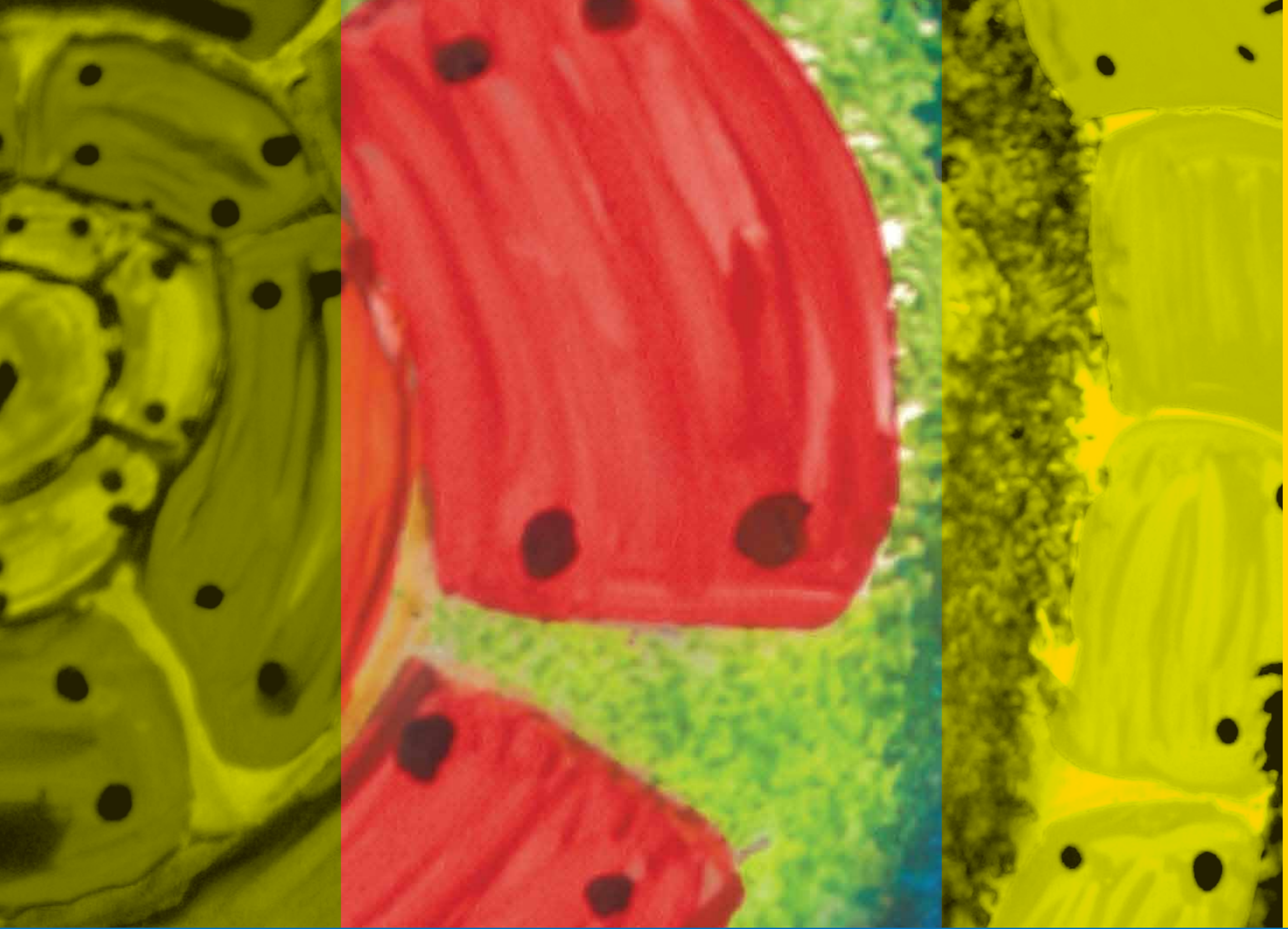
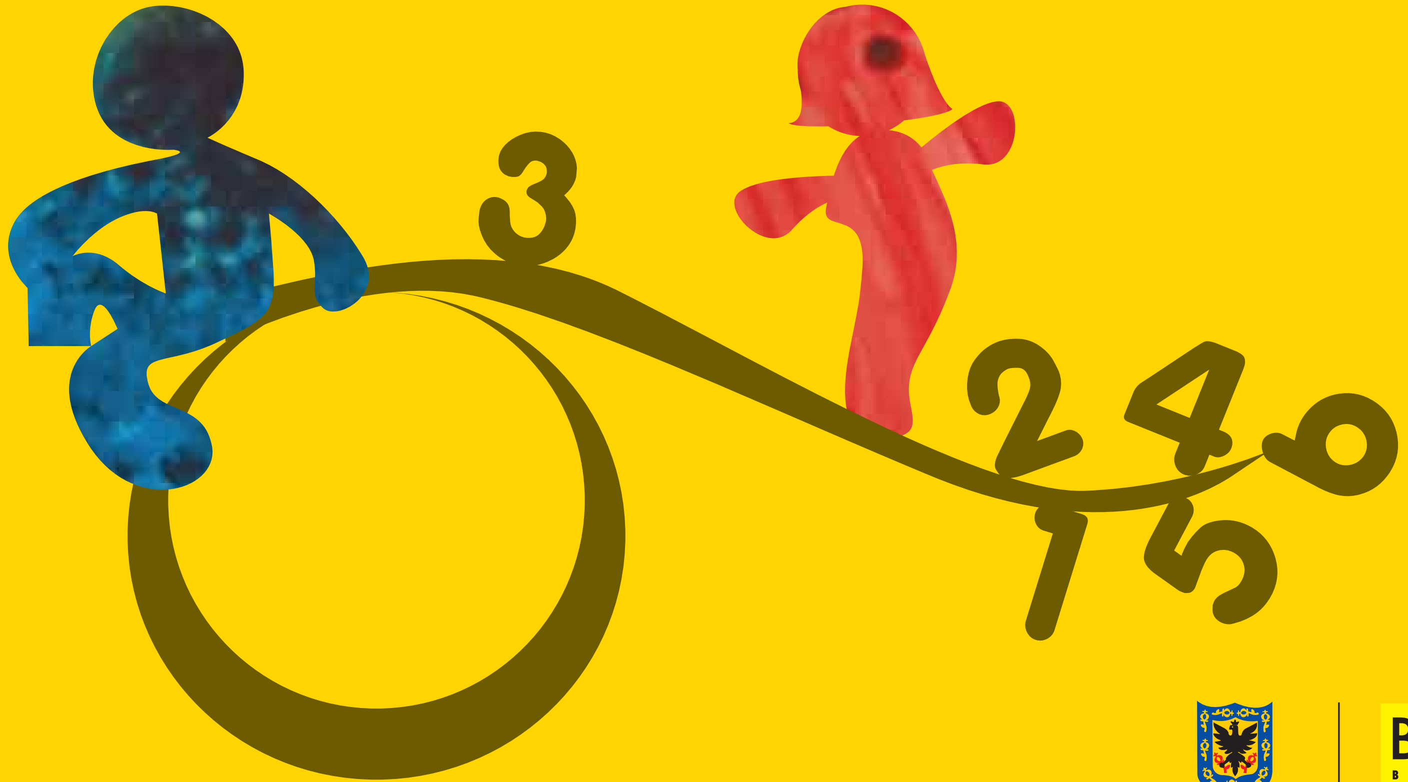


3ª Serie orientaciones para la evaluación

Evaluación y didáctica de las Matemáticas



BOGOTÁ BICENTENARIO

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.

BOG BOGOTÁ POSITIVA
GOBIERNO DE LA CIUDAD

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN

Evaluación y didáctica de las Matemáticas

El Sistema de Evaluación Integral para la Calidad de la Educación - SEICE
Subsistema de Evaluación de Aprendizajes

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.

BOG BOGOTÁ POSITIVA
GOBIERNO DE LA CIUDAD

Evaluación y
didáctica de las
Matemáticas

ALCALDIA MAYOR DE BOGOTÁ
Secretaría de Educación

Samuel Moreno Rojas
Alcalde Mayor de Bogotá D.C.

Carlos José Herrera Jaramillo
Secretario de Educación de Bogotá D.C.

Jaime Naranjo Rodríguez
Subsecretario de Calidad y Pertinencia

Jorge Alberto Torres peña
Subsecretario de Integración Interinstitucional

Henry León Torres
Subsecretario de Gestión Institucional

Martha Lucía Vega
Subsecretaria de Acceso y Permanencia

Luz Maribel Páez Mendieta
Directora de Evaluación de la Educación

ASESORA PEDAGÓGICA
María Agustina García Roa

COLABORADORES
Libardo Barrera Díaz
Ricardo Sotelo Tinjacá
Javier Darío Vélez Echeverry

EQUIPO DE PROFESIONALES DE APOYO
Carmen Paola Rojas Useche
Viviana Mesa Muñoz
Genny Carolina Rincón Báez
Alicia Molina Lizcano
Alba Mery Zapata Chaverra
Edilberto Novoa Camargo
José Luis López Herrera
Heber Haydin Coronado Escobar
Marisol Rodríguez Contreras

DISEÑO, ILUSTRACIÓN, DIAGRAMACIÓN E IMPRESIÓN
Taller Creativo de Aleida Sánchez B. Ltda.
www.tallercreativoaleida.com.co
Juan David Jaramillo G.
Zamara Zambrano S.

ILUSTRACIÓN
Andrea Sarmiento B.
Mauricio Suárez B.

Primera edición, octubre de 2010
10.000 Ejemplares

Impreso y hecho en Colombia

ISBN 978-958-8312-93-4

índice

2

1. PRESENTACIÓN

La evaluación interna es un punto de referencia de la calidad de la educación en cualquiera de las áreas básicas. La forma como se crea y se mira la evaluación tanto por directivos, docentes estudiantes y padres de familia da cuenta de cual es el sentido de educación en la sociedad para ellos. El decreto 1290 de 2009 emitido por el MEN da libertad en la forma de evaluar a las instituciones del país, reconoce la autonomía institucional para diseñar su Sistema Institucional de Evaluación. Puede ser esta una gran oportunidad para que directivos y docentes lideren profundas transformaciones que permitan mejorar la calidad de la educación.

2. PARA LA REFLEXIÓN EN PEDAGOGÍA

La calidad de la matemática escolar

La Secretaria de Educación de Bogotá respecto de la calidad educativa afirma[1]: "Se trata de introducir una profunda ruptura epistemológica, que de prioridad al aprendizaje como proceso de reflexión permanente sobre la experiencia cognitiva, en vez de centrarse sobre la organización secuencial de información fragmentada, por lo tanto no se puede hablar de lograr soluciones sino de aproximaciones cada vez más elaboradas". La concepción de la Secretaría de Educación plantea el problema de la calidad de la educación más allá de una calificación determinada, la calidad de la educación tiene que dar cuenta de la razón de ser de la escuela, por ello pide ver de manera diferente epistemológicamente el problema de lo aprendido planteándolo como un proceso, no como es un concepto en un momento dado, sino como una cadena de situaciones que den cuenta del aprendizaje.

Esta nueva concepción sobre la misión de escuela solo se logra con reales transformaciones en el aula de clase, con discusiones continuas entre docentes y estudiantes que lleven a practicar y construir modelos de experimentación colectiva en las aulas. La transformación en las prácticas educativas no se da por decretos sino por el convencimiento, por parte de sus actores, de la efectividad de un cambio. Ellas deben permitir una producción evaluable y transformable que incida en la construcción continua de la sociedad.

1 Orientaciones curriculares para el campo de Pensamiento Matemático Secretaría de Educación Distrital de Bogotá, noviembre 2007. Página 18

La enseñanza de la matemática, su aprendizaje y evaluación son una unidad en la escuela, por lo tanto se requiere de cambios en la forma de ver y vivir la educación. Para mejorar el nivel de la calidad de la educación matemática no basta con procedimientos y recomendaciones didácticas generales, con acciones calificativas sino con la creación de posibilidades de experimentar, de reflexiones amplías, concretas, sobre la disciplina matemática, la didáctica de ésta y su incidencia en la formación ciudadana de los educandos y educadores.

Pasar de calificar a evaluar implica pasar de pruebas sobre un concepto determinado a mirar como se acerca el estudiante al concepto, cómo lo razona y como le permite transformar su comportamiento social. La evaluación escolar desde estos aspectos tiene alto sentido ético. Su sentido esta en dar cuenta del objetivo del área en la formación de individuos como ciudadanos. Por lo tanto es necesario pasar de calificar a determinar los criterios sobre los cuales la clase de matemáticas mira la evolución en la formación de los estudiantes.

Al ver la evaluación en matemáticas bajo los criterios de la influencia en la formación de los individuos, permite concebir la matemática como herramienta educativa y no como disciplina en sí, sin negar la oportunidad a quienes lo deseen de convertir la matemática en objeto de estudio. Cada concepto debe aportar en la formación del pensamiento matemático en los estudiantes lo cual esta por encima del manejo conceptual matemático. Esto exige del docente, en cada temática a trabajar, el cuestionamiento sobre ¿para qué le sirve al estudiante?, ¿cuál es el nivel de profundidad con el cual se debe trabajar cada concepto?, ¿cómo influye el trabajo de la clase de matemáticas en su comportamiento cotidiano? entre otras preguntas. Hoy no se saben muchas respuestas pero es necesario que los docentes nos preocupemos por empezar a buscarlas y compartirlas. Es ahí donde podemos empezar a hacer cambios epistemológicos.

Planteadas las cosas de esta forma el docente de matemáticas tiene como finalidad usar las matemáticas para llevar al estudiante a pensar matemáticamente. No es el objetivo que los estudiantes sean matemáticos, puede pasar, pero deben ser aptos en:

- Rigurosidad,
- Determinación de la verdad,
- Saber relacionar los elementos de un objeto de estudio desde varios puntos de vista
- El convencimiento de que se puede llegar más lejos en el conocimiento del objeto.

Los cambios planteados a la evaluación en la matemática escolar requieren ampliar la concepción que se tiene sobre el conocimiento matemático, la verdad matemática, la formación del pensamiento matemático entre otras cosas. La responsabilidad del docente de matemáticas en todos los niveles escolares debe ser el cuestionar constantemente sobre la unidad del cómo se aprende, se enseña y se evalúa la matemática escolar.

La evaluación en la clase de matemáticas

La búsqueda de la felicidad escolar se basa en el placer de aprender por parte de los estudiantes y la satisfacción del docente cuando vive la comprensión y la trascendencia en los estudiantes de los conceptos enseñados. Para ello se requiere desde el docente:

a. Un profundo manejo desde la disciplina matemática,

b. Una conciencia de los niveles de representación y niveles de razonamiento de los conceptos en los estudiantes y

c. La incidencia del concepto en la formación integral del estudiante.

   En este documento se planteará otra forma de enseñar, con un objetivo en el trabajo de la clase de matemáticas diferente al que se ha impulsado desde el desarrollo temático, donde el comportamiento de estudiantes y docentes en la clase cambia. Se hará énfasis en el desarrollo del pensamiento matemático, donde las acciones planteadas se convierten en una herramienta de formación para la vida. Los cambios académicos, en la clase de matemáticas, no se dan porque se repitan definiciones sino porque se motiva a los estudiantes a hablar, a realizar reflexiones, a negarse a aceptar que el conocimiento matemático es un conocimiento terminado, esforzarse en comunicar en forma clara y precisa sus razonamientos, a crear un ambiente de cordialidad y de respeto en el aula de clase. Es propiciar un lugar y un momento donde son felices estudiantes y docentes porque hay crecimiento como seres humanos.

Las actitudes que se requiere tome el docente en el aula son entre otras:

1. Dirige la discusión sobre el concepto que va a trabajar en clase. El escuchar y corregir lo que van haciendo los estudiantes le permite evaluar como avanzan en sus observaciones (como se mira el objeto de estudio), los razonamientos.

2. La revisión uno a uno de la manera como registra el avance del trabajo de los estudiantes. Los registros muestran que de lo discutido es importante para cada estudiante (representación).

3. El docente debe trabajar en el marco de los derechos de los estudiantes para llegar a un no rotundo a LA VIOLENCIA INTELECTUAL. El trabajo escolar es un trabajo de equipo.

Lo que se espera que el estudiante haga en clase de matemáticas tiene que ver con:

1. La participación constante aportando a la discusión planteada por el docente. Atreverse a mejorar su mirada del objeto de estudio en la clase.

2. La pulcritud con que se hace el trabajo, evidenciado, en la presentación e interés para registrar en el momento y el modo exigido.

3. La madurez social, respetando el tiempo que requiere cada compañero de clase para pasar de un nivel de representación a otro, la tolerancia a las dificultades de algunos para entender los razonamientos nuevos, desarrollar paciencia para escuchar los cuestionamientos que hacen sin importar su nivel de dificultad.

La evaluación en matemáticas debe tener en cuenta las acciones del estudiante que le llevan al desarrollo del pensamiento matemático: el acto de creación para cada sujeto[2] y la asociación de signos en la producción de significados[3], sus actos cognitivos y creativos para el estudiante en cada grado, no se esta hablando de los actos creativos para la disciplina o la humanidad.

El objetivo del trabajo presentado está en mejorar el ambiente escolar con responsabilidad y respeto por el estudiante. La evaluación tiene que ver con hacer las cosas con sentido, es decir, con conciencia de que valió la pena el trabajo en la clase de matemáticas.

2 Noesis.

3 Semiosis.

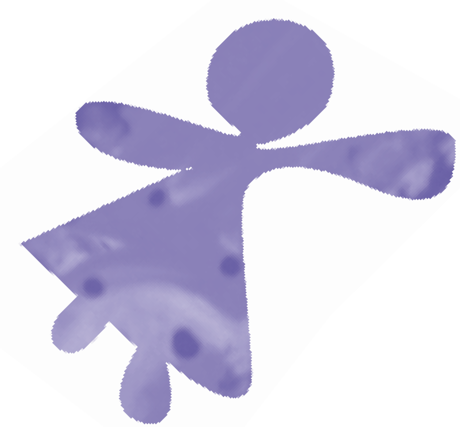
2. APORTE CONCEPTUAL

El pensamiento matemático

La escuela tiene como objetivo general contribuir a la formación integral del estudiante, fomentando desde los primeros grados la interiorización de conocimientos y orientaciones valorativas que se reflejen gradualmente en sus sentimientos, formas de pensar y comportamientos acorde con el sistema de valores e ideales de la sociedad de este siglo, enfatizando en la formación de un ser humano comprometido con la humanidad. Entonces, la clase de matemáticas debe hacer aportes para contribuir a la solución de problemas y debemos tener un profundo convencimiento que los avances que da la matemática si sirven, que no son garabatos indescifrables.

Ferrater Mora precisa que el “**pensamiento**” depende en gran medida del “pensar” que no es más que lo que se tiene en mente cuando se reflexiona con el propósito de conocer algo, de entender algo, cuando se delibera para tomar una decisión. Es un proceso mental. Lo que contiene o que apunta a un acto u operación intelectual llevada a cabo por un sujeto. Ortega y Gasset afirma que es alcanzar un saber, pero no un mero saber intelectual, sino un **saber a que atenerse.**

Los dos autores referidos asumen que hay pensamiento intuitivo, pensamiento discursivo, pensamiento estadístico, pensamiento dinámico, pensamiento volitivo y pensamiento sintético. Luego hay pensamiento matemático, el pensamiento geométrico y pensamiento numérico, entre otros. Ante una problemática matemática determinada hay un comportamiento definido por parte del que analiza la situación que esta dado por lo numérico, geométrico, métrico, estadístico o variacional. Cada uno de los dominios de matemáticas lleva a ver una situación de una forma particular, el individuo tiene un saber a que atenerse para abordar el problema. Lo que se tiene en mente para ver la situación problema, es lo que la escuela debe dar al estudiante. Esto no es más que la formación de pensamiento matemático en cualquiera de sus dominios.



Las investigaciones sobre conocimiento matemático, como las hechas por Raimond Duval parten de que: no se aprende de la misma manera las matemáticas que otro tipo de conocimientos; las matemáticas requieren de por lo menos dos aspectos: las representaciones y las formas de razonar. El nivel de desarrollo de pensamiento tiene que ver con la forma en que se representa una observación de carácter matemático y con la forma como se hacen las inferencias, es decir el razonamiento.

La representación

Está referida a varios tipos de aprehensión intencional de un objeto y de darlo a conocer. No es inmediata, se hace de acuerdo con el interés con que se mire el objeto, hay un número muy variado y válido. La representación en educación matemática, considera como el estudiante ve el objeto, como lo describe. El trayecto escolar debe avanzar en el desarrollo de los procesos de representación y en los modos de representar, en las formas de razonar para mostrar verbalmente el objeto que conoce. Estos pasos no son naturales, son impuestos por la disciplina matemática. A la humanidad le ha costado siglos pasar de uno a otro, esto implica que es necesario que el docente sepa cual es la representación que espera alcanzar con los estudiantes en cada grado, ciclo o nivel. Cada una de las representaciones que se dan en el aula de clase deben discutirse y llevar al grupo a una puesta en común en la que se propician nuevas representaciones más elaboradas. Las representaciones deben seguir las pautas dadas por el docente[4]. De ahí que hay que presentar las formas como se han visto las representaciones en el aula de clase en grupos regulares para los ejercicios que se vayan a plantear a los estudiantes.

Según Duval la actividad matemática, sea disciplinar o escolar requiere que el sujeto ponga en acción modos de funcionamiento cognitivo diferentes, a veces opuestos, a los que se requieren en otros dominios del conocimiento. Podemos estar reconociendo visualmente y aún en forma táctil una forma geométrica determinada como el círculo y pasar obligatoriamente a determinar el círculo por el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro[5]. Por eso no se equipara el conocimiento matemático con otros conocimientos.

4 Hay que diferenciar entre presentar y representar.

5 Son representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos, que se convierte en el medio para exteriorizar las representaciones del aprendiz

La manera de pensar matemáticamente no es espontánea para el pensante, necesita un modo de funcionamiento cognitivo que requiere la movilización de sistemas específicos de representación. Los sistemas de representación deben tener definido: a) los elementos, si lo que cuenta son los planos, las rectas, los puntos, números, patrones de medida entre otros. b) la relación entre los objetos del mismo sistema, si es de congruencia, relaciones de paralelismo perpendicularidad entre otras o transformaciones numéricas o de patrones c) la relación de los elementos de un sistema con los elementos de otro sistema. Las reglas del sistema están dadas por la manera como se relacionan los elementos. Por ejemplo: al resolver un problema de trigonometría se necesita ver dos sistemas: 1) el gráfico que da cuenta de la situación, 2) las relaciones algebraicas que describan la situación.

Hay formas de representar y esto implica que no se aprende de una vez un concepto o un tema determinado, podría decirse que se aprende de a pocos. No es el conocimiento por revelación, ni el manejo de una forma de razonar y representar sino ver la situación con toda su real complejidad y todas las formas posibles de representar el objeto y las relaciones posibles que permiten razonamientos diferentes.

El razonamiento

El razonamiento es la visión mental por la cual se elimina todo lo que sea absurdo e irrazonable para el individuo, por medio de la cual se alcanza la comprensión de una realidad porque tiene significación. Por ejemplo: trabajar con fichas de forma triangular en la medida que el estudiante las reconoce, habla de estas fichas va despreciando aspectos como el color, la textura, el tamaño entre otras cosas. Su visión mental suprime estos elementos para quedarse con una figura cerrada de tres lados rectos entonces sus observaciones de la gráfica también van fijándose en cosas como “tiene tres puntas”, refiriéndose a los vértices.

Siguiendo el trabajo de Duval el razonamiento se ha designado desde dos aspectos:

- Actos de exploración
  Se procede por anticipaciones seleccionando las que son confirmadas, generalmente con el objeto presente.
- Inferencias explícitas
  De una proposición dada, se deriva la afirmación de otra proposición.
  El trabajo escolar en matemáticas debe apoyar el desarrollo del pensamiento en cada dominio matemático en por lo menos:

a. Rigurosidad con que se mira un objeto de estudio en la disciplina matemática

b. La veracidad de lo que se puede observar del objeto en estudio y la comunicación que se hace de él.

c. La capacidad de establecer relaciones entre los elementos que no necesariamente son perceptuales.

d. El estudio de un objeto matemático no esta restringido, ni se ha terminado, goza una continuidad permanente porque su estudio es continuo e infinito.

De la calificación de conceptos a la evaluación del desarrollo de pensamiento matemático

El aprendizaje de las matemáticas escolares es sustancialmente diferente al aprendizaje de cualquier otra área hay estudiantes que profesan un gran gusto por ella pero hay una gran mayoría que manifiestan frustración por no comprenderlas. Mejorar la calidad de la educación en el área de matemáticas va más allá de hacer mas pruebas, estas pueden dar cuenta de un proceso, pero no de la influencia en la formación del estudiante en la vía que nos interesa. La evaluación del proceso de formación del pensamiento matemático del estudiante implica una razón de ser diferente del área de matemáticas, porque se gana entre otros aspectos en:

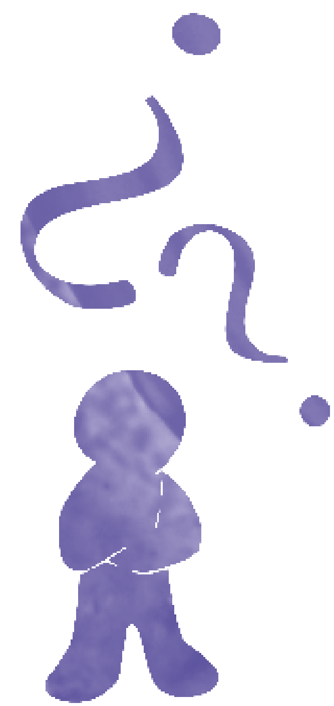
a. **Ambiente escolar.** Lograr hacer de la clase de matemáticas un momento en que el estudiante se sorprenda de lo encontrado en una situación determinada y pueda sentir que está aportando.

b. **Oportunidad de comunicación.** La clase de matemáticas debe permitir que el estudiante se exprese de acuerdo al nivel de desarrollo que vaya logrando sin menospreciar su forma de contar sus razonamientos. El piensa y comunica.

c. **Espacios democrático.** La democracia va más allá de los votos. La clase es el lugar y el momento en que se busca la verdad de un hecho. No es la definición matemática por la definición, sino el derecho de los estudiantes a reconstruir cada definición. El derecho a saber que es verdad.

d. **Conocer por que el fracaso de las evaluaciones en matemáticas.** Las llamadas “previas” miran las muchas formas de acceder a la solución de un problema. Se tienen en cuenta los aciertos y los errores para aprender no solo para hacer una operación y determinar la pérdida o el pasar el área en un determinado periodo. El momento de estas pruebas, no determina todo el trabajo desarrollado en la clase de matemáticas. Es solo una parte.

La ampliación de la concepción sobre el mejoramiento de la calidad de la educación se da en la medida que ella vaya más allá del cubrimiento escolar de unos “estándares” para matemáticas, viendo el cómo se trabaja cada concepto, cuándo, para qué, cómo lograr procesos evaluativos justos y así aportar en el desarrollo del pensamiento matemático y su relación con la formación integral de los estudiantes.

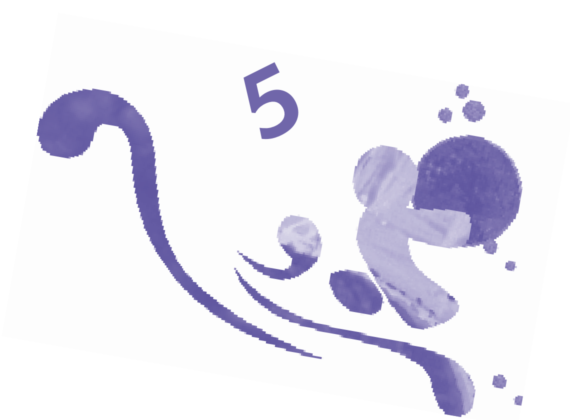


3. ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

La complejidad del acto educativo requiere ver el trabajo de la clase sin la inmediatez que algunas veces se ha pretendido. La planeación de las actividades en una estrategia didáctica de matemáticas no son solo ejercicios para una clase.

Una estrategia didáctica debe dar cuenta de por lo menos:

- Los conceptos claros que se van a abordar desde la disciplina matemática. El docente necesita de la claridad que da la matemática para poder moverse mentalmente y comprender la cobertura que puede dar en un momento dado. Por ejemplo saber que un cuadrado es en matemáticas: un cuadrilátero con sus lados contiguos congruentes y perpendiculares.
- El desarrollo histórico de los conceptos a trabajar. Por ejemplo saber como se ha visto el concepto de función, esto nos permite comparar estas visiones con las que van teniendo los estudiantes. Por lo tanto, se puede comprender que el estudiante está en una etapa determinada, y que no es simple dejadéz.
- Las diferentes formas de representación: gráficas y lingüísticas. Su conocimiento por parte del docente le permite establecer puentes que aseguren un real dominio de los conceptos matemáticos a trabajar.
- Las dificultades que presentan los estudiantes para pasar de una forma de representar y razonar a otra. Este conocimiento profesoral distingue la disciplina matemática de la educación matemática. Hace que la clase de matemáticas se aproveche en forma óptima.
- Aspectos que aporta la estrategia a la formación del estudiante. Tener en cuenta la forma en que se plantean las discusiones en la clase ante una situación académica determinada, le permite al docente un mejor manejo y saber como puede dirigirla para obtener el mejor resultado académico y formativo.
- Las diferentes relaciones que se pueden establecer en un dominio determinado y aún con otros. Por ejemplo pasar de ver una composición gráfica y reconocerle sus características, a mirarla en una tabla de carácter numérico con sus respectivas transformaciones.



Estrategia 1: Aprender a ver figuras geométricas[6]

El cuadrado - Geometría euclidiana

La importancia de la manipulación de objetos tangibles por parte de los estudiantes en el espacio y en el tiempo permite el acceso a los conceptos de la geometría, determinando las cualidades que hacen el objeto, que se desea estudiar. De la manipulación de fichas con algunas caras con formas geométricas y de la observación de objetos tangibles, no necesariamente se pueden determinar las relaciones que hacen el objeto geométrico.

Desde los primeros cursos escolares se puede empezar a trabajar con esta herramienta para que los estudiantes alcancen el conocimiento exigido sobre los cuadriláteros o aún sobre cualquier concepto. Por ejemplo, se parte con un material sencillo: papel con gráficos en forma de cuadriláteros, en diferentes colores[7], pegante y tijeras. Se recomienda abordar solo una figura en cada sesión. Se trata de pedir a los estudiantes la descripción de algunos polígonos, es decir, hablar del objeto que estamos trabajando.

Se entrega a los estudiantes un pedazo de papel con un cuadrado impreso[8], se puede usar una impresión de cuadrados sobre papel de color, luego se les pide recortar por el borde del cuadrado y pegarlo en el cuaderno[9]. Este ejercicio lleva a los estudiantes a incluir en la descripción los lados de la figura. El estudiante de los primeros grados de escolaridad requiere tener el objeto al frente para sentirse seguros de expresar lo que ven.

6 Para el conocimiento de geometría euclidiana se presentan tres aspectos a trabajar escolarmente:
1. **Aprender a ver** los elementos y las relaciones entre ellos. Para que exista un objeto matemático no basta con enunciarlo o señalarlo.
2. **La construcción** de sus elementos. El trazado de un polígono cualquiera no se da si no se saben una serie de cualidades que este tiene. Requiere un trabajo académico.
3. **La deducción** de sus conceptos y teoremas.
Los elementos de Euclides presentan los dos últimos, para el primero nos basamos en las investigaciones sobre conocimiento que muestran la necesidad de que los objetos de estudio de la geometría existan para el estudiante, para ello usamos como herramienta de conocimiento la descripción, y ver como ella nos permite apoyar la formación del pensamiento geométrico.

7 Se recomienda fotocopiar en papel de color para darle una presentación más llamativa al trabajo. Se puede ampliar a cualquier gráfico geométrico.

8 Recomendable a partir de los 7 años.

9 Se observa que en los primeros grados escolares hay una gran dificultad para dibujarlo.

En los primeros grados la relación entre lados del cuadrado no es sencilla para el niño, se requiere de tiempo y esfuerzo para lograr buenos resultados, por esto se les da copia del cuadrado, se recorta y se pega. Es posible recalcar sus bordes preparándolos para la construcción del gráfico en los grados superiores, teniendo en cuenta la dificultad para el trazado y por tanto la necesidad de apoyar al estudiante en este trabajo, luego nos dedicamos a construir y escribir las proposiciciones.

Es aquí donde la descripción lleva a la teoría porque posibilita la formalidad de lo observado y comunicado, con la validación del grupo con el que se trabaja. Es importante presentar las formas como los estudiantes se expresan en los diferentes grados porque permite desmitificar la ligereza con que se pueda ver estas actividades iniciales. La educación requiere, y la educación matemática aún más, saber los detalles de los comportamientos del grupo y sus consecuencias en el aprendizaje de determinados conceptos.

Centrada la observación en un sólo objeto, en este caso el cuadrado, la primera actitud de los estudiantes es preguntarse qué hago con esta ficha, el hecho de poner a hablar a los niños de figuras geométricas, algo tan simple[10] como un cuadrado por ejemplo, son temáticas que le corresponde abordar a la escuela. Por esto, la tarea no es fácil, pero si es elemental, damos un solo elemento y planteamos la mirada minuciosa de este elemento. En la medida en que nos es posible lo pegamos en diferentes posiciones.

El no hacer el gráfico en primera instancia, sino dar la ficha, hace que el estudiante pase a verlo desde muchos ángulos. La primera idea que el niño tiene es construir objetos con él, pero hay que centrarlo en hablar de la figura. En un comienzo las expresiones que hacen los niños son relacionadas con la construcción de objetos tridimensionales: “puedo armar una casita”, “haré un robot”, “construyo un carro”[11].

10 En el lenguaje verbal escolar no hay cosas simples. El cuadrado no es una secuencia de orden temporal.
Lo simple se ha asumido como lo que está ahí, lo que no requiere reflexión. Sin embargo, sabemos que la simpleza esta referida desde el conocimiento maduro, sin importar la etapa física del individuo. Se busca en la escuela llevar al estudiante a ver el problema desde esta “simpleza” para poder abordar el aspecto siguiente en el desarrollo del concepto. Casi podemos decir que la tarea de la escuela es crear condiciones para que los estudiantes vean como simple o elemental los grandes avances de la humanidad.

11 Intencionalmente hacemos énfasis en aquellas que nos dan más pautas sobre el concepto matemático.

Lograr que en forma colectiva[12] los estudiantes escriban sus observaciones con proposiciones que muestran significados nuevos, son claras y dan estabilidad y firmeza con el conjunto de ideas previas sobre el cuadrado. A continuación se transcriben algunos ejemplos.

Actos lingüísticos sobre el cuadrado de los estudiantes de primer ciclo (grado 2do) y segundo ciclo (grado 3ro)

PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO
MI cuadrado tiene 4 esquinas	
Este cuadrado tiene 4 paredes	
Tiene 4 caras iguales	El cuadrado tiene cuatro lados.
Mi cuadrado tiene cuatro puntas	
Tiene cuatro rayas rectas	Los lados del cuadrado son derechos
Las rayas del cuadrado van de dos en dos	
Las esquinas del cuadrado son derechas	Hay dos lados del cuadrado que van para el mismo lado
Las líneas del cuadrado son derechas	
Las líneas de mi cuadrado miden lo mismo	
Este cuadrado es de color azul[13]	Los lados del cuadrado son iguales[14]
Las cuatro esquinas de mi cuadrado son iguales	
Cuando se inclina el cuadrado no cambia nada	Las esquinas del cuadrado son derechas
Cuando se encuentran dos líneas del cuadrado tenemos una punta	Las esquinas del cuadrado son iguales.
Cuando se unen las líneas del cuadrado queda una esquina	El cuadrado tiene puntas

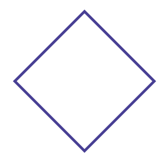
12 La preocupación como docentes de formar buenos ciudadanos nos lleva a buscar constantemente mecanismos para hacerlo. Por esto el trabajo de equipo que planteamos en esta actividad, los mecanismos de validación: todos registran las buenas propuestas, sin importar que estudiante lo hizo.

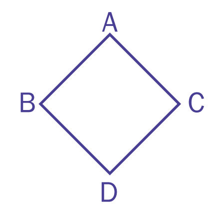
13 Cada niño hace referencia al color del papel de la ficha con forma cuadrada que le correspondió.

14 Utilizan reglas o bordes de una hoja para comparar los lados de los cuadrados.

La lectura y escritura en Matemáticas tiene una importancia básica, por lo cual este tipo de actividades escolares permiten desarrollar habilidades comunicativas. Podría pensarse que a los niños en pre – escolar y primero se les ha hecho énfasis en ver cuadrados en algunas caras de objetos y que se podría suprimir este tipo de actividades. Pero lo que se hace va más allá del reconocimiento visual, del señalamiento.

En 5^{to} de primaria, esta actividad se hace con cierta rapidéz. El acento se coloca en el gráfico y el nombre que se da a los vértices de la gráfica para hablar de ella. Entonces no se necesita tanto de una ficha con forma cuadrada en las manos de un estudiante, sino que el gráfico puede aparecer simplemente en el tablero, o en una guía, pero aún no se pueden desprender del gráfico.





Es la misma gráfica, pero se ha logrado que hablemos de una forma mucho más formal así[15]:

- Los cuatro lados del cuadrado son iguales. El lado $\overline{AB}$ es igual al lado $\overline{BD}$, igual al lado, $\overline{CD}$ igual al lado $\overline{AC}$. Es necesario que no exijamos el manejo de muchos signos, más vale avanzar poco, que recorrer un largo y amplio camino en vano. Los estudiantes aceptan escribir los lados como segmentos, pero puede ser que al tratar de introducir otros símbolos muestren inconformidad.
- El cuadrado tiene cuatro ángulos.
- Todos los ángulos del cuadrado son rectos[16].
- Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos; los lados $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ son paralelos.

15 Este avance evidencia la claridad y firmeza en concepto de “cuadrado” que va alcanzando el estudiante.
16 Es poco probable que diga que cada uno es de 90° Obsérvese que en este grado empiezan a usar el cuantificador. Ya no es el cuadrado

Otras descripciones que alcanzan a abordar en los últimos grados de secundaria en los que se pueden desprender de la gráfica da expresiones como:

- Todo cuadrado es rectángulo
- Todo cuadrado es un rombo
- Todo rectángulo es un paralelogramo

En grado once graficar en un plano cartesiano los cuadrados descrito es por ejemplo:

a. Uno de sus lados esta sobre la recta $f(x) = 3x - 5$, cuya diagonal mide $4\sqrt{2}$ unidades y uno de sus vértices esta en (0,-5).

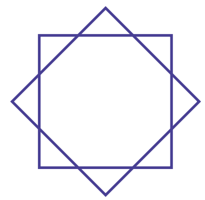
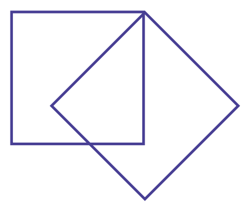
b. Las coordenadas de dos vértices consecutivos son: (-3,1) y (2,5).

Hay que tener en cuenta que el avance se da en cada grado, cuando en los anteriores se ha ido trabajando, los estudiantes se esmeran en mejorar, lo ven como una necesidad. Este ejercicio no basta para el aprendizaje del cuadrado, es necesario plantear situaciones que le permitan a los estudiantes afianzar lo aprendido y madurarlo.

Estrategia 2: Composiciones con figuras geométricas

Usar la composición con gráficas congruentes para apoyar la determinación de los elementos que constituyen una figura, en nuestro caso el cuadrado, y las relaciones que se pueden establecer, favorece el razonamiento sobre propiedades de la figura y hace que el pensamiento sea relacional. Cuando en el aula de clase los docentes asumen esta actitud, sorprenden los aspectos que son relevantes para el estudiante y los aspectos que tienen una gran dificultad para ser visualizados y memorizados. Que los estudiantes elaboren el discurso geométrico correspondiente con su estructura cognoscitiva, implica cambios en los anhelos del docente, en el tiempo que acostumbramos a dedicar a un tema, en la forma de evaluarlo, pero aún más son situaciones que se presentan en los gráficos que se trabajan en la geometría deductiva de los grados superiores.

La idea es entregar cuadrados congruentes a los estudiantes y se les pide hacer diferentes composiciones superponiéndolas para poder determinar las coincidencias que les lleven a ver elementos comunes congruentes. Una vez pegada la composición en el cuaderno hablamos de ella. A continuación algunos ejemplos:

	• Las puntas de los cuadrados no coinciden. • Del cuadrado que está debajo solo se ven cuatro pedazos iguales. • El cuadrado que está encima, toca los lados del otro cuadrado en dos partes. • Todos los lados de los cuadrados son iguales.
	• Los dos cuadrados tienen un sola punta en común. • El cuadrado que está encima no logra tapar el cuadrado inferior. • Cuando se miran parejas de lados de cada cuadrado, no hay dos que tengan la misma dirección.

Estrategia 3: Establecer semejanzas y diferencias

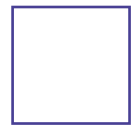
En la medida que se avanza en la escolaridad los estudiantes van haciendo reflexiones más agudas respecto a los elementos que se están estudiando en clase de matemáticas. Teniendo en cuenta lo propuesto por Alan Bishop buscamos pasar de la forma al contenido. No es el aprendizaje de temas discriminados lo que permite una nueva representación del objeto de estudio sino tener presente, como el uso del aprendizaje de conceptos matemáticos le permite a cada individuo avanzar en la conceptualización de otros.

La capacidad de comparar le da al estudiante la oportunidad de investigar los detalles que le llevan a realizar discriminaciones entre dos objetos. Desarrollando la capacidad de contrastar con mayor exactitud dos objetos para procesar datos le permite categorizar información; Es un conocimiento que le abre puertas al aprendizaje en todos los campos.

Es el docente quien sabiendo la esencia de cada gráfica plantea la comparación: cuadrado con rectángulo; cuadrado con rombo; cuadrado con paralelogramo; cuadrado con trapecio. Es él, quien va midiendo la exigencia de la palabra adecuada. Hablar de vértice en lugar de punta, de ángulo en lugar de esquina. Es conveniente que las gráficas que presentemos a los estudiantes varíen en posición y tamaño.

Hay que tener en cuenta que no es lo mismo enseñar el concepto de cuadrado a estudiantes de primer ciclo que a estudiantes de tercero o cuarto ciclo. Para la Matemática, vista como disciplina, es lo mismo, pero estamos empeñados en enseñar esas pequeñas sutilezas considerando cómo deben ser las representaciones adecuadas de los nuevos significados para que hagan parte de la estructura cognitiva previa, una estructura aumentada y firme con nuevos conceptos que **llevan al estudiante a un acercamiento a cada objeto de estudio con la tranquilidad de aprender, a deleitarse con lo que él puede interiorizar y no de aterrorizarle con la inmensidad de su ignorancia.**

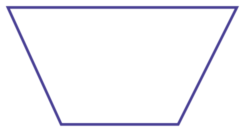
Se presentan algunas posibilidades para este tipo de acciones:



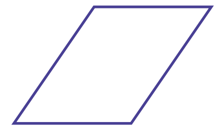
CUADRADO

RECTÁNGULO

Grado	SEMEJANZAS	DIFERENCIAS
2º	Los dos se parecen. Los dos tienen puntas. En el salón hay cuadrados y rectángulos también. Los dos tienen cuatro puntas. Los lados de los dos son derechos. Las esquinas son muy parecidas. Cada uno tiene cuatro puntas.	Con el cuadrado hago la cabeza del perrito y con el rectángulo el cuerpo. Los rectángulos no son iguales a los cuadrados. Hay un lado largo y otro cortico en el rectángulo, en el cuadrado no.
3º	Dos lados tienen igual dirección. Las dos gráficas tienen cuatro vértices. Las dos gráficas tienen cuatro esquinas. Las dos gráficas tienen cuatro lados.	Los lados son de diferente tamaño.



TRAPECIO



PARALELOGRAMO

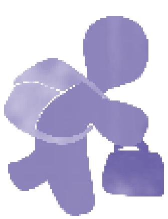
SEMEJANZAS	DIFERENCIAS
Las dos gráficas tienen cuatro lados.	Los lados en parejas tienen la misma dirección en el paralelogramo pero no en el trapecio.
Las dos gráficas tienen cuatro vértices.	Los lados en parejas tienen igual longitud en el paralelogramo pero no en el trapecio.
Las dos gráficas tienen cuatro esquinas.	
Las dos gráficas tienen dos esquinas grandes y dos esquinas pequeñas.	

TRAPECIO ISÓCELES

TRAPECIO ESCALENO

SEMEJANZAS	DIFERENCIAS
Las dos tienen cuatro lados.	No tienen dos lados iguales.
Los lados son rectos.	En uno hay dos ángulos agudos y dos obtusos, en el otro hay dos rectos uno agudo y el otro obtuso.
Los dos tienen cuatro ángulos.	
Los dos tienen dos lados paralelos.	
Los lados paralelos son diferentes.	

SEMEJANZAS	DIFERENCIAS
Las dos gráficas tienen cuatro lados.	En el rectángulo todas las esquinas son iguales pero en el paralelogramo no.
Las dos gráficas tienen cuatro vértices.	Las esquinas del rectángulo son rectas y en el paralelogramo no.
Las dos gráficas tienen cuatro esquinas.	
Los lados en parejas tienen l misma dirección en el paralelogramo.	
Los lados en parejas tienen igual longitud.	



Estrategia 4: Construcción

Es interesante ver el alto grado de dificultad que tiene el estudiante en los seis primeros grados, para dibujar con lápiz y regla un cuadrado. El número de relaciones que se deben tener en cuenta es grande y más aún, complejas para el estudiante. La independencia en la construcción con un alto acierto se da asombrosamente en el grado octavo. Por ello no deben sorprendernos, los problemas que se presentan en geometría en los primeros cursos de educación básica y media. Sin embargo, el docente puede acompañar al estudiante en el proceso de interiorización de las diferentes relaciones que se requieren, tanto en la visualización como en la representación. La interiorización se da si se tiene claridad en los conceptos, esta claridad da la firmeza a los aspectos que nos interesan en la clase de geometría.

Hay que tener en cuenta que en el trabajo de dibujar la ficha con forma cuadrada por ejemplo, se pueden presentar diferentes formas de trazar, lo cual evidencia desarrollos intelectuales particulares.

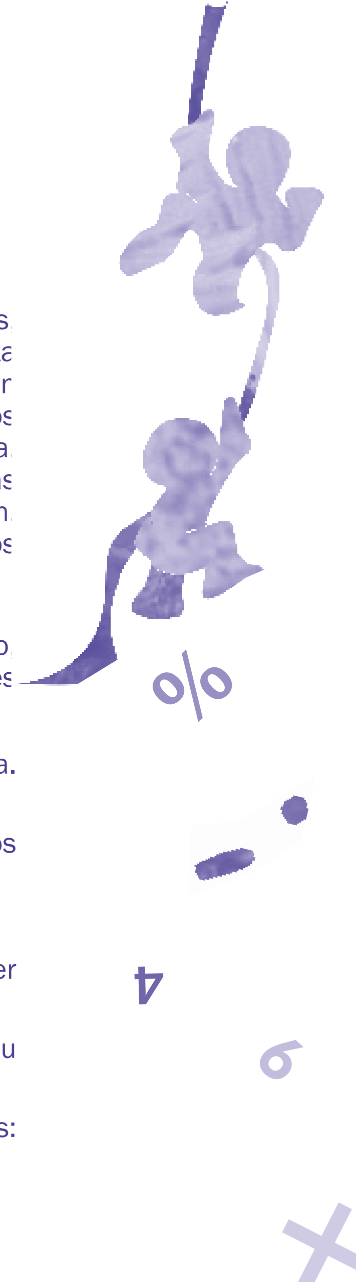
a. El niño coloca la ficha sobre su cuaderno y recorre el borde con el lápiz para dibujarla. Reconoce lo peculiar de la gráfica, la ve como una totalidad.

b. El niño marca solo los vértices de la ficha y retirándola dibuja a mano alzada o con regla los lados correspondientes.

- La ficha tiene elementos. El objeto se describe con otros objetos.
- Empieza a ver que por dos puntos diferentes pasa un sólo segmento. Lo cual puede ser usado para aproximarse al paralelismo prolongando las líneas.
- Organiza su visión y establece la relación entre los puntos y los lados que determinan su gráfica.

c. El niño dibuja la gráfica solamente por copia directa. Se puede presentar dos situaciones: se hace del mismo tamaño o buscando una proporción que le complazca.

- La relación se hace clara entre vértices y lados.



- La relación entre lados cobra interés. Los lados son paralelos dos a dos, perpendiculares dos a dos. Puede que no se estén dando nombres a esta relación, pero la situación existe para el estudiante.
- El tamaño no define el ser cuadrado. Existen las relaciones de perpendicularidad en lados consecutivos y paralelismo
- La posición no determina la forma.
- La construcción sobre el cuaderno cuadriculado usando las líneas de la hoja debe describirse como “segmentos de X lados del cuadrado del cuaderno. Ejemplo: un cuadrado cuyos lados miden cinco lados de cuadrado del cuaderno.

Estrategia 5: Una aproximación perceptual a las sucesiones

Este tema se estudia generalmente en grado once. Las sucesiones se abordan en los diferentes libros de matemáticas como sucesiones de números reales, entonces si hay sucesiones de números reales habrá sucesiones de otro tipo de conjuntos que no son números reales. Interesa ver las sucesiones donde el conjunto de llegada no exija que sea un conjunto de número sino un conjunto de gráficas porque es lo más cercano al estudiante en primaria y aún en secundaria.

Se define una sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ como “una función que asocia un número a_n a cada entero positivo n. El número a_n se denomina término n-esimo de la sucesión[17]” cuando la función esta definida como:

Sn: **N** → **R** donde **N** y **R** son respectivamente los números naturales y reales.

Teniendo en cuenta los términos que se han dado, veamos la definición de función, ella tiene tres invariantes:

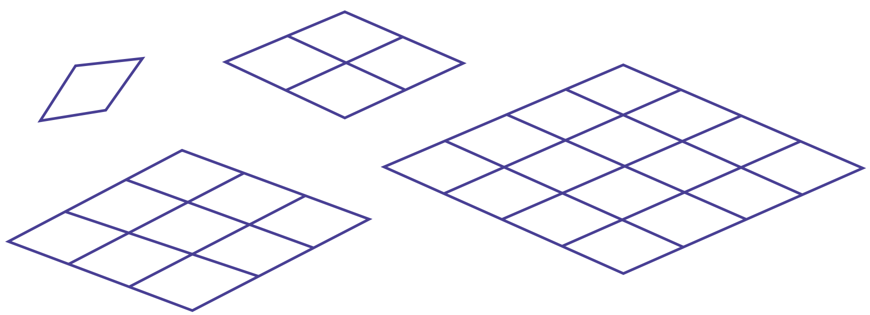
1. Hay un **conjunto de partida** y un **conjunto de llegada.** Tengamos en cuenta que las funciones no son de carácter estrictamente numérico. Son un tipo de relaciones especiales de conjunto

17 Stein Sherman CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA Página 584.México

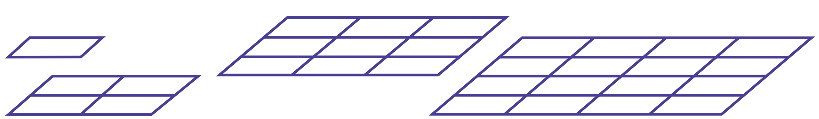
a conjunto. Nuestro conjunto de partida son los números naturales: {1, 2, 3,...} y el conjunto que cambiaremos en relación a la definición dada para sucesión es **R** (números reales) por un conjunto de figuras geométricas determinadas que tendremos que definir claramente.

Hablaremos del conjunto llegada al conjunto de gráficas semejantes[18] entre otros como **A** el conjunto de triángulos rectángulos isósceles, H el conjunto de triángulos rectángulos escálenos, **B** el conjunto de triángulos equiláteros, **C** triángulos obtusángulos isósceles, **D** rectángulos, **E** cuadrados, **F** rombos, **G** paralelogramos[19].v Veamos algunos elementos de estos conjuntos a los cuales haremos referencia en este apartado. La nominación de los conjuntos es arbitraria, podrían verse otros tipos de figuras, pero por el momento nos referiremos a estas.

F Conjunto de rombos



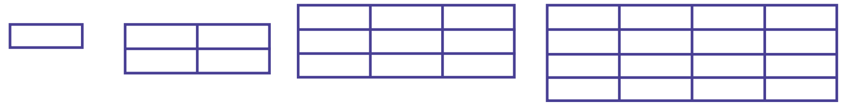
G Conjunto de paralelogramos



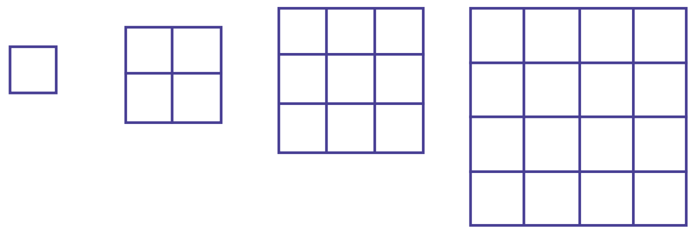
18 Polígonos semejantes son aquellos que tienen sus ángulos ordenadamente congruentes y sus lados homólogos proporcionales.

19 Es importante recordar que el cuadrado, el rectángulo, el rombo y paralelogramo. Todos son paralelogramos.

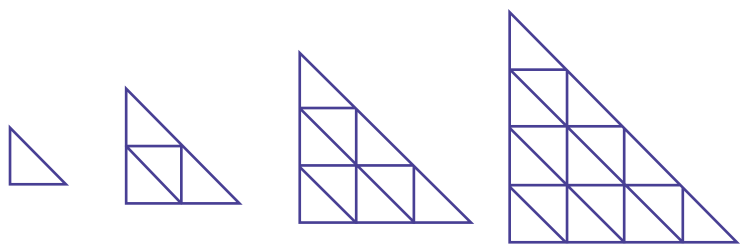
D Rectángulos



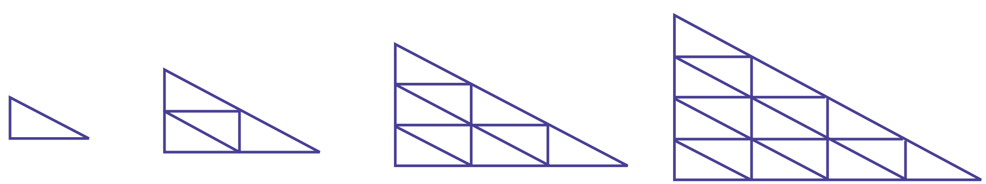
E Conjunto de cuadrados



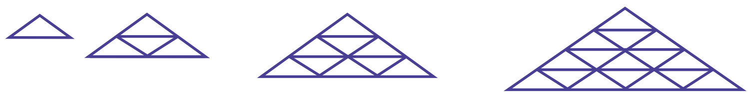
A Conjunto de triángulos rectángulos isósceles



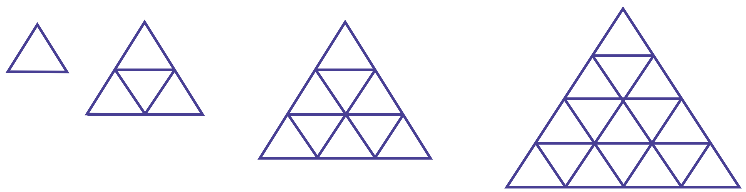
H Conjunto de triángulos rectángulos escálenos



C Triángulos obtusángulos isósceles,

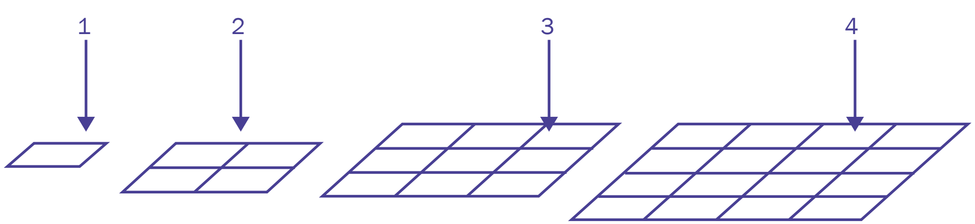


B Conjunto de triángulos equiláteros,



Cada uno de estos conjuntos tiene un número infinito de elementos, por espacio y comodidad dejamos solo esto cuatro elementos de cada uno. Podemos pensar también en otros conjuntos. Esto es solamente un punto de partida.

2. **Una regla para determinar la relación** entre el número natural y la gráfica respectiva de un conjunto determinado. **A partir de un polígono determinado, construir uno semejante a él con el menor número de polígonos congruentes con el anterior**[20].



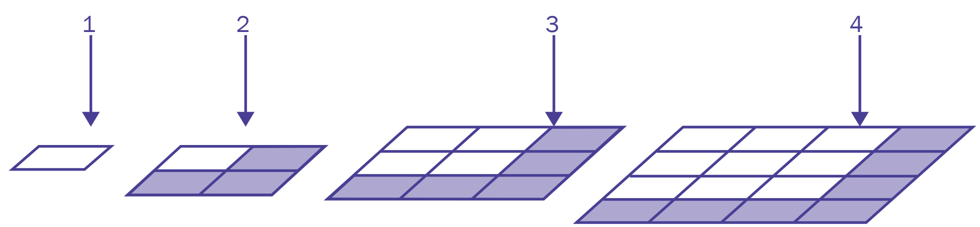
20 En cada caso se cambiaria la palabra polígono por cuadrado, rectángulo, triángulo rectángulo escaleno, etc.

Se podría continuar indefinidamente construyendo este tipo de gráficas y con unas cuantas formas diferentes. Cada una de estas gráficas corresponde a los términos de la sucesión.

3. La **unicidad de la imagen.** Para cada elemento del conjunto de partida (Para cada número natural) solo hay un elemento en el conjunto de llegada. La construcción de las figuras es posible, y todos tenemos la misma respuesta.

Por tanto podemos hablar de Sn: **N** $\rightarrow$ **X** Donde **N** es un número natural y **X** es uno de los conjuntos descritos en el primer invariante.

Hasta aquí podemos ver una función de los números naturales a un conjunto determinado de gráficas.



Podemos hablar de un tipo de representación, de entender el problema. Las gráficas dan cuenta de la situación.

Podemos avanzar más al respecto nuestro conjunto de llegada es un conjunto numérico. De nuevo los números naturales y la determinación en cada caso esta basada en la regla: “el mínimo número de figuras necesarias para crear la siguiente”. Aquí se trata de ver la construcción de otra manera.

Iteración	1	2	3	4	5	6	7	8
# de elementos	1	3	5	7	9	11	13	15

También se puede pensar en la regla de construcción de la sucesión en la cual la imagen esta dada por número de figuras que se requieren en determinada iteración:

$S_1 \longrightarrow 1$

$S_4 \longrightarrow 16$

$S_8 \longrightarrow 64$

Pensar en el perímetro de cada una de las gráficas que se van construyendo, definiendo un patrón de medida de la longitud. Podemos hablar por ejemplo de una base con:

2 — y la otra 1 — medido en este patrón:

Iteración	1	2	3	4	5	6	7	8
Perímetro —	6	12	18	24	30	36	42	48

Esperando haber aclarado el concepto de sucesión veamos los aspectos propios del aprendizaje y de la enseñanza.

El conocimiento profesoral se diferencia del conocimiento de las disciplinas básicas entre otras cosas por el reconocimiento de las diferentes *formas de comunicar y de pensar* que permiten acompañar respetuosamente al estudiante aprendíz de un concepto determinado. La comunicación que hacen los estudiantes se convierte en la expresión de su razonamiento. Estos dos aspectos se desarrollan paralelamente.

Se entregan a los estudiantes un número prudente de fichas congruentes de una de las formas geométricas planteadas anteriormente. Se recomienda que sean en un solo tono para apoyar el reconocimiento de la gráfica pedida. En primera instancia lo hacen sobre el pupitre y pasamos las construcciones al cuaderno. Se obtienen mejores respuestas de los estudiantes dejando una sola forma por día. La construcción con las fichas es en gran medida dispendiosa, pero saberlo así desemboca en tratar de dibujarlas y esto implica otra forma de ver el problema, que tampoco es simple pero enriquece el aprendizaje en otros aspectos.

El ejercicio permite discutir con los estudiantes las reglas de construcción que no tienen porque ser numéricas. Como que la forma de construir en los cuadriláteros es en forma de L en cambio cuando son triángulos se hace paralelo a uno de los lados. Llevar a transformaciones numéricas y encontrar expresiones generales que nos permitan el trabajo del dominio variacional. En cursos superiores se puede también trabajar la variación del perímetro y el área de cada tipo de gráfica.

5. PARA SABER MÁS

Algunos autores que han profundizado sobre los problemas de la educación y formación de los ciudadanos y que nos pueden aportar en las transformaciones necesarias en el aula de clase hoy. Para que los docentes hagamos semiosis cada que hagamos clase de geometría.

Gaston Bachelar trabajo sobre como formar científicos. En **La formación del espíritu científico** nos da la razón en la necesidad de enseñar geometría entre otras disciplinas del conocimiento si queremos alcanzar un mejor mañana.

Raymond Duval en su libro **Semiosis y pensamiento humano** basándose en sus experiencias hace una reflexión detallada sobre el como se adquieren los conocimientos geométricos durante la educación básica. Trabaja los problemas relativos a la comprensión de textos, al aprendizaje de diferentes formas de razonamiento (argumentación y demostración) representaciones. Comprender sus trabajos nos permite entender la visión del estudiante ante un concepto geométrico.

Paulo Freire nos permite en **Autonomía** nos hace un análisis riguroso de la importancia social del desarrollo de esta para lograr ciudadanos comprometidos con la sociedad,

Maturana H. en su libro **Formación Humana y capacitación** nos ofrece reflexiones sobre el sentido de la educación. En el sentido social, no el aprendizaje de una disciplina sino el aprender a ser humano.

Orientaciones curriculares para el campo de **Pensamiento Matemático** Secretaría de Educación Distrital de Bogotá, noviembre 2007. Un trabajo que nos va aproximando a la formación del pensamiento, más allá de una distribución temática de una disciplina.

Bernstein, Basil **Pedagogía, Control Simbólico e Identidad** es un teórico social que nos permite entender como se forma la sociedad.

Bertrand Russell. Mmatemático y filósofo inglés del siglo veinte. Uno de los representantes de la lógica simbólica. Autor de **Principia matemática.** Sus análisis de gran profundidad sobre los aspectos aparentemente simples, intrascendentes en matemáticas nos da pautas de la esencia de los conceptos a trabajar en la escuela.

5. BIBLIOGRAFÍA

Bachelar, Gaston **la formación del espíritu científico.** Editores SIGLO XXI España 2007.

Bernstein, Basil **Pedagogía, Control Simbólico e Identidad** Editorial MOARATA 1996 España.

Duval, Raymond **Semiosis y pensamiento humano** Edita UNIVERSIDAD DEL VALLE Colombia 1999.

Freire, Paulo **Autonomía** Editores SIGLO XXI Argentina 2009.

Maturana H**. Formación Humana y capacitación** Ediciones DOLMEN, Colombia 1998.

Secretaría de Educación Distrital de Bogotá Orientaciones currriculares para el campo de **Pensamiento Matemático**, noviembre 2007.

Russell Bertrand**. Principia matemática.** Editorial ESPARSA España 1961.