literales (letras), en el contexto algebraico, partiendo del intento de la descripción de relaciones o propiedades relativas a un conjunto de números, "después de un proceso en el que se trata de dar sentido progresivamente a las interpretaciones personales.... se pueden convertir así en una necesidad del alumno, en un instrumento propio para explicar y manejar sus ideas" (p. 28). Expongo enseguida y de forma breve las fases de generalización consideradas por este grupo, en el que consideran que el proceso de generalización requiere de los tres "pasos" siguientes:

(1) Ver: Esta fase se refiere al aprovechamiento de figuras que presentan una distribución espacial que permite visualizar regularidades de su conformación, expresables a través de relaciones en el campo de los números, como uno de los recursos necesarios para desarrollar la capacidad de percepción y abstracción de la generalidad. Otro de los recursos considerado es el trabajo directo en conjuntos numéricos a través de series de números que se han generado mediante una combinación adecuada e invariable: una fórmula.

Hemos encontrado que cuando un estudiante se enfrenta con una situación que le brinda apoyo visual, en su primer intento por hallar el rasgo o comportamiento constante en los diferentes casos presentes, es probable que describa toda una lista de características donde muchas de ellas sean irrelevantes, es decir, constantes sólo en unos pocos casos. Así pues, es deseable, que la actitud del docente se dirija a orientar a los estudiantes para que comparen las diversas características "observando las que coinciden entre ellas, contando o midiendo cuando sea pertinente... para ensayar posibles organizaciones e intentar ver si se conservan en todas los casos" (Grupo Azarquiel, 1993, p. 34). Esta primera fase está generalmente ligada a la descripción de las características, observadas como comunes, de forma verbal y/o mentalmente, conformando de esta forma las bases para la segunda fase. Fase de descripción.

(2) Describir: Aquí se requiere de un análisis para ser comunicado al otro, por lo que las observaciones individuales deben expresarse de forma clara y sencilla para que puedan ser comprendidas por el interlocutor sin dificultad.

Así pues, cuando el estudiante busca esa precisión en sus expresiones, es natural que encuentre vacíos, contradicciones o frases incompletas y que entonces deba reelaborar sus supuestos y así mismo sienta la necesidad de comprobarlos y por tanto proponer modificaciones. A través de esa comunicación con el otro se consigue una perspectiva más fina, más cercana a la estructura subyacente buscada, es decir, a la regla o fórmula general. Aceptando que expresarse en matemáticas no es tan fácil, y de acuerdo con el grupo Azarquiel, entre otras cosas por las imprecisiones y limitaciones del uso del lenguaje natural en los chicos, compartimos la idea que este proceso se debe desarrollar con calma y que en las palabras del grupo "....conviene aprovechar formas personales de hacer explícito el pensamiento, y no buscar demasiado pronto la expresión correcta" (Grupo Azarquiel, 1993, p. 38).

(3) Escribir: "Se ha dicho anteriormente que el estudio de la generalización dentro del aprendizaje del álgebra tiene como objetivo la expresión escrita en forma simbólica, de las relaciones cuantitativas que se observan".

Para la evaluación del proceso de generalización, el grupo PRETEXTO propone los siguientes criterios, apoyados en los aportes que Collis (1979) da sobre los niveles de comprensión de la letra:

a. Un primer nivel (A), cuando se evidencia el reconocimiento de un patrón de formación en lo perceptual.
b. Segundo nivel (B), llamado concreto finito, en donde se evidencia capacidad de reconocer la regla general para casos particulares finitos (valores cercanos a los que se le presentan)
c. Un tercer nivel (C), en donde hay reconocimiento de un patrón en lo concreto generalizado, es decir, además de lo alcanzado en el nivel inmediatamente anterior, se evidencia la aplicación de la regla general a casos más grandes, pero todavía concretos.
d. Cuarto nivel (D), en el que hay reconocimiento de un patrón en lo general, pero existiendo la posibilidad de expresarlo desde lo verbal, como lenguaje intermedio (combinación de símbolos y diagramas por ejemplo) o como simbolización formal.

El uso del símbolo algebraico, como expresión última, precisa y sin ambigüedad para el registro de diversas relaciones numéricas, lleva implícito otro proceso en el que tanto el estudiante como profesor deben tomarse el tiempo necesario para asegurar un uso significativo, cuidándose de caer en el apresuramiento de suponer que el uso o aparición de símbolos acordes con el álgebra es ya signo de adquisición de significado y comprensión del proceso de simbolización. Este proceso de por sí, trae consigo algunos problemas relacionados con el uso de símbolos, como el hecho de tratar homologar la simbolización propia de una situación en otra de características semejantes entre estos casos.

El desarrollo del proceso de generalización en su fase de escritura, se aclara allí, que la acción de escribir la generalidad no refiere de manera exclusiva el uso de expresiones simbólicas, sino que deben considerarse combinaciones de palabras y dibujos, sólo dibujos, sólo palabras, palabras y símbolos y sólo símbolos. Se sugiere motivar a los estudiantes a hacer uso de todos esos elementos en diversas situaciones en las que para solucionarlas, se vea ello como una verdadera necesidad. Esta fase debe "continuar sustituyendo algunas de las palabras por símbolos... y proseguir hasta llegar a las expresiones totalmente simbólicas que utilicen correctamente las reglas de enlace del álgebra" (1) (Grupo Azarquiel, 1993, p. 38).

Socas y otros (1989) en su propuesta refiere a los tres períodos por los que pasó la notación algebraica, los cuales describen así:

- "El período retórico o verbal, en el cual las operaciones se *describían con palabras.* Este periodo se extiende desde los babilonios (1.700 a.C.) hasta Diophante (250 d.C.)
- El período sincopado o abreviado, cuando *empiezan a utilizarse algunas abreviaciones* para simplificar la resolución de los problemas. Este periodo comienza con Diophante y dura hasta comienzos del Siglo XXI.
- El período simbólico aparece en el Siglo XVI y utiliza ya diferentes símbolos y signos matemáticos... asociado a Viete, el cual *comenzó a denotar por letras no sólo las incógnitas sino números dados previamente".*

El subrayado es una interpretación que relaciono con tres de los cuatro sistemas de representación sugeridos en Socas y otros (1989) para la iniciación de los chicos en el estudio del álgebra, así:

- El primer período caracterizado por el uso exclusivo de la expresión verbal, en Socas y otros (1989) es un *lenguaje habitual.*
- El segundo período caracterizado por el uso de abreviaciones, es decir el uso de signos para las operaciones aritméticas y el uso del número, constituyen situaciones expresables a través del *lenguaje aritmético.*
- El tercer período en el que aparece la letra denotamos incógnitas y/o números conocidos que constituiría las situaciones expresadas en *lenguaje algebraico.*

3. Representaciones semióticas

Para darle sentido al álgebra escolar también se hace necesario considerar las representaciones y la modelización de los "objetos algebraicos". Esto puede llevarse a cabo en la medida que el docente conozca y utilice los diferentes sistemas de representación semióticos y pueda apoyar al estudiante en los procesos de generalización y simbolización y de esta manera ayudar a que la iniciación del estudiante en el conocimiento del álgebra sea natural y significativa.

Hacen parte de él las representaciones numéricas, los códigos algebraicos, las gráficas, y los diagramas. Vamos entonces a referirnos específicamente a estos sistemas porque van a permitirnos comprender los aspectos involucrados en:

- La apropiación de un concepto algebraico.
- Importancia en la comunicación de ideas matemáticas, en especial en álgebra.
- Importancia de los sistemas de representación intermedios como balanzas y diagramas geométricos.
- Desarrollo del proceso de generalización y simbolización en la iniciación del álgebra.

Al abordar el estudio de un concepto algebraico es necesario entender que para una apropiación de un objeto algebraico es plausible pensar que ella no se logra fácilmente sino se presentan diversas representaciones del mismo. Esto puede inicialmente plantear a los docentes la necesidad de que el estudiante transite a través de diferentes lenguajes (lenguaje habitual, lenguaje aritmético, lenguaje geométrico y lenguaje algebraico) y así adquiera seguridad y confianza en la comunicación de las ideas matemáticas, el uso significativo de la letra en contextos algebraicos, la posibilidad de abstraer lo común y buscar regularidades en diversas situaciones, todo esto sin desconocer el papel que en un momento dado pueden jugar las representaciones intermedias en el desarrollo de procesos de generalización y simbolización en los estudiantes. Es así como, la manipulación que los estudiantes hagan entre diferentes representaciones hace necesario realizar traslaciones y transformaciones dentro de diferentes sistemas de representaciones semiótica. Algunas de ellas pueden ser, según Kaput (1987):

- Traslaciones entre sistemas de representaciones semiótica formales, como puede ser entre los sistemas de representación formal aritmético y formal algebraico.
- Las traslaciones entre sistemas de representaciones semióticas no formales, por ejemplo, las traslaciones mediante el lenguaje natural, las representaciones físicas, las representaciones geométricas, los diagramas y la representación formal algebraica.
- Las transformaciones y operaciones dentro de un mismo sistema de representaciónes semióticas, sin referencia a otro sistema, por ejemplo la transformación y operaciones dentro del sistema de representación formal algebraico, sin otro significado referencial que si mismo.
- La consolidación a través de la construcción de objetos mentales mediante acciones, procedimientos y conceptos que se dan en los sistemas de representaciónes semiótica intermedias, creados durante la secuencia de enseñanza. Estos sistemas se integran con otros más abstractos y sirven de base para nuevas acciones, procedimientos y conceptos en un nivel de generalización mayor.

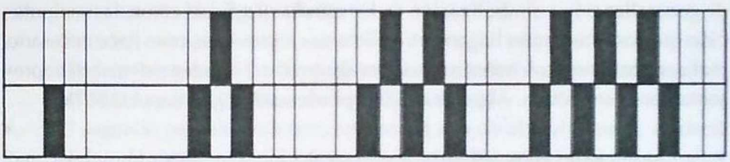
En el sistema simbólico matemático, cuando un objeto matemático ha sido aceptado como parte del sistema, puede considerarse como una realidad textual y un componente de la estructura global. Así, puede ser manipulado como un todo para crear nuevos objetos matemáticos, ampliar el rango de herramientas e introducir nuevas restricciones al lenguaje y al trabajo matemático.

Secuencia de actividades

Actividad 1.

Diagnóstico. Esta actividad tiene como propósito reconocer el estado de los procesos de generalización y formas de simbolización utilizadas por los estudiantes en la situación presentada. Tiempo estimado: 3 horas (Inicialmente trabajo individual, luego trabajo en grupos pequeños y finalmente socialización y discusión general sobre las soluciones planteadas).

Figura No. 1



(1o Posición) (2o Posición) (3o Posición)
(4o Posición)

a) Dibuje la figura correspondiente a la posición 5^{a}.
b) Calcule el número de cuadros de la figura para la posición noventa y explique con un procedimiento.
c) Calcule el número de cuadros de la posición 100.
d) Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta a la pregunta anterior.
e) Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros en cualquier posición.

Comentario: Se revisan cuestionarios y se discute ampliamente las interpretaciones, razones y dificultades presentadas. No se trata pues de clasificar en respuestas "correctas" e "incorrectas", se registran los niveles de generalización según criterios de evaluación (ver, por ejemplo los propuestos por el grupo PRETEXTO).

Contextos gráficos. El propósito de las siguientes actividades es reconocer patrones de formación y su descripción. Sólo cambia el grado de complejidad en la información.

Actividad 2. Tiras de papel *(Tiempo aproximado: 1 hora).*

Figura No. 2

1o 2o 3o 4o

a) Dibuje dos tiras más y describe el proceso de construcción de la tira.

b) ¿Cuántas piezas claras tiene cada tira y cuántas oscuras? Organice la información.

c) Calcule el número de piezas claras de la tira 11. ¿Cuál es el correspondiente número de piezas oscuras? Explique tu respuesta.

d) Calcule el número de piezas claras de la tira 198. ¿Cuál es el correspondiente número de piezas oscuras? Explique su respuesta.

e) Describa cómo encontrarías el número de piezas claras para una tira muy... muy larga. Responde para las piezas oscuras también.

e) Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros en cualquier posición.

Comentario: Importante fomentar el trabajo comunitario buscando que en los grupos de trabajo (4 personas) queden estudiantes clasificados en los distintos niveles para que se estimule la discusión para llegar a acuerdos y presentar conclusiones. No es absolutamente necesario el último literal, se puede retomar luego.

Actividad 3. Diseño con baldosas

1. Dibuje las 2 figuras siguientes a las presentadas a continuación teniendo en cuenta los criterios observados.

Figura No. 3

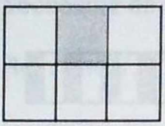


Figura N° 1

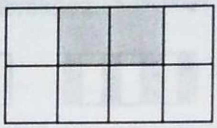


Figura N° 2

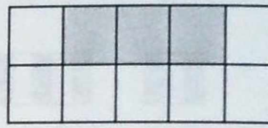


Figura N° 3

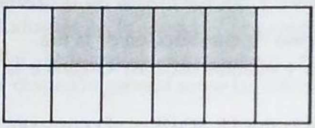


Figura N° 4

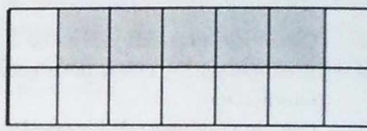


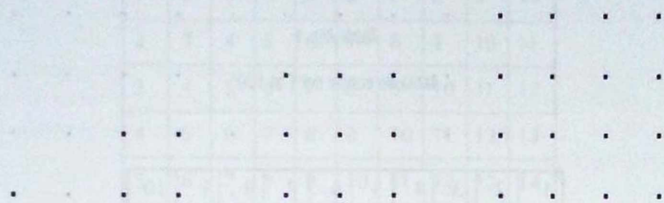
Figura N° 5

2. Calcule el número de cuadros blancos para cada una de las anteriores baldosas.
3. Exprese una relación entre el número de cuadros blancos y el número de cuadros sombreados en cada baldosa.
4. ¿Cuántos cuadros blancos tiene la baldosa No.10?
5. ¿Cuántos cuadros blancos tiene la baldosa No. 28?
6. ¿Cuántos cuadros blancos tiene la baldosa No. 1000?
7. ¿Cuántos cuadros blancos tiene la baldosa No. 843?
8. Encuentre una regla general que permita calcular el número de cuadros blancos con relación al número de cuadros sombreados para cualquier baldosa que siga la regla descubierta.

Comentario: Hacer evidente los inconvenientes de los argumentos que recurran a una figura anterior para encontrar la siguiente (recurrencia). No es absolutamente necesario el último literal, se puede retomar luego.

Actividad 4. Configuración de puntos

Figura No. 4



- Observe la secuencia de puntos que se muestra. ¿Cuántos puntos tiene cada figura? Dibuje las dos figuras que siguen. ¿Cuántos puntos tiene cada una?
- Compare la posición que ocupa (orden) con la cantidad de puntos que tiene cada una. Organice la información y analiza la relación entre los números (Orden y cantidad de puntos).
- Describa cómo encontrar el número de puntos conociendo el orden de la figura. Utilice el descubrimiento para determinar el número de puntos que tendría la figura 95.
- ¿Puede describir lo anterior mediante una fórmula? ¿Cuál sería?

Comentario: Se introduce acá un análisis de tipo numérico. Estudiar las descripciones realizadas, pidiendo contra ejemplos para los casos en que no funcionan las generalizaciones alcanzadas.

Contextos numéricos. El propósito de las siguientes actividades es el de generalizar situaciones numéricas, para expresarlas en diferentes lenguajes.

Actividad 5. Tablas numéricas

Se pide construir la tabla de contar, la de sumar y la de multiplicar, buscando estrategias no mecánicas para la misma. Por ejemplo, proponiendo ubicar un mismo número en cada tabla. Colocar factores, divisores etc.

Tabla No. 1

Tabla de contar del 1 al 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tabla No. 2
Tabla de sumar

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla No. 3
Tabla de multiplicar

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	14	20	26	32	38	44	50	56
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Se propone encontrar regularidad en propiedades, para ser descritas verbalmente (escrito también), de tal manera que al notar que se cumplen en distintas estructuras de los cuadros se proponga el problema de representarlas de manera general (algebraicamente). Al no realizar las generalizaciones de manera algebraica se retomarán luego que hayan alcanzado algún nivel de significación para usar letras en los anteriores contextos presentados.

En esta actividad particularmente se recomienda especial acompañamiento para orientar algunas de las regularidades existentes. Examinar cuadros de cada tabla (de 2x2, 3x3, etc.), revisar productos sumas, las secuencias dentro de ellas mismas, en fin, una exploración bastante completa.

Traducción entre Lenguajes. Las siguientes actividades tienen como propósito posibilitar la traducción del lenguaje habitual al lenguaje algebraico, pasando por el lenguaje aritmético.

Actividad 6. Del lenguaje habitual hacia el lenguaje algebraico *(Tiempo estimado: 30 minutos)*

Escriba una expresión que representa la suma de 7 con cualquier número.

Actividad 7. Traducción y simplificación *(Tiempo estimado: 1 hora).*

Escriba una expresión, lo más simplificada posible, que represente los siguientes enunciados:

Walter hace un recorrido de su casa al colegio durante una semana así:

- El lunes se va en bicicleta y gasta un cierto tiempo.
- El martes se va caminando y gasta tres veces el tiempo que utilizó el lunes.
- El miércoles se va en bus y a pesar de la lentitud gasta la mitad del tiempo del lunes.

Actividad 8. Doble de un número *(Tiempo estimado: 30 minutos).*

Encuentre una expresión algebraica que represente el doble de cierto número, teniendo en cuenta la información suministrada en la tabla:

Tabla No. 4

2	4
8	16
	32
15	
	40
	1050
.	.
.	.

Actividad 9. Elementos del rectángulo *(Tiempo estimado: 30 min.)*

Exprese la base y la altura de cualquier rectángulo en el que la base sea el doble de la altura.

Actividad 10. Suma de números consecutivos

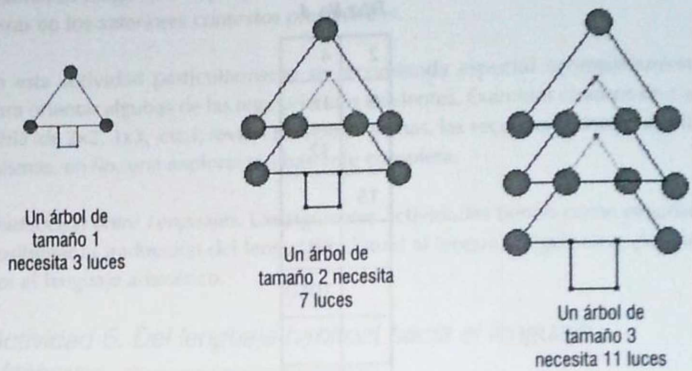
¿Es posible que la suma de dos números consecutivos sea par?

Actividad 11. Números consecutivos

Escriba la suma de cuatro números enteros consecutivos cualesquiera.

Actividad 12. Árbol de navidad.

Tabla No. 5



1. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño 4?
2. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño 5? Explique cómo responde a las preguntas anteriores utilizando sus propias palabras.
3. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño 10?
4. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño 20?
5. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño n?

Finalmente, quiero reiterar la importancia durante el desarrollo de las actividades propuestas de observar aspectos como:

A: Interpretación del enunciado y reconocimiento de la situación planteada.
B: Reconocimiento de secuencias o patrones.
C: Uso de diferentes representaciones: pictórica, tabular, habitual, intermedia, entre otras.
D: Formas de argumentación y procesos de simbolización.
E: Usos e interpretaciones de los símbolos literales.

Referencias Bibliográficas

GRUPO AZARQUIEL. Ideas y actividades para enseñar álgebra. Serie Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis, 1993.

ROJAS, P. Concepciones Sobre El Trabajo Algebraico Escolar.. Santa fe de Bogotá Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 1997

SOCAS, M., CAMACHO, M. y HERNÁNDEZ, J. Análisis Didáctico del Lenguaje Algebraico en la Enseñanza Secundaria. Documento 46. Santa fe de Bogotá: RELME 12, 1998.

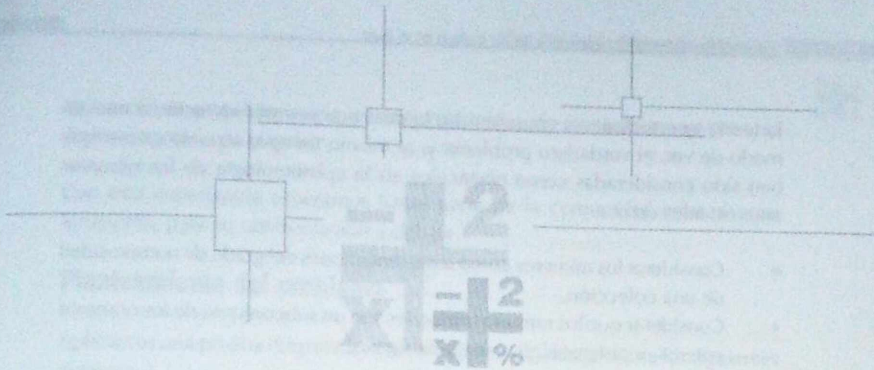
SOCAS, M. Curso: Enseñanza Aprendizaje del Álgebra en la Etapa 12-16. Documento 1 . Santafé de Bogotá: RELME 12, 1998

SOCAS M, CAMACHO M, PALAREA M y HERNÁNDEZ J. Iniciación al álgebra. Serie matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Madrid: Síntesis, 1989

Notas

* Correo electrónico: bwilliamp@hotmail.com
wbautist@redp.edu.co

(1) Las reglas de enlace refieren al orden sintáctico y semántico usual en expresiones algebraicas, como el hecho de concatenar símbolos (X,Y) diferente al dado por 25 en aritmética donde la unión de estos números expresa dos decenas y cinco unidades y en álgebra la expresión XY refiere una multiplicación de dos valores numéricos desconocidos.



Diseño y validación de una experiencia de aula con los números relativos como una vía de acceso a los números enteros

JORGE ENRIQUE REINA Y OTROS

El trabajo fue desarrollado como proyecto de grado, en el postgrado en Pedagogía y Didáctica de las Matemáticas, en la Universidad La Gran Colombia. Los integrantes del equipo fuimos: Alfonso Rodríguez Beltrán, Héctor Fabio Traslaviña Riaño y Jorge Enrique Reina Moreno. La directora del proyecto fue la profesora Eugenia Castillo Echeverri. Correo electrónico: jorgeenri55@latinmail .com

Introducción

En nuestra labor como docentes habíamos observado que los estudiantes presentaban dificultades en las operaciones con los números enteros. Pasado algún tiempo de haber trabajado con estos números se confundían, no alcanzaban los resultados esperados y tenían básicamente como recursos la memorización de las reglas de signos. Con el ánimo de buscar alternativas de solución, realizamos las lecturas sugeridas por nuestros docentes del postgrado en Pedagogía y Didáctica de las Matemáticas, y aplicamos una prueba diagnóstica a la luz de la teoría que estábamos consultando, la cual nos permitió detectar, a nuestro modo de ver, el verdadero problema y, al mismo tiempo, algunas causas que han sido consideradas como obstáculos en la epistemología de los números enteros, tales como:

- Considerar los números como representaciones del grado de numerosidad de una colección.
- Considerar que los números naturales son un subconjunto de los números enteros (epistemológicamente hablando).
- Considerar la suma como aumento.
- Considerar la resta como disminución.
- Interpretar el significado del signo más (+) como único (suma).
- Interpretar el significado del signo menos (-) como único (resta).
- Considerar el cero como absoluto.
- No darle sentido al entero aislado.
- Buscar una referencia material para la enseñanza de las operaciones con números enteros (multiplicación).

Elaboramos y validamos una experiencia de aula, enmarcada en la teoría del campo conceptual del número de G. Vergnaund, con el propósito de superar algunos de los obstáculos antes mencionados, tomando como vía de acceso el número relativo, donde la resolución de problemas escolares de estructura aditiva simple constituye la columna vertebral de nuestro trabajo, y lo introdujimos simultáneamente con las operaciones apropiadas para resolverlos. Los problemas que incluimos aparecen desde el comienzo y no solamente al final del proceso, como aplicación, pero además, estos problemas corresponden a la cotidianidad del estudiante, no son ajenos a su realidad inmediata.

Igualmente se hizo énfasis en el ir y venir entre los diferentes niveles de representación, que iban desde el lenguaje retórico hasta el lenguaje simbólico matemático, pasando por una representación prealgebraica, donde la reversibilidad adquirió gran importancia. También hicimos uso de recursos didácticos para ampliar el espectro de situaciones. En este momento somos concientes que el proceso de construcción del concepto de número entero no se puede lograr en un año, conociendo que el proceso de construcción y aceptación tardó más de 1500 años.

Esta experiencia se llevó a cabo en el grado sexto (601) de la Institución Educativa Distrital Floridablanca, sede A, jornada tarde, localidad décima de Engativá. Las directivas y los estudiantes se mostraron interesados y han venido apoyando la aplicación de esta experiencia, permitiendo iniciar, de esta manera, un proceso de investigación en el aula.

Con esta experiencia esperamos hacer parte de la comunidad educativa en formación, para su confrontación y debate.

Planteamiento del problema

Aplicamos una prueba diagnóstica con el objetivo de indagar sobre los siguientes aspectos:

- ¿Qué respuesta daban a una resta, donde el minuendo es menor que el sustraendo?
- ¿Qué respuesta daban a una resta donde la diferencia es mayor que el minuendo?
- ¿Qué idea tienen respecto a una división que no tiene que ver con repartir, ni con agrupar?
- ¿Qué respuesta daban a una suma, donde el total es menor que uno de los sumandos?
- ¿Qué idea tienen respecto a números enteros aislados?
- ¿Qué idea tienen respecto a una resta donde el minuendo es cero?
- ¿Qué idea tienen respecto a la doble orientación del tiempo?
- ¿Qué idea tienen respecto a la identificación de símbolos literales con números positivos?
- ¿Qué idea tienen respecto a la relación entre el orden en los naturales y el orden en los enteros?

Problema

Como resultado del análisis de la prueba diagnóstica, a la luz de la teoría consultada, podemos afirmar que los estudiantes de grado sexto (601) de la Institución Educativa Distrital Floridablanca, no tienen el concepto de número entero y planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Es posible que los estudiantes se aproximen a la construcción del concepto de número entero? Y si es así, ¿de qué manera podemos contribuir para que esto se logre?

Justificación

Tradicionalmente el proceso de enseñanza aprendizaje en la escuela o en nuestro sistema educativo desconoce el desarrollo epistemológico de los conceptos; considera los problemas al final, como aplicación, y generalmente estos problemas no corresponden a la cotidianidad del estudiante; está centrado en los contenidos; va directamente al trabajo con sistemas de representación de la matemática formal; no desarrollan la creatividad; la evaluación no está diseñada para identificar el nivel de desarrollo de un determinado concepto y por supuesto no se proponen situaciones que le permitan a los estudiantes franquear los obstáculos que les impide la construcción del concepto.

Objetivo general

Diseñar y validar una experiencia didáctica que le permita al estudiante operar con números naturales y relativos, mediante un sistema de representación prealgebraico; modelar situaciones problémicas de estructura aditiva y contextualizar sumas y restas indicadas, como una vía de acceso a los números enteros.

Objetivos específicos

Primera fase (Indagación y recolección de datos)

- Indagar sobre los saberes que tienen los estudiantes de grado sexto (601 J.T) de la Institución Educativa Distrital Floridablanca (localidad 10 de Engativa) sobre los números enteros.

Segunda fase (Análisis y conclusiones a partir de la propuesta de Gèrard Vergnaud)

- Analizar los resultados de las pruebas aplicadas a los estudiantes, para detectar fortalezas y debilidades.

Tercera fase (diseño y aplicación de la propuesta)

- Plantear y resolver enunciados de problemas con estructura aditiva.
- Hacer seguimiento para detectar qué obstáculos han sido superados en cada prueba aplicada, para luego proponer otras actividades que superen la dificultad encontrada.

Cuarta fase (Validación de la propuesta)

- Comparar los resultados obtenidos mediante el análisis de las actividades realizadas con la prueba diagnóstica, para determinar el impacto de esta experiencia didáctica.

El campo conceptual de las estructuras aditivas

Vergnaud considera las estructuras aditivas como relaciones ternarias que pueden encadenarse de diversas maneras; también aporta una clasificación desde la que se puede encontrar diferencias en los enunciados de los problemas.

Para Vergnaud, los números que compara son números relativos al igual que los números que transforman. Adoptando un enfoque basado en la modelación de situaciones, Vergnaud combina tipos de números y las posibles acciones sobre ellos o con ellos, y construye seis diferentes categorías (subestructuras) para las estructuras aditivas.

Figura No. 1

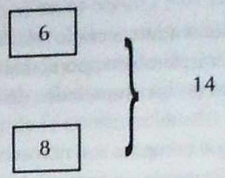
Esquema		*Representa*
▭	*El rectángulo*	*Un número natural*
○	*El circulo*	*Un número relativo*
}	*La llave vertical*	*La composición de elementos de la misma naturaleza*
⏟	*Llave horizontal*	*La composición de elementos de la misma naturaleza*
→	*Flecha horizontal*	*una transformación o una relación*
↑	*Flecha vertical*	*Igual que el anterior*

Propusimos tres colores diferentes para diferenciar los significados del signo más, dado que de esta forma se les facilitó el trabajo a los estudiantes:

+ Adición de dos números naturales.
+ Adición de un número natural y un número relativo.
+ Adición de dos números relativos.

Primera categoría: Dos medidas se componen para dar lugar a una medida.
Ejemplo: Pablo tiene 6 canicas de vidrio y 8 de acero, en total tiene 14 canicas.
Esquema correspondiente.

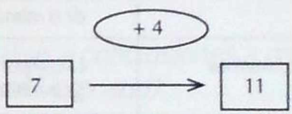
Figura No. 2



Ecuación correspondiente. $6 + 8 = 14$
+ es la ley de composición que corresponde a la adición de dos medidas, es decir, de dos números naturales.

Segunda categoría: Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida.
Ejemplo: Pablo tenía 7 canicas antes de empezar a jugar: ganó 4 canicas. Ahora tiene 11.
7 y 11 son números naturales; + 4 es un número relativo.
Esquema correspondiente:

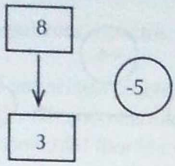
Figura No. 3



Ecuación correspondiente: $7 + (+4) = 11$
+ es la ley de composición que corresponde a la aplicación de una transformación sobre una medida, es decir, a la adición de un número natural (7) y de un número relativo (+4).

Tercera categoría: Una relación une dos medidas.
Ejemplo: Pablo tiene 8 canicas. Jaime tiene 5 menos; entonces tiene 3.
Esquema correspondiente.

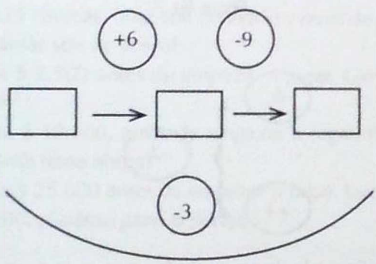
Figura No. 4



Ecuación correspondiente: 8 + (-5) = 3 es una relación estática.

Cuarta categoría: Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación.
Ejemplo: Pablo ganó 6 canicas ayer y hoy perdió 9. En total perdió 3.
Esquema correspondiente.

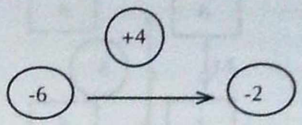
Figura No. 5



Ecuación correspondiente: (+6) + (-9) = (-3).
+ es la ley de composición que corresponde a la adición de dos transformaciones, es decir, de dos números relativos.

Quinta categoría: Una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.
Ejemplo: Pablo le debía 6 canicas a Enrique. Le devuelve 4. Sólo le debe 2.
Esquema correspondiente:

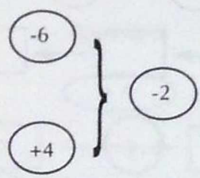
Figura No. 6



Ecuación correspondiente: (-6) + (+4) = (-2).
+ es la ley de composición que corresponde a la operación de una transformación sobre un estado relativo.

Sexta categoría: Dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo.
Ejemplo: Pablo le debía 6 canicas a Enrique. Pero Enrique le debe 4. Pablo le debe entonces sólo 2 caninas a Enrique.

Figura No. 7



(- 6) + (+ 4) = - 2   Son relaciones - estados que se componen entre si.

Figura No. 8

Para distinguir estas categorías se explicarán los esquemas correspondientes y las ecuaciones numéricas equivalentes a dichos esquemas. Para lograr entenderlos se utilizarán los siguientes códigos:

A continuación presentamos un resumen de algunas de las actividades que diseñamos para que fueran desarrolladas por los estudiantes.

Actividad No. 1

Considerar cada uno de los siguientes aspectos, en los enunciados problema:

- Indicar la categoría del enunciado problema, según Vergnaud.
- Elaborar el esquema, identificando los elementos que en él intervienen.
- Indicar, ¿qué es lo desconocido? (por lo cual se indaga).
- Identificar y escribir los números involucrados en el proceso de solución.
- Escribir la ecuación correspondiente, teniendo en cuenta las convenciones previamente establecidas.
- Redactar la respuesta.

Enunciados problema

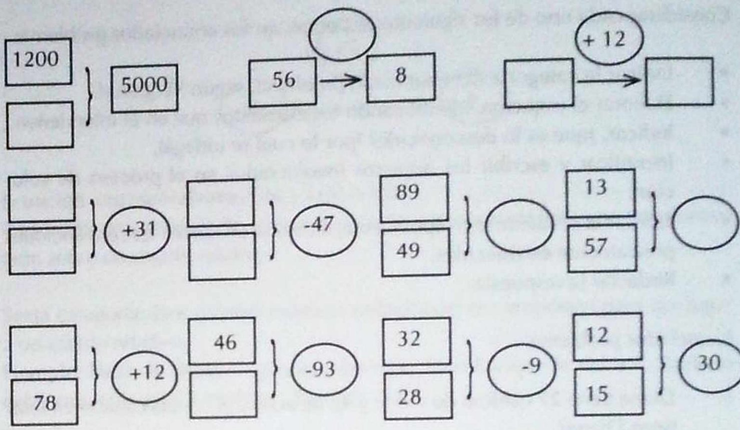
1. Diana tiene 27 canicas de vidrio y 46 de acero. ¿Cuántas canicas en total tiene Diana?
2. José tiene 325 canicas, unas son de vidrio y otras de acero. Si 193 son de vidrio, ¿Cuántas son de acero?
3. Gloria tenía $ 3.500 antes de empezar a jugar. Ganó $ 7.850. ¿Cuánto tiene ahora?
4. Andrés tenía $ 10.000, antes de empezar a jugar. Perdió $ 3.800 en el juego. ¿Cuánto tiene ahora?
5. Héctor tenia $ 25.000 antes de empezar a jugar. Luego del juego, quedó con $ 52.500. ¿Cuánto ganó o perdió?

Una fortaleza que se evidenció en este trabajo fue la facilidad para identificar la categoría a la cual correspondía el enunciado problema, partiendo del esquema. Esto nos llevó a proponer la segunda actividad aprovechando la fortaleza antes mencionada, para superar las debilidades detectadas en la anterior actividad.

Actividad No. 2

Escribir un enunciado problema, para cada uno de los siguientes esquemas y considerar nuevamente los aspectos mencionados en la actividad No. 1.

Figura No. 9



Observamos que algunos estudiantes se apoyaban con éxito en la contextualización de expresiones para resolverlas y planteamos entonces la siguiente actividad para fortalecer este trabajo.

Actividad No. 3

Plantear para cada ecuación un enunciado problema que corresponda a una de las tres primeras categorías; resolver la ecuación y redactar la respuesta.

1.	320 +	=1005	4. 11498 +	= 1
2.	(+ 456) +	= 3561	5. + (- 895)	= 9
3.	467 +	= 467	6. 43128 +	= 126794

Dado el relativo éxito conseguido hasta el momento con estas actividades, decidimos repetirlas con las otras tres categorías.

Conclusiones y reflexiones

Algunos estudiantes se acercaron al concepto de número entero, porque no consideraban al número relativo como representación del grado de numerosidad de un conjunto discreto; no consideraban siempre la suma como aumento, ni la resta como disminución; le daban diferente significado al signo más; no interpretaban el signo menos, únicamente como resta; consideraban el cero también como relativo. Por supuesto, cuando se trabajaba con números "grandes" la dificultad aumentaba. El ideal era que todos los estudiantes lograran acercarse al concepto de número entero, teniendo en cuenta que eran niños de 10 años en promedio, lo cual nos parecía que era un buen comienzo. También somos conscientes que debemos generar rupturas para trabajar con los números enteros propiamente dichos, pero ese será un trabajo que no conviene en este nivel, ni en este grado.

Referencias bibliográficas

Vergnaud, G. (1991) El niño, las matemáticas y la realidad. México. Editorial Trillas.

Castro E. Rico L. y Castro, E. (1995). Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Una empresa docente. Editorial iberoamericana.

Rojas, P. y otros (2002). Aritmética y resolución de problemas en la formación de profesores. Cuaderno de trabajo. Grupo matemáticas escolares-MESCUD. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Centro de investigaciones y desarrollo científico.

Gonzáles, J. y otros (1990). Números enteros. Editorial Síntesis.

Ministerio de Educación Nacional. (1998), Lineamientos curriculares. Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (1996), Ley general de educación. Editorial Unión Limitada.

Repensando las clases de matemáticas

OLGA LUCÍA MONROY
I.E.D. SIMÓN RODRÍGUEZ

Introducción

El presente trabajo está fundamentado en un estudio exploratorio de la evolución de la actitud hacia las matemáticas de alumnos de sexto grado del I.E.D. Simón Rodríguez a través del curso de matemática del año 2005. La experiencia se realizó con dos grupos de matemática de sexto grado; el primer grupo, de 30 alumnos, más o menos homogéneo por sus edades e intereses similares y el otro, de 32 alumnos, un poco más heterogéneo, por sus intereses diversos y por su procedencia de diferentes instituciones y jornadas. Uno de los objetivos del curso fue motivar a lós alumnos hacia la matemática y a ser críticos en sus evaluaciones.

Como guía del estudio se tuvo una búsqueda a la respuesta de la pregunta: ¿Por qué es tan acentuada la problemática del aprendizaje escolar de los estudiantes en la asignatura de matemáticas? Esta búsqueda llevó a concluir que se debe repensar el quehacer pedagógico en las clases de matemáticas. La experiencia ha reflejado dificultades en los alumnos debido por una parte a la actitud negativa de algunos hacia las matemáticas y de otra parte a las bases conceptuales que son tan disímiles, pues algunos muestran bases fuertes, mientras que otros no las tienen. En este último grupo se encuentran niños que han faltado bastante a clase, son repitentes, o pertenecen a familias que han sido víctimas de desplazamiento.

Profundizar en la comprensión de las problemáticas vinculadas con el aprendizaje, exigió realizar un seguimiento desde el comienzo del curso y, además, generar un ambiente que propiciara tanto la reflexión acerca de las creencias de los estudiantes hacia las matemáticas, como la expresión de sus opiniones y sugerencias para el desarrollo de las clases. Por tanto, el trabajo en el aula se organizó de modo que permitiera a los estudiantes valorar sus progresos, dificultades y logros durante el transcurso del año, y explicar y cuestionar las razones que los han llevado a tomar una actitud positiva o negativa hacia la matemática.

Objetivos

1. Generar en los alumnos un ambiente de reflexión acerca de sus creencias hacia las matemáticas y conocer sus opiniones y sugerencias para contribuir a la creación de un mejor ambiente alrededor de ellas.
2. Justificar las razones que conllevan a los alumnos a tomar una actitud negativa hacia las matemáticas, para así poder contribuir hacia un cambio de actitud.
3. Conocer el proceso de aprendizaje que siguen los alumnos, es decir, sus progresos, dificultades, logros durante el transcurso del año.
4. Motivar a los alumnos para que se cuestionen acerca de su gusto y actitud hacia las matemáticas.

Actitud Inicial de los estudiantes hacia las matemáticas

Durante la primera semana de clase se indagó sobre algunos aspectos relacionados con las experiencias vividas por los alumnos en cuanto a las matemáticas. Para ello se realizó una mesa redonda y cada uno opinó sobre: gusto por la materia, aplicación, motivación, antecedentes, aptitudes. Luego se realizó una encuesta encaminada a crear un momento de reflexión en el alumno sobre su posición frente a las matemáticas.

La encuesta estaba dividida en 4 secciones de la siguiente manera:

A. Actitud hacia las matemáticas
B. Agrado y desagrado
C. Calificación rango de 1 a 11
D. Cambios en la actitud hacia las matemáticas

Categorización de la actitud hacia las matemáticas

Favorable

- Ejemplo: "Las matemáticas son divertidas".

Neutra

- Ejemplo: "Las matemáticas no me entusiasman, pero realmente tampoco me desagradan".

Desfavorable

- Ejemplo: "las matemáticas no me gustan porque no las entiendo".

Sección A (2)

A continuación encuentra algunas expresiones. Léalas una por una. Si su opinión coincide con alguna de ellas, encierre el número de la expresión en un círculo.

Fuera de clase pienso en problemas de matemáticas cotidianos y la forma de resolverlos.

1. Me siento inseguro de mi mismo en matemáticas.
2. Me gusta ver que puedo trabajar los problemas matemáticos en forma rápida y precisa.
3. Las matemáticas me gustan tanto como otros temas.
5. Me gustan las matemáticas porque son prácticas.
6. Nunca me han gustado las matemáticas.
7. Las matemáticas no me entusiasman, pero realmente tampoco me desagradan.
8. Las matemáticas son tan importantes como cualquier otra materia.
9. Las matemáticas son algo que tiene que hacer aunque no le agrade.
10. Algunas veces me agrada el desafío que presenta un problema matemático.
11. Las matemáticas siempre me han dado miedo.
12. Me gustaría pasar más tiempo en el colegio trabajando con matemáticas.
13. Detesto las matemáticas y siempre evito usarlas.
14. Me agrada hacer problemas cuando sé cómo resolverlos.
15. Evito las matemáticas porque no soy muy bueno con las figuras.
16. Las matemáticas me emocionan y me gustan más que otras materias.
17. Nunca me canso de trabajar con números.

18. Me da miedo resolver problemas con palabras.
19. Las matemáticas son muy importantes.
20. Aunque los trabajos de matemáticas no son divertidos yo siempre quiero hacerlos bien.
21. Pienso que las matemáticas son la materia más agradable que he estudiado.
22. No veo mucho valor en las matemáticas.

Sección B

Léalas todas, subraye dos razones de su desagrado.

1. Las Matemáticas no me gustan porque no las entiendo.
2. Las matemáticas son demasiado difíciles y complicadas.
3. No soy bueno en matemáticas, no aprendo fácilmente, estoy inseguro de mi mismo.
4. Me aburren, porque son las mismas cosas una y otra vez y yo no puedo memorizar.
5. Las matemáticas me desagradan por los malos maestros que no explican bien.
6. En matemáticas son demasiados reglas y demasiados trabajos.
7. Las matemáticas me desagradan por las tareas.
8. En realidad no les veo valor a las matemáticas. Algunas partes son innecesarias.

Léalas todas, subraye dos razones de su agrado.

1. Necesitamos las matemáticas en la vida actual y en la futura, por sus aplicaciones prácticas.
2. Las matemáticas son interesantes.
3. Las matemáticas son divertidas.
4. Las matemáticas se pueden trabajar bien y con facilidad.
5. Las matemáticas son como un juego, me desafían y me entretienen.
6. Mejoran el pensamiento, dan exactitud, ayudan a probar teorías y a valorar.
7. Los buenos maestros que explican y son agradables me han ayudado para que me gusten las matemáticas.
8. El entrenamiento matemático me ha facilitado el gusto por esta materia.
9. Me siento satisfecho cuando estoy trabajando con problemas matemáticos.

Sección C

A continuación hay una serie de once (11) números:
El uno (1) significa disgusto total por las matemáticas; conforme va subiendo el valor, significa más agrado por la materia, hasta llegar al once que significa gusto total por las matemáticas.
Encierre con un círculo el número que mejor se muestre su relación con las matemáticas.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Para el análisis de estos resultados se dividieron los valores en 5 categorías [1,3], [3,5], [5,7], (7,9), [9,11], (utilizando la escala de medición de Thurstone que mide de 1 a 11) retomando para el análisis:
[1,3] como extremo desfavorable (D)
[5,7] como intervalo neutral (N)
[9,11] como extremo favorable (F)

Datos de la encuesta sección A

Tabla No. 1

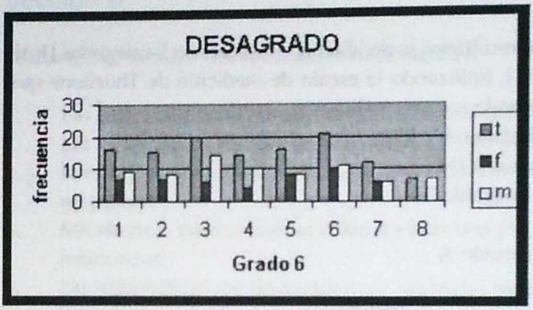
Los resultados obtenidos según las tres clasificaciones fueron:

Valor escalar	número reactivo	frecuencia	62 alumnos %
1.0	A13	49	79.03
1.5	A6	52	83.87
2.0	A18	23	37.10
2.5	A11	11	17.74
3.0	A22	9	14.52
3.2	A15	19	30.65
3.3	A9	31	50.00
3.7	A22	17	27.42
4.6	A20	39	62.90
5.3	A7	44	70.97
5.6	A4	29	46.77
5.9	A8	16	25.81
6.7	A14	17	27.42
7.0	A10	5	8.06
7.7	A5	7	11.29
8.1	A19	2	3.23
8.6	A3	41	66.13
9.0	A12	35	56.45
9.5	A1	21	33.87
9.8	A17	22	35.48
10.4	A21	20	32.26
10.5	A16	26	41.94

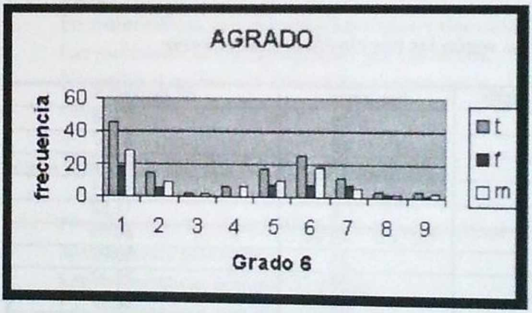
Tabla No. 2

	desfavorable	neutra	favorable
Sección A	41.74	24.28	35.94
Sección C	53.62	30.43	7.25

Gráficas No. 3 y 4



Respecto al desagrado las razones más subrayadas fueron 3 y 6 como se muestra en la gráfica (t=total, f=femenino y m=masculino)



Respecto a las razones de agrado la de más alto porcentaje fue la 1 y en uno más bajo la 6 y la 5 en ese orden

Procesos de evaluación

Periódicamente se realizaron preguntas tanto escritas como orales para ir conociendo los posibles cambios en las opiniones dadas en un comienzo. Algunas de las preguntas planteadas fueron:

Hoy aprendí...
El tema de hoy es aplicable a...

Hoy descubrí...
Hoy aclaré dudas sobre...
El tema de hoy me motivó a...
Hoy me sorprendió que...

Explíquele el tema por escrito a un alumno que no haya venido a clase.
Al mismo tiempo se realizó un trabajo de portafolio el cual consistía en que cada alumno debía guardar sus trabajos, consignando allí todas las dificultades y logros de la materia. Se dio la opción de que cada alumno escogiera qué trabajos presentaba para la "evaluación", en el cual debía mostrar una justificación de su escogencia, y de esta forma se pudieron identificar los temas de mayor dificultad: algunos problemas de aprendizaje, sugerencias para el desarrollo de los temas, y sobre todo, conocer las opiniones sobre el curso a medida que pasaba el tiempo.

Paralelamente se realizaron entrevistas a algunos alumnos respecto a cómo habían trabajado las matemáticas en la primaria, qué actividades le gustaban y cuáles no, qué los motivaba o no a estudiar la materia, etc, y también se realizaron observaciones permanentes en el transcurso de la clase, tanto de manera individual como grupal, respecto al comportamiento y preguntas que realizaban los alumnos o sugerencias que planteaban tanto para el tema como para la clase.

Durante el transcurso del año escolar se hizo énfasis en la evaluación y se trabajó simultáneamente con diferentes metodologías para analizar el error.

Metodologías aplicadas

Las clases se desarrollaron con los estudiantes de una manera tradicional, es decir, con clases magistrales, talleres desarrollados en grupo e individuales, etc., y para afianzar estos conocimientos se propuso utilizar tres metodologías diferentes pero todas basadas en la reflexión acerca del error cometido por los estudiantes, teniendo en cuenta que la clase de errores que se cometen tienen diferentes orígenes, gravedad y formas de abordarse.

Lo primordial en todo momento fue tener despierto el interés del estudiante en la materia y para esto era necesario identificar exactamente la clase de problemas que estos presentan y motivar también a los estudiantes que no cometen errores, dando la posibilidad de explicarles a sus compañeros sus experiencias y conocimientos en matemáticas; por tal motivo se propusieron estas tres metodologías:

1. Reconstrucción de soluciones.
2. Reflexionando acerca del error.
3. Identificar y comentar los errores.

Reconstrucción de soluciones

En algunas de las sesiones de trabajo individual se analizó el trabajo entregado y se definieron unos códigos para señalar los errores. Luego se marcaron, al lado del renglón del texto donde se localiza la presencia del error, el código apropiado según el caso. Los códigos utilizados fueron los siguientes:

Tabla No. 5

Código utilizado y su significado	
•	Hay un error de tipo conceptual o de interpretación
•	Hay un error que es consecuencia de errores que se cometieron anteriormente
•	Hay un error en los cálculos realizados
•	No hay error, está bien respondido

En la siguiente sesión se entregó a los estudiantes las soluciones individuales señaladas con los códigos anteriores y se pidió que la revisaran y prepararan una solución conjunta.

Esta metodología es sencilla de aplicar y puede llevarse a la práctica en el desarrollo de otro contenido. Se espera que los estudiantes escriban explícitamente las dificultades relacionadas con cada error. Sin embargo, se encontró que los estudiantes reflexionan muy poco sobre los errores. En realidad sucedió, que cuando ellos encontraban que el compañero no tenía error donde el otro si lo tenía, elegían las partes que no tenían error, cotejaban las respuestas de todos y "armaban" la solución correcta. Sin embargo, muchos estudiantes no comprendieron cuál era el error que habían cometido. Una sugerencia para esto puede ser introducir una variante en la instrucción y en lugar de que analicen las evaluaciones y preparen una solución conjunta, los alumnos localicen cada uno de los errores cometidos, corregirlos y explicar por qué cree que los cometieron.

Reflexionando acerca del error

En la primera sesión se entregó a los estudiantes el enunciado de una situación problemática para resolver de manera individual. Los estudiantes desarrollaron soluciones que luego se revisaron. El trabajo de revisión consistió en realizar una lista con una descripción de cada uno de los errores encontrados, numerandolos e incluso, en algunos casos, insinuando con un comentario una estrategia para corregirlos. Para la sesión del trabajo en grupo, a cada estudiante se le devolvía la solución con los errores señalados por el profesor, junto con el listado completo de la descripción de errores. Finalmente, la instrucción para la sesión de trabajo en grupo fue revisar los trabajos individuales, discutir en grupo, corregir cada uno de los errores cometidos individualmente y presentar las correcciones y la nueva solución.

Esta metodología le permite a los estudiantes que no han cometido errores, explicarle a los que sí lo cometieron. Sin embargo, presenta algunos inconvenientes: las ayudas dadas al estudiante en algunas ocasiones no lo orientan sino que lo confunden y cuando corrige el error, si no se le insiste en que debe explicar las causas que lo originan, hace un análisis muy superficial de éste.

Esta metodología exige de parte del profesor una revisión cuidadosa de los trabajos que entregan los estudiantes, lo que indica dedicarle un tiempo considerable. Sin embargo, este tiempo es recompensado por el conocimiento más profundo que adquiere el profesor sobre la naturaleza de los errores. Además le permite llevar a cabo una evaluación de tipo cualitativo para cada estudiante, al hacerle el seguimiento concreto de los errores que comete a lo largo de su proceso de aprendizaje.

Identificar y comentar los errores

Para aplicar esta metodología se necesita tener un conocimiento a priori de una buena colección de los errores que han presentado los estudiantes. La metodología consistió en elaborar como enunciado una propuesta ficticia de una solución de algún estudiante con errores marcados pero sin explicar en qué consistían. Cada estudiante debía explicar el error y corregirlo apropiadamente. Luego, se revisó la solución y teniendo en cuenta lo observado, se hizo un diseño similar para realizarlo en la sesión de trabajo en grupo. La instrucción que se dio para el trabajo en grupo fue igual a la que se dio para el trabajo individual: explicar los errores y corregirlos. Sin embargo se esperaba, como realmente se encontró, que la corrección de los errores fuera más fructífera

Como desventajas de esta metodología se encontró que el estudiante no siempre identifica todo lo que está "detrás" del error. En muchos casos sólo identificó el error de manera parcial. Se llegó a esta metodología después de haber ensayado las otras. Pienso que es muy útil cuando el profesor quiere investigar acerca de las concepciones que tienen los estudiantes sobre un concepto específico.

Actitud hacia las matemáticas al finalizar el curso

Aquí está la sección D de la encuesta propuesta que se aplicó al finalizar el curso.

Sección D

Elija la opción que corresponda a su situación personal.

¿Qué ocurre con sus actitudes hacia las matemáticas durante este lapso del año escolar?

( ) a. Permanecen en el agrado.
( ) b. Permanecen en el desagrado.
( ) c. Cambiaron de agrado a desagrado.
( ) d. Cambiaron de desagrado a agrado.

Finalmente se realizó una entrevista personal a algunos alumnos. Éstas permitieron conocer si realmente hubo cambios de actitud hacia la matemática y en qué medida las estrategias utilizadas en clase contribuyeron a dicho cambio.

Se les pidió a algunos alumnos que escribieran una carta a otro alumno que va a tomar el curso por primera vez, contando sus dificultades y opiniones, al igual que sugerencias y metodología de estudio.

Preguntas como: ¿qué aprendieron hoy?, ¿qué fue lo que más les gustó de la clase?, ¿a qué vienen a clase? nos pueden ayudar a conocer la opinión real del estudiante sobre el curso, a que reflexionen sobre las actividades que están realizando y evalúan en su desempeño. En la medida que estas preguntas se hagan periódicamente y se tomen como base para la discusión con el grupo, fortalecerán la capacidad de crítica y les permitirá hacer un análisis de su desempeño.

Algunos ejemplos de respuesta:

¿A qué viene a clase?

- A sufrir.
- Para cumplir un requisito.
- Encontrar nuevos caminos de ver la vida.
- Comprender a los demás y a mí mismo.
- Vengo a pasarla bueno. Es divertido aunque no fácil, ya que se trabaja mucho con relación a otras materias, pero es motivante.
- Algunas veces aprendo mucho de toda la gente, pero hay temas que no me interesan.
- Yo vengo antes que todo a divertirme, pero a divertirme aprendiendo.

¿Qué aprendió hoy?

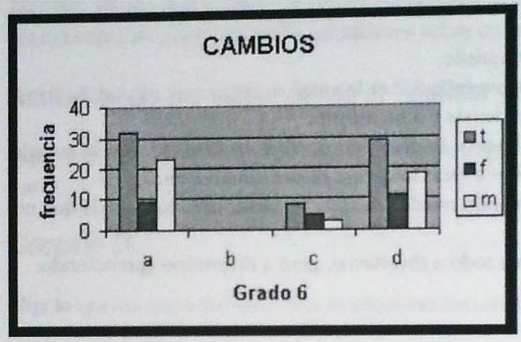
- A vencer un poco la timidez.
- Cosas interesantes, como que los números son algo inherente al hombre.
- Aprendí cómo los números han sido parte fundamental de la historia del hombre.
- Aprendí sobre el sistema de nudos de colores utilizado por los incas, que les servía para contar y para otras cosas.
- Que con el cuerpo se pueden crear muchos números distintos.
- A respetar opiniones así no las comparta.
- Que la capacidad del hombre es ilimitada, al igual que su imaginación.
- Que tengo que aprender y leer más.

El estudiante está acostumbrado a la evaluación sumativa y cuando se tiene que enfrentar a una formativa no tiene suficiente criterio. La realización de preguntas acerca de la clase o del desempeño del estudiante en ella (preguntas que no son de contenido), nos permite conocer la actitud de los alumnos ante el curso y los conduce a ellos a cuestionarse acerca de su labor, independientemente de la nota.

Los resultados obtenidos de la sección D de la encuesta fueron:

a. 31
b. 0
c. 5
d. 26

Gráfica No. 6



En la gráfica se ve que no hubo estudiantes que permanecieron en desagrado y se ve un cambio notorio de desagrado a agrado aunque un pequeño porcentaje cambió de agrado a desagrado.

A partir del trabajo realizado se generó un esquema general de análisis para llevar a cabo la tarea de diseñar, aplicar y evaluar situaciones problemáticas. Se consideró, entre otros, el análisis del aprendizaje de los estudiantes que se basó principalmente en el análisis de sus errores y que dio pie para postular algunos obstáculos de conocimiento para ellos.

Respecto a este trabajo el profesor pudo identificar con una mayor claridad los orígenes de las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de matemáticas y diseñar estrategias más adecuadas para atacar estos problemas. Mediante el análisis de los errores los estudiantes interiorizaron las dificultades que tenían y también cambiaron sus estrategias y sus métodos de estudio, lo que permitió obtener mejores resultados.

Por otro lado se pudo presentar otra faceta de una clase de matemáticas diferente a la que los alumnos y profesores estamos acostumbrados y esto fue parte de la motivación que se dio en el curso.

El hecho de preguntarse en algunas ocasiones sobre qué aprendió o le sorprendió, motivó a que los alumnos recapacitaran sobre temas de la clase, historia, aplicaciones, etc.

Referencias Bibliográficas

Stenmark, J. Mathematics Assessment, Myths, Models, Good Questions and Practical Suggtions. NCTM.

Kilpatrick, J. (1995) Evaluación. I Simposio internacional en educación matemática.

Rico, L. (1995.) Errores en el aprendizaje de las matemáticas. I Simposio Internacional en educación matemática.

Borassi, J. (1987). Exploring mathematics trough the análisis of errors. For the Learning of Mathematics, 7, (3), 2-8.

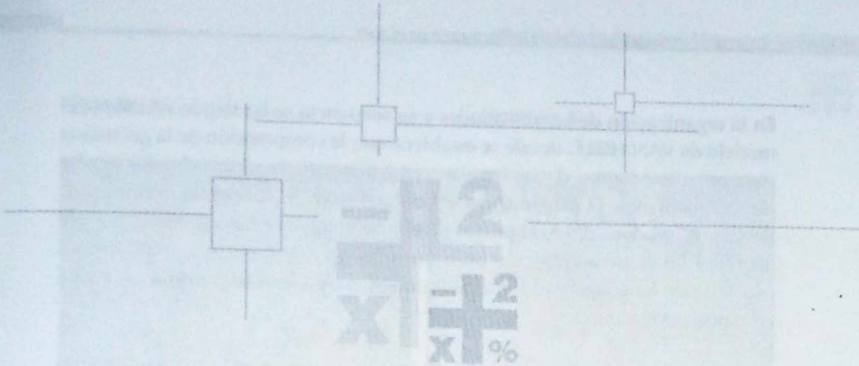
Valdez, E. (1998). Rendimiento escolar y actitudes hacia las matemáticas. Una experiencia en la escuela secundaria. Cinvestav. IPN. México.

Fernández, F., Monroy O, Rodríguez L. (1998). Diseño, desarrollo y evaluación de situaciones problemáticas de estadística.

Notas

(1) Comentarios o preguntas sobre el texto pueden enviarse a olmonroy@hotmail.com o omonroy@redp.edu.co

(2) Valdez, Eréndida. Págs 111-114



Uso de materiales didácticos para la enseñanza de la geometría y la matemática

SANDRA LILIANA CRISTANCHO PRADA,
ANA DE JESÚS DÍAZ JIMÉNEZ,
LEONOR RIGUEROS CHAPARRO
IED ATAHUALPA

El presente trabajo tiene por objeto dar a conocer algunas estrategias didácticas para la enseñanza de la geometría y las matemáticas, haciendo uso de materiales como: geoplano, pentomino, regletas de cousinaire, palillos, dominó, tangram y otros, los cuales facilitan en el estudiante el aprendizaje de temas que anteriormente presentaban dificultad.

El trabajo práctico se está llevando a cabo en la Institución Educativa Distrital Atahualpa desde el año 2003 y en vista de los avances significativos observados, la cobertura se ha ampliando a otros grados. El énfasis del trabajo está centrado en el desarrollo del pensamiento espacial, considerado como "el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen las representaciones mentales de los objetos y el espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y su representación fáctica." (1)

En la organización de las actividades y su secuencia se ha tenido en cuenta el modelo de VAN HIELE, donde se establece que la comprensión de la geometría pasa por cinco formas de ver los conceptos geométricos, denominadas niveles de razonamiento. El progreso de la comprensión de conceptos geométricos siempre se produce desde el primer nivel y de manera ordenada. No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles, ya que cada uno de ellos lleva asociado un lenguaje, y el paso de un nivel al siguiente se produce en forma continua y pausada.

Se parte de la manipulación de material concreto y se avanza hasta el ordenamiento de propiedades que pueden ser captadas por los mismos alumnos. De esta manera se puede avanzar desde el primer nivel de razonamiento planteado por este modelo (visualización) hasta el tercero (ordenamiento), alcanzando objetivos específicos en cada uno de los niveles.

Basadas en la teoría anterior y ante la necesidad de dar un manejo dinámico a la geometría y la matemática, encontramos que a través del uso de materiales concretos y tangibles es posible potenciar el desarrollo de procesos de comprensión, análisis, representación y demostración de conceptos más complejos.

Los materiales didácticos en el aula permiten dinamizar cada una de las actividades que se realizan, posibiliandole a los estudiantes gozar cada momento del aprendizaje y desarrollar procesos de comprensión, análisis y demostración de los conceptos que van construyendo.

El material concreto y tangible posibilita la observación, la manipulación y la representación mental y gráfica, y a partir de este proceso los niños se acercan gradualmente a la comprensión de conceptos más complejos.

Figura No. 1

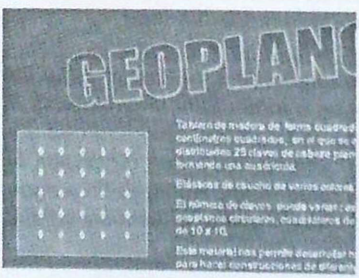


Figura No. 2

Figura No. 3

Figura No. 4

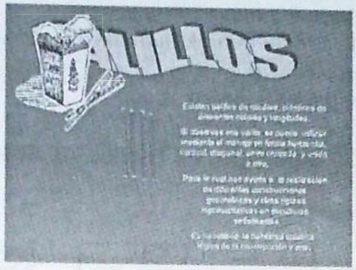


Figura No. 5

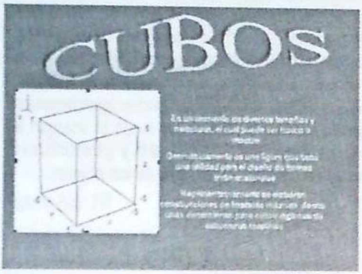


Figura No. 6

Figura No. 7

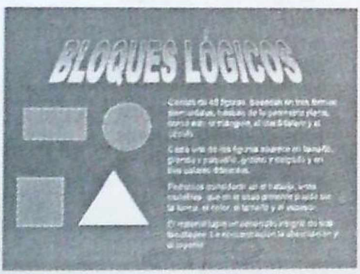
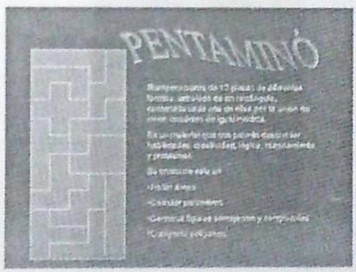


Figura No. 8



Todos estos materiales son muy conocidos y tienen su origen en diferentes culturas que los han utilizado desde la antigüedad.

La cartilla *Uso de materiales didácticos para la enseñanza de la matemática* está dirigida a los maestros de aula de preescolar y básica primaria. Consta de 6 unidades didácticas así:

La topología, un mundo por descubrir

Figura No. 9

El acercamiento directo del niño para el aprendizaje de la geometría parte de la Topología que está definida como la rama de las matemáticas que estudia aquellas propiedades de los objetos geométricos que permanecen invariables cuando se someten a transformaciones. Cuando se hace referencia al conocimiento topológico de los niños se busca que ellos encuentren atributos de los objetos diferenciando lo variable de lo invariable, que aprecie distancias sin tener en cuenta patrones convencionales de medida, que explore sólidos, y tenga las primeras apreciaciones de frontera exterior e interior que luego lo acercan a la conceptualización de perímetro y polígono sin necesidad de enfatizar la longitud de los objetos.

Elaborando caminos

Figura No. 10

Los laberintos y recorridos son importantes porque inician al niño en la adquisición de los conceptos de líneas, fronteras, magnitudes, trayectorias, punto de partida y punto de llegada, y además desarrollan el sentido de orientación en el plano.

Girando, girando

Figura No. 11

A partir de ejercicios corporales, elementos del entorno y material tangible, se lleva al niño a descubrir y aproximarse al concepto de ángulo y sus movimientos en el plano.

Formando figuras

Figura No. 12

A partir del trazo de líneas abiertas o cerradas en diferentes direcciones y con la ayuda de los tetrábolos, el estudiante explorará la formación de figuras para llegar a la construcción de polígonos.

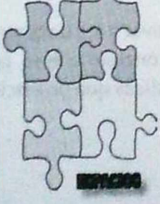
Midiendo fronteras

Figura No. 13

Con la ayuda del cuerpo humano se establecen patrones antropométricos que sirven para reconocer propiedades y nociones de magnitud de los objetos. En esta unidad se maneja tangram, geoplano y tetrábolos.

Recubriendo espacios

Figura No. 14



Los recubrimientos de espacios en el plano se realizan con pentomino, plastilina y témpera para acercar al estudiante al concepto de región o área.

Al iniciar cada unidad didáctica se presentan los objetivos específicos para cada uno de los conceptos a desarrollar, luego se describen los materiales indispensables para la aplicación de la guía y finalmente las actividades.

Cada unidad didáctica permite al docente poner en juego su creatividad en el desarrollo de otras actividades, siendo una herramienta de trabajo práctica y dinámica. Además posibilita al estudiante el acercamiento a un lenguaje geométrico y matemático adecuado mediante el uso de los términos correspondientes a cada uno de los conceptos que se manejan.

Durante el tiempo que se ha manejado la cartilla con los estudiantes de la I.E.D. Atahualpa se han podido observar los siguientes resultados:

- Los niños disfrutan al máximo cada una de las actividades, a travéz de las cuales se logra despertar y mantener el interés por descubrir su espacio y la debida apropiación.
- Cada una de las unidades didácticas propicia el desarrollo de habilidades para observar, describir, construir, deducir, representar y aplicar.
- Las actividades realizadas dentro de cada unidad desarrollan destrezas manuales y habilidades para visualizar detalles, siendo esto un excelente apoyo para el desempeño en la lecto-escritura.
- Se desarrolla la capacidad para analizar y se encuentra una explicación lógica para cada concepto matemático.
- La conceptualización se produce mediante la deducción, después de haber realizado actividades de manipulación, observación y representación.
- El maestro interactúa con los estudiantes desempeñando el rol de orientador, asesor y retroalimentador, propiciando relaciones de cordialidad y amistad en el grupo escolar.
- La percepción espacial de los estudiantes mejora notablemente reflejándose en las composiciones gráficas, manejo de su esquema corporal y movimientos en el espacio.
- En los maestros se logró despertar interés por integrarse al desarrollo de la nueva propuesta pedagógica y mantener una actitud de dinamismo frente a la enseñanza de la geometría y la matemática.

El propósito de este trabajo consiste en motivar a los docentes para que aprovechen los recursos didácticos y el material concreto que se puede construir con los estudiantes y desarrollen actividades lúdicas que potencien el pensamiento geométrico y matemático.

Referencias bibliográficas

BURGUES, Carme. Materiales para construir la geometría.

CASTRO, Encarnación, Castro Enrique. Estimación en cálculo y medida. Editorial síntesis.

CLEMENS, Stanley. Geometría con aplicaciones y soluciones de problemas, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. 1989.

FRIEDRICHS. De Pitágoras a Einstein. Ed. Norma.

HOFFER, A. (1983) Van Hiele. Aplicaciones de Matemáticas., M. (1983): N. York: Academia Pres... Pp. 205-227.

Lineamientos Curriculares en Matemática.

Ministerio de Educación Nacional (2003). Estándares Básicos de calidad para la Educación.

SIGMA . El Mundo de las Matemáticas. James R. Newman. Ed Grijalbo.

Notas

(1) Lineamientos curriculares de matemáticas. MEN. 1998.

Matemática a la medida de los niños

Grupo de trabajo en Educación Matemática para Pre-escolar y Básica Primaria

Propuesta: Descubro la matemática
Proyecto: Matemática a la medida de los niños

COORDINADORA DEL PROYECTO:
MERY AURORA POVEDA*

INSTITUCIONES PARTICIPANTES:
IED VILLA AMALIA. LOCALIDAD DE ENGATIVÁ
IED QUIBA ALTA. LOCALIDAD CIUDAD BOLÍVAR
IED BRAZUELOS. LOCALIDAD DE USME
IED FLORIDABLANCA. LOCALIDAD DE ENGATIVÁ
SOCIEDAD SABERES Y ESCUELA

Problema que se busca solucionar

Desde el punto de vista de la educación matemática

La enseñanza de la matemática en la Educación Básica tradicionalmente se ha enfocado al dominio de unas técnicas para manipular símbolos y buscar el resultado correcto. En este tipo de enseñanza hay muy poco espacio para la búsqueda de significados, la comprensión, el análisis, la invención y la argumentación. Las reglas y procedimientos se aprenden y las técnicas se aplican de acuerdo con unas situaciones típicas, por lo que no es necesario debatir y argumentar nada. Como no es necesario comprenderlas para seguirlas, fácilmente se olvidan y muchos no logran encontrar las conexiones necesarias entre técnicas y situaciones de aplicación. Son además muchos los estudiantes, que al no poder asignar significado y sentido a lo que hacen en la clase de matemáticas, terminan odiando todo lo que se relacione con ella.

Dada la distancia conceptual entre la matemática altamente formalizada y lo que los alumnos de educación básica están en capacidad de comprender, se podría pensar como justificable la enseñanza y el aprendizaje de técnicas. Lo que es curioso es que precisamente son estas técnicas las que realizan con mayor eficiencia y rapidez las calculadoras (para eso han sido creadas) por lo que el espacio de la educación matemática debería estar orientado a aquello que las calculadoras no pueden hacer: analizar, comprender y decidir sobre las diferentes situaciones problemáticas con las que interactuamos, encontrar regularidades y crear modelos a partir de la realidad, inventar nuevos procedimientos y técnicas para resolver situaciones. En una palabra, la educación matemática debería potenciar las capacidades propias de los seres humanos y por lo tanto indelegables a las máquinas.

Desde el punto de vista de la formación y actualización de docentes

La formación disciplinar casi siempre se ha enfocado a los profesores de los grados sexto a noveno de Educación Básica y a los grados décimo y once de educación media, creemos que por dos razones fundamentalmente:

- El imaginario que sigue predominando es que los docentes de Pre-escolar y de Primaria no necesitan profundizar en las disciplinas por cuanto el conocimiento general que poseen como adultos letrados pertenecientes a la comunidad, es suficiente para abordar la educación disciplinar básica.

(Casi se podría afirmar que en el imaginario de la mayoría de las personas, cualquier persona con un poco de paciencia y tolerancia con los niños puede ser maestro de Pre-escolar y Primaria)

- El sistema educativo asigna un docente de primaria por grupo responsable de todas las áreas por cuanto la prioridad que se asigna es la de socialización primaria: normas básicas de interacción social, ubicación en grupos más amplios que los familiares, etc.

Esto ha hecho que la reflexión en torno a la educación matemática de Pre-escolar y Educación Básica Primaria esté ausente en la mayoría de las escuelas y por lo tanto se sigue trabajando desde concepciones tradicionales de las Matemáticas y del aprendizaje

Antecedentes

Con el ánimo de encontrarle salidas a esta problemática, desde el año 1987 y dentro del marco de la propuesta *Descubro la Matemática de Jorge Castaño* (1), la docente Mery Aurora Poveda, coordinadora del proyecto, viene realizando un trabajo intencional y sistemático sobre la educación matemática en la Básica Primaria.

Durante el año de 1990, se dio inicio al proyecto local Reencuentro con la Matemática en Engativá, con la asesoría del profesor Jorge Castaño, como técnico del IDEP (en esa época con el nombre de DIE-CEP). Las docentes Mery Aurora Poveda, Nydia Ordóñez, Melva Rincón y María Cristina Garzón asumieron el liderazgo y coordinación del proyecto con la participación de varias instituciones de la zona que lo adoptaron.

Debido a las reubicaciones de los docentes que se dieron a finales de 1.998 y de la política del MEN de acabar con los espacios de reflexión pedagógica dentro de la jornada laboral, la organización de este proyecto a nivel local se perdió, pero algunos docentes siguieron desarrollándolo en las instituciones donde fueron reubicados. Ese fue el caso de la profesora Mery, quien fue ubicada en la IED Villa Amalia y allí continuó con la propuesta pedagógica. En el año 2000 la institución acogió a nivel institucional la propuesta, pero sólo dos docentes la asumieron en la práctica.

Durante el año 2001 dentro del proyecto se realizó una investigación financiada por el IDEP para sistematizar la propuesta didáctica que se venía desarrollando en relación con el Sistema Decimal de Numeración. Fruto de esa investigación se realizó una publicación y un video bajo el nombre de *Matemática a la medida* *de los niños, el sistema decimal de numeración* (2) por lo que se acogió este nombre para el proyecto.

En el año 2003, la docente Mery Aurora Poveda presentó el proyecto al Premio Compartir y fue reconocida como *Maestra Ilustre* por el trabajo pedagógico realizado. Fruto de la publicidad realizada al proyecto por parte de la Fundación Compartir, las instituciones Quiba Alta, Brazuelos y Floridablanca quisieron vincularse. La Universidad Pedagógica a través de las prácticas de la facultad de Educación infantil se vinculó en el 2004.

Propósito

Abrir un espacio de reflexión y formación en Educación Matemática para los profesores de Pre-escolar y Educación Básica Primaria que están vinculados ya al proyecto y aquellos que deseen vincularse con posterioridad.

Estructurar, aplicar y sistematizar un proceso de intervención pedagógica, que dentro de un ambiente cooperativo y lúdico respete la lógica y las propias elaboraciones de los niños de Preescolar y Básica Primaria y les ayude a desarrollar un pensamiento que les permita acceder a comprensiones más elaboradas de los sistemas conceptuales básicos de las matemáticas.

Marco teórico

En relación con la formación de los docentes, la experiencia ha mostrado que la influencia que ha tenido la investigación educativa tradicional en las prácticas de los maestros, es muy poca o casi nula. Es por ello, que en el proyecto se opta por una manera distinta de generación de conocimiento pedagógico: la investigación acción participativa. Esta se entiende como un proceso de construcción colectiva del conocimiento que apunta a la transformación del orden social establecido. Para la IAP, la realidad social es una creación histórica, relativa y contingente y del mismo modo que se construye, se puede transformar; es una realidad inacabada en continuo proceso de renovación y cambio.

Además, la realidad social no está constituida sólo por los hechos observables empíricamente sino que también hacen parte de esa realidad las representaciones subjetivas que los individuos tienen de los mismos. En este sentido se puede afirmar entonces que los fenómenos sociales y educativos existen sobre todo en las mentes de las personas y en la cultura de los grupos que interactúan en la sociedad y no se pueden comprender a menos que se acceda al mundo conceptual de los individuos y a las redes de significados compartidos por los grupos.

En cuanto al enfoque didáctico, el proyecto retoma los principios de la propuesta Descubro la Matemática de Jorge Castaño, la cual se enmarca en los principios del estructuralismo genético de Piaget y del Socioconstructivismo de Vigotsky, los cuales se podrían sintetizar como sigue:

1. El sujeto es quien construye el conocimiento y da significado a la información que recibe desde el nivel de estructuración del pensamiento que posea en el momento.
2. El sujeto construye su conocimiento actuando sobre la realidad y lo desarrolla a medida que esa realidad ofrece resistencias a las acciones y transformaciones que pretende ejecutar. La realidad está constituida no sólo por el mundo físico sino principalmente por un mundo cultural simbólico.
3. La construcción de conocimiento es individual pero es posible gracias a la interacción con otros.
4. El sujeto que conoce es un sujeto emocional y social.

Teniendo en cuenta estos marcos, el proyecto se estructura a partir de tres ejes fundamentales:

1. El análisis de los sistemas conceptuales desde la disciplina y de las demandas que su comprensión hace a los niños.
2. El estudio de la génesis que siguen los niños en su apropiación. Para ello se apoya en la evolución histórica de los conceptos y en la observación sistemática de las representaciones, procedimientos y argumentaciones expuestos por los niños en el momento de enfrentar una situación problemática que implica los conceptos matemáticos que se quieren abordar.
3. Los criterios de intervención en el aula construidos a partir del modelo didáctico de Jorge Castaño. En general, estos criterios pueden sintetizarse en:
    - La vivencia de múltiples y variadas experiencias significativas con diferente nivel de estructuración, donde los juegos de imitación y los juegos estructurados (alrededor de una exigencia lógica de acuerdo con el nivel conceptual desarrollado por los niños) se constituyen en una estrategia didáctica fundamental. Las situaciones de la vida escolar así como las generadas a través de los proyectos de aula son otro tipo de experiencias contempladas sin que necesariamente se piensen como excluyentes.
    - La disposición de sistemas concretos de acuerdo con el nivel de desarrollo de los niños.
    - La utilización de representaciones y procedimientos propios en la

resolución de problemas, acordes al nivel de pensamiento de los estudiantes.
- La reflexión, sistematización y formalización progresiva de los avances conceptuales propios de los alumnos.

A través de los juegos y las situaciones de la vida cotidiana, los niños se enfrentan a situaciones problemáticas que deben resolver de acuerdo con el nivel de pensamiento que posean en ese momento; al hacerlo, despliegan formas de pensar y procedimientos propios que se apartan de la matemática convencional y altamente formalizada que todos conocemos, pero que muestran las capacidades que tienen los niños para matematizar su realidad y que nos permiten evocar esas matemáticas que la humanidad ha ido construyendo a través de la historia.

Metodología

El proyecto tiene previstos los siguientes ejes de desarrollo:

1. Formación de docentes.
   La formación se enmarca dentro de procesos de reflexión-acción que contemplan ciclos de planificación, acción, observación, reflexión, evaluación, sistematización y conceptualización.
   La capacitación se hace a través de encuentros con docentes de tres tipos:
   - Encuentros generales para reflexionar y conceptualizar sobre dimensiones generales del área de matemáticas, contempladas en el plan de estudios. (Un encuentro cada tres meses)
   - Encuentros por grados para reflexionar, planear, evaluar y conceptualizar sobre los conceptos trabajados y/ o por trabajar con los niños. En esta primera etapa se privilegiará la reflexión sobre pensamiento numérico. (Ver el anexo de Plan de talleres por grados).
   - Encuentros por cursos entre dinamizador (en las instituciones donde es posible), alumnos y docente para hacer seguimiento y acompañamiento al desarrollo de las estrategias en el aula.

2. Acompañamiento y desarrollo de juegos y estrategias pedagógicas en el aula.
   Para los docentes, este nuevo enfoque implica romper con estructuras fuertemente entronizadas en su forma de ser, hacer y sentir, por lo que les genera sentimientos de miedo, inseguridad y ansiedad que es necesario acompañar; es por ello que en algunas instituciones se eligen algunos docentes que hayan avanzado un poco más en la comprensión de la

propuesta para que acompañen a sus colegas en la puesta en escena de las estrategias acordadas.

3. Desarrollo y producción de material didáctico.
A medida que se va avanzando en la implementación de la propuesta, se van elaborando o comprando los materiales que se van requiriendo de acuerdo con el presupuesto con que se cuente.

4. Reestructuración del plan de estudios para Preescolar y Básica Primaria.
El plan de estudios se va reestructurando de acuerdo con los avances realizados por la implementación de la propuesta en las instituciones.

5. Formación y sensibilización a padres de familia.
Se realiza un taller de sensibilización y formación a padres, por grados, en cada semestre.

Resultados

Relacionados con los estudiantes

La investigación realizada durante el año 2001 (3), con relación al sistema decimal de numeración, mostró que los logros alcanzados por los niños que trabajan dentro de la propuesta se relacionan no sólo con unos mejores niveles de comprensión en relación con los sistemas matemáticos propuestos (4) sino con la aparición de nuevos valores y actitudes en relación con las matemáticas, el conocimiento, el aprendizaje y la evaluación. Estos se evidencian a través de:

- La alegría de trabajar en las clases de matemáticas sin importar el nivel de desarrollo conceptual en que cada niño se encuentre.
- La capacidad argumentativa: Con frecuencia los niños que han estado trabajando con una propuesta tradicional creen que la pregunta ¿por qué? no indica necesidad de argumentación sino cambio de respuesta porque está errada. Además, cuando se encuentran con alguna situación que no pueden desarrollar dicen que no se acuerdan, que no se lo han enseñado o empiezan a hacer algoritmos de operaciones sin ninguna relación con el problema o le preguntan al profesor lo que hay que hacer; es decir, siempre ubican la responsabilidad del saber fuera de sí mismos.
  Por el contrario, los niños que llevan algún tiempo trabajando con la propuesta, siempre se hacen responsables de sus acciones y sus pensamientos; cuando se les solicita una explicación siempre dan argumentos desde la lógica que están manejando y cuando se encuentran con opiniones

diferentes, solicitan argumentación. En las ocasiones en que no pueden enfrentar una situación no hacen referencia a la memoria o a la falta de enseñanza sino a la incapacidad de asumir la tarea: "este sí me queda grande"... "Con esos números no puedo porque son muy grandes"... "eso no lo entiendo"; además los procedimientos que utilizan son creaciones que responden a su forma de pensar.

- Creencia en las capacidades y el saber propios. Una de las características más frecuentes en los niños bajo la influencia tradicional es la poca confianza que manifiestan en el saber propio; esto se evidencia en los hechos ya señalados respecto a la argumentación, pero sobre todo en que se angustian cuando no saben, copian resultados y procedimientos de otros sin preguntar el por qué de los mismos, la mayoría de las veces no piden ayuda y prefieren que nadie se dé cuenta de su ignorancia. Por el contrario, los niños que se han beneficiado durante algún tiempo de la propuesta cuando no entienden preguntan y buscan ayuda en el profesor o en otro compañero; adicionalmente, si alguien les quiere dar la respuesta sin que hayan pedido ayuda, se molestan y piden que los dejen pensar: "¡No me diga; espere que yo lo haga!" "¡Como usted lo hace, yo no lo entiendo!". "¡Oiga! ¡No diga nada hasta que nosotros también pensemos!"
- Interacción cooperativa y colaborativa entre pares. Dado que la estrategia central está basada en juegos autorregulados, se aprende a interactuar con el otro tomándolo como par académico.
- Tenacidad en la búsqueda de soluciones. El ambiente generado y atravesado por los valores antes señalados, hace que los niños no abandonen fácilmente una situación problemática, sino que persistan en ella hasta encontrarle una solución aceptable.
- Evaluación basada en logros y limitaciones. La dinámica ganada hace que los niños en sus procesos de evaluación sean capaces de identificar lo que ya pueden realizar, e identifican lo que aún les falta por dominar y los sitios o personas donde pueden encontrar ayuda.

El libro y el video *La matemática a la medida de los niños, el sistema decimal de numeración* (5), recogen la sistematización que se hizo de la propuesta durante la investigación.

Relacionados con el proceso general del proyecto

A través de todo el proceso adelantado se ha ido fortaleciendo la propuesta y esto puede evidenciarse a través de hechos como los siguientes:

1. Reconocimiento como experiencia pedagógica significativa a través del Premio Compartir 2003, en la categoría de Maestra Ilustre.
2. Institucionalización de la propuesta en algunos de los colegios participantes: Villa Amalia, desde el 2004, Quiba Alta desde el 2005; en Brazuelos y Floridablanca participan algunos docentes.
3. Sistematizaciones parciales: El sistema decimal de numeración de primero a tercero de Primaria Publicación y video: Matemática a la medida de los niños, el sistema decimal de numeración.(6)
4. Re-estructuración del plan de estudios institucional.
5. Influencia en el enfoque pedagógico de la institución.
6. Diseño y elaboración de material didáctico.
7. Difusión entre colectivos de docentes e investigadores.

Notas

* Correo electrónico: meryp10@yahoo.es; meryp@etb.net.co

(1) Castaño, J. Proyecto Descubro la Matemática, una experiencia basada en el desarrollo del pensamiento. En: Revista @Perfiles. Junio 2001.Colegio Champagnat. Bogotá.

(2) Poveda, Mery. Matemática a la medida de los niños, el sistema decimal de numeración. Bogotá: IDEP-CED VILLA AMALIA, 2002.

(3) Poveda Mery y Forero Angie (Productoras) y Forero Angie y González Claudia (Realizadoras). Matemática a la Medida de los niños, El sistema decimal de numeración. Video formato Betacam y VHS. Bogotá: IDEP-CED VILLA AMALIA, 2002. Poveda, Mery. El sistema decimal de numeración en los niños del CED Villa Amalia: una propuesta de intervención en el aula. Bogotá:IDEP-CED Villa Amalia.2002. Informe Final de Investigación

(4) De las gráficas 5 al 9 se pueden inferir los niveles de razonamiento a los que van accediendo los niños; sin embargo un análisis exhaustivo de los niveles de comprensión alcanzados se puede ver en el informe final de investigación: Poveda, Mery. El sistema decimal de numeración en los niños del CED Villa Amalia, una propuesta de intervención en el aula. Bogotá: IDEP-CED VILLA AMALIA, 2001. Informe final.

(5) Poveda, Mery. Matemática a la medida de los niños, el sistema decimal de numeración. Bogotá: IDEP-CED VILLA AMALIA, 2002. Poveda Mery y Forero Angie (Productoras) y Forero Angie y González Claudia (Realizadoras). Matemática a la Medida de los niños, El sistema decimal de numeración. Video formato Betacam y VHS. Bogotá: IDEP-CED VILLA AMALIA, 2002

(6) Op.Cit.

Procesos de generalización y álgebra geométrica: Una experiencia de trabajo en el aula

WILLIAM ORLANDO BRAVO BRAVO.
MAURO ARTURO BASTIDAS ERAZO
RODRIGO ACHICANOY ERAZO*

Introducción

En las últimas décadas ha aumentado el interés por estudiar la problemática relacionada con el "fracaso" respecto al álgebra escolar y, particularmente, por diseñar o construir propuestas de intervención en el aula que posibiliten comprensión del trabajo algebraico y que no generen sensación de fracaso y frustración en los estudiantes.

Teniendo en cuenta las posibilidades que actualmente puede ofrecer la didáctica del álgebra, en cuanto a recursos para el trabajo en el aula, es posible no sólo construir propuestas que posibiliten comprensión de los conceptos abordados de la matemática escolar, sino también generar interés y actitud favorable por parte de los estudiantes.

1. Dos áreas iguales a otra son iguales entre sí.
2. Si dos igualdades se adicionan entre sí, se obtiene otra igualdad.
3. Si dos igualdades se restan una de otra, las diferencias son iguales.

Los procesos de formalización en el álgebra geométrica se construyen en tres etapas fundamentales del álgebra durante su proceso histórico (Anillo de matemáticas: Introducción al álgebra: Una aproximación desde la geometría).

a. Etapa del álgebra retórica
b. Etapa del álgebra sincopada
c. Etapa del álgebra simbólica

2. La construcción de conceptos como resultado de la acción constructiva de las estudiantes.

El álgebra geométrica se toma como contexto de una estrategia didáctica que comienza con la manipulación de objetos, avanza hacia la representación gráfica y permite la aproximación del lenguaje simbólico de esta disciplina. Sin embargo, la concreción de las ideas anteriores sólo es posible mediante la actividad protagónica de las estudiantes, ello requiere de la adopción de una concepción acerca de lo que es la actividad en la labor educativa, la cual tiene las siguientes características:

- Permite el desarrollo de la autonomía por cuanto las estudiantes acceden a formas de autocontrol de su proceso.
- Contribuye a que los estudiantes se impongan sus propias tareas, en relación con un propósito definido colectivamente.
- Posibilita el desarrollo de procesos de reversibilidad de manera autónoma y productiva.
- Genera vivencias en el aula que fortalecen actitudes de solidaridad y compañerismo entre los grupos de estudiantes.

Elementos metodológicos

La experiencia atiende fundamentalmente los niveles de representación, las formas de generalización y conceptualización cuando ya se ha accedido a lo simbólico:

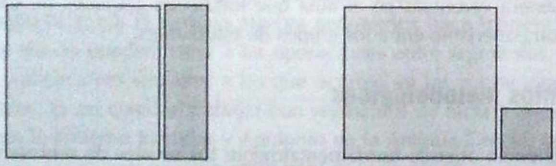
- Nivel de representación objetal, en el cual se comienza a manejar los conceptos básicos de álgebra en el ámbito de la manipulación de fichas cuadradas y rectangulares.

- Nivel de representación gráfica, en el que se dibujan las ideas y procedimientos que se manejaron en el primer nivel.
- Nivel de representación simbólica, en el que se accede a la manipulación de elementos simbólicos como letras, números, signos.
- Formas de generalización de los procedimientos realizados durante las tres etapas anteriores.
- Conceptualización.

Acciones metodológicas

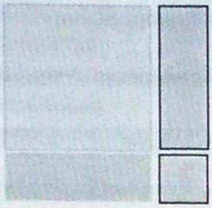
1. Elaboración del material. Cada estudiante elabora por lo menos 20 fichas de cartulina de forma cuadrada, cuya longitud del lado sea un valor no definido, mayor a 1 centímetro, que nombraremos como X; 20 fichas de forma rectangular de dimensiones X y 1 centímetro y 30 cuadrados de lado 1 centímetro. Cada uno de estos grupos elabora las fichas en diferente color.
2. Formación de figuras cuadradas y rectangulares de diferentes dimensiones, empleando las fichas de cartulina construidas.
3. Expresión de área y perímetro de cuadrados y rectángulos representados.
4. Formación de expresiones algebraicas.
5. Dados un cuadrado y un rectángulo encontrar sus lados: acciones que permiten describir el proceso de factorizar.
6. Procesos de generalización. Algunas de las construcciones que aparecen cuando se les da la instrucción de construir un cuadrado de dimensiones se muestran a continuación:

Figura No. 1



Estas representaciones, en la experiencia desarrollada, son realizadas por cerca del 10 % de los estudiantes. El 90 % realiza la forma correcta que se indica a continuación.

Figura No. 2



Perímetro = + + + =

En relación con el ambiente generado con el desarrollo de esta secuencia de actividades, resulta importante destacar dos aspectos:

- Los estudiantes muestran gusto y entusiasmo por el trabajo propuesto en clase.
- Se propicia una motivación para los maestros del área en cuanto a opciones de los procesos de innovación.

Evaluación de la experiencia

Para la evaluación de esta propuesta, se sugieren las siguientes actividades:

- Observación directa del proceso individual de los estudiantes con el fin de reconocer sus avances o abordar y ofrecer apoyo frente a posibles dificultades.
- Evaluaciones sumativas periódicas sobre avances y dificultades en los procesos de representación a nivel gráfico y simbólico.
- Avance en los procesos de simbolización.
- Mirada permanente sobre el nivel de motivación y entusiasmo por el trabajo propuesto.
- Autoevaluación del trabajo desarrollado en el aula.

Productos

Guías de trabajo de álgebra geométrica para el servicio de la institución.

Resultados

Lo que se ha logrado con la propuesta es:

- Promover el paso de un trabajo memorístico a un trabajo comprensivo y contextualizado.
- Posibilitar el tránsito de representaciones concretas a representaciones mentales.
- Más interés de los docentes en los problemas del aprendizaje del álgebra escolar.
- Aumentar el nivel de promoción de las estudiantes en grado octavo.
- Mayor grado de afectividad con respecto a la clase de álgebra.

Relación con el PEI

La propuesta logró contribuir al desarrollo curricular ya que aportó en la formación de las estudiantes lo siguiente:

- Ecología comportamental, buen uso del material.
- Tolerancia ante el propio error y el de los demás.
- Respeto a la palabra del otro.
- Compartir y solidaridad.
- Buen nivel comunicacional.
- Tener fe humana y divina.
- Creatividad e imaginación.
- Pasar de voluntad impulsiva a voluntad previsora.
- En el trabajo tener siempre como constante el amor.

Referencias bibliográficas

Anillo de matemáticas. Introducción al álgebra: una aproximación desde la geometría, Bogotá, agosto de 1991.

Artigue, M. Ingeniería didáctica en educación matemática. Bogotá: una empresa docente (Universidad de los Andes).

ASOCOLME. Memorias del Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Bogotá, 2000-2006

Bishop, A. Aproximación sociocultural a la educación matemática. Cali: Universidad del Valle

D´Amore, B. Didáctica de la matemática. Bogotá: Magisterio, 2006

Boyer, Carl B. Historia de la matemática. Alianza Editorial. Madrid. 1987

Dantzig, Tobías. Number Language of Science. The Free Press. New York. 1976.

Euclides. Elementos de geometría. Científicos griegos.

García, G. Currículo y evaluación en matemáticas: Un estudio en tres décadas de cambio en la educación básica. Bogotá: Magisterio, 2003.

Kline, Morris. Matemáticas: la perdida de la certidumbre. Siglo XXI Editores. Madrid. 1985.

León, O. y Calderón, D. Argumentary validar en matemáticas: ¿una relación necesaria?. Bogotá: Universidad del Valle.

Rojas, P. et al. Transición aritmética-álgebra. Bogotá: Universidad Distrital-Gaia, 2002

Mason, et al. Rutas/Raíces hacia el/del Álgebra. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 1985.

Samper, C. et al. Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. Bogotá: ASOCOLME, 2003

Notas

Correo electrónico: wobb1022@hotmail.com

RED DISTRITAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

REDES

Educación matemática

Experiencias de trabajo en el aula

Con el propósito de socializar y divulgar más ampliamente algunos de los trabajos desarrollados por docentes o grupos de docentes, integrantes de la Red de Distrital de Educación Matemática, la Secretaría de Educación Distrital de Bogotá y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas han coordinado la publicación de dichos trabajos.

Este libro contiene ocho escritos sobre los trabajos diseñados y desarrollados por integrantes de la Red, con estudiantes de Educación Básica de Bogotá, en el área de matemáticas. En estos escritos se presenta una síntesis de los referentes teóricos que orientaron la propuesta y se expone, por una parte, vivencias de los docentes en el desarrollo de su experiencia de aula y, por otra, análisis de los resultados obtenidos. Además, en algunos casos, incluye tanto sugerencias sobre estrategias de trabajo específicas, como posibilidades de uso de materiales como recurso didáctico.

La revisión y el análisis de los documentos presentados en este libro aportan elementos que permiten al profesor de matemáticas orientar propuestas de trabajo en el aula, en las que se incorpore no sólo el conocimiento generado desde la experiencia profesional específica de cada docente, sino también el obtenido a partir de procesos de interacción con otros profesionales y a partir de la revisión de elementos teóricos propios de la didáctica de las matemáticas.

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.
Secretaría Educación

Bogotá sin indiferencia

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

ISBN 958-20-0869-5
9 789582 008697