Conceptualización de la función lineal y afín:
Una experiencia de aula

Diana Marcela Sánchez Peña

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Maestría en Educación
Énfasis en Educación Matemática
Bogotá, Colombia
2016

Conceptualización de la función lineal y afín:
Una experiencia de aula

Diana Marcela Sánchez Peña

Nota de autor:

Trabajo de Grado presentado como requisito para optar al título de Magíster en Educación con Énfasis en Educación

Director
Pedro Javier Rojas Garzón
Doctor en Educación

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Maestría en Educación
Énfasis en Educación Matemática
Bogotá, Colombia
2016

Dedicatoria

A Dios por permitirme llegar a
este momento tan especial de mi vida
A mi Madre quien siempre me ha apoyado
A Carlos por su amor, comprensión y permanente
apoyo en esta etapa tan importante de mi vida,
A mis hijos, Mariana y Samuel
por iluminar mi vida

Agradecimientos

A mi Director de Tesis Dr. Pedro Javier Rojas Garzón,
por sus enseñanzas, por el tiempo dedicado y su valiosa colaboración.
A los Docentes y compañeros del Énfasis en Educación
Matemática por sus aportes críticos.
A mis estudiantes por su colaboración en el desarrollo de este trabajo.

Contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

El trabajo de investigación desarrollado pone en evidencia cómo las dificultades que encuentran los estudiantes para la comprensión del objeto matemático Función lineal y afín, reportadas en investigaciones previas, continúan vigentes. Si bien este objeto matemático ha sido materia de estudio en numerosas investigaciones, varias de ellas orientadas a mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje, se hace evidente la complejidad de su interpretación, la dificultad para reconocer y articular las diferentes representaciones, así como para modelar situaciones o fenómenos; al parecer, como resultado de la forma desarticulada y descontextualizada en que este objeto matemático ha sido "presentado" a los estudiantes, sin abordar las nociones de variación y dependencia. El propósito general de esta investigación, fue realizar una intervención en el aula, que posibilitara la constitución de los "objetos mentales" variable y dependencia, fundamentales en la comprensión del concepto función lineal y afín, a partir de la adaptación e implementación de un conjunto de tareas contextualizadas, en las cuales se utilizan distintas representaciones asociadas a dicho concepto.

***Palabras Clave*:** análisis fenomenológico, objetos mentales, variable y dependencia, función lineal.

Introducción

A partir del trabajo desarrollado en el aula, se pone en evidencia que las dificultades que encuentran los estudiantes para la comprensión del objeto matemático *Función lineal y afín* continúan vigentes[1]; aun cuando es un objeto matemático que ha sido materia de estudio en numerosas investigaciones, orientadas a mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje, en las cuales se ha hecho evidente la complejidad de su interpretación, la dificultad para reconocer y articular las diferentes representaciones; esto como resultado de la forma desarticulada y descontextualizada en que este objeto matemático ha sido presentado a los estudiantes, sin apelar a la noción de variación.

Dada esta situación, se considera oportuno realizar una intervención en el aula, que posibilite en los estudiantes la constitución de los *objetos mentales* variable y dependencia, los cuales, siguiendo las ideas de Freudenthal (1983) se constituyen en el recurso fenomenológico que permite la constitución del objeto matemático función; en este caso en particular el concepto de función lineal y afín, a partir de la adaptación e implementación de un conjunto de tareas contextualizadas, con estudiantes de noveno grado; e identificar de esta manera la evolución progresiva en los niveles de comprensión de los estudiantes durante la implementación, describiendo logros y dificultades durante dicha intervención en el aula.

En este trabajo se asume como principal referente teórico el enfoque de la *Educación Matemática Realista* (EMR), movimiento que nace en Holanda a comienzos de la década de 1970 como reacción al enfoque mecanicista de la enseñanza de las matemáticas, reconociendo que la educación matemática deben guardar relación con la realidad, mantenerse cercanas a los niños y ser relevantes para la sociedad; el uso de contextos realistas se convirtió en una de las características determinantes de este enfoque de la educación matemática, es decir, son los estudiantes quienes a partir del dialogo, la interacción entre pares, la negociación junto con la mediación del profesor, los encargados de construir su propio conocimiento, utilizando situaciones reales como punto de partida para aprender matemáticas.

[1] Para los propósitos de este trabajo, no realizare una diferencia explícita entre los conceptos de función lineal y función afín, en tanto que, desde el punto de vista variacional, pueden considerarse equivalentes, como lo plantean (Posada & Villa, 2006).

1. Aspectos generales de la investigación

En la primera parte de este capítulo, se presenta la contextualización y delimitación del problema de investigación, dando prioridad al reconocimiento del pensamiento variacional, desde los lineamientos curriculares y los estándares básicos en matemáticas. En la segunda parte, se realiza una descripción concisa del propósito de la investigación y, en la tercera, se presentan los antecedentes organizados en dos clases diferentes, por un lado estudios relacionados con el enfoque del pensamiento variacional, y por otro, se hace referencia a investigaciones relacionadas a los registros de representación asociados al concepto. Por último, y desde mi experiencia de aula como docente de matemáticas, se presenta una síntesis de los resultados encontrados al aplicar un instrumento de indagación relacionado con el concepto de función lineal a estudiantes de noveno grado.

1.1 Contextualización de la problemática

De acuerdo con mi experiencia como profesora de física y matemáticas, he podido evidenciar algunas dificultades que encuentran los estudiantes en relación con la comprensión del concepto de función lineal y afín, problemática que se hace evidente al proponer actividades expresadas en diferentes registros de representación, que pueden ser matematizadas haciendo uso del objeto matemático función; así como he podido encontrar evidencias que sugieren que para algunos estudiantes cada representación corresponde a un objeto matemático diferente, lo cual podría deberse al hecho de no contar con herramientas conceptuales que les permitan reconocer y articular las diferentes representaciones del objeto función, o como lo perciben Rey, Boubee, Sastre-Vázquez y Cañibano (2009) como resultado de la forma desarticulada y descontextualizada en la que este objeto matemático ha sido "presentado" a los estudiantes, cuyo estudio en muchos casos se ha desarrollado sin considerar la noción de variación y dependencia. Al respecto, y como lo plantea la (Comisión para la reflexión sobre la enseñanza de la matemática - COFREM (como se citó Rey et al., 2009) una función "no es ni una estadística de valores ni una representación gráfica ni un conjunto de cálculos ni una fórmula, sino todo ello al mismo tiempo" (p. 157).

Desde los Lineamientos Curriculares de Matemática del Ministerio de Educación nacional- MEN (1998) se plantea el inicio y desarrollo del pensamiento variacional, como uno de los logros que se desea alcanzar en la educación básica, pensamiento con el cual se busca superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, a través de un campo conceptual que permita analizar, organizar y modelar matemáticamente diversas situaciones, donde la *variación* se encuentra como sustrato de ellas. En los Lineamientos se reconoce la necesidad de analizar detalladamente "los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación para poner al descubierto las interpelaciones entre ellos" (MEN, 1998, p.72).

En los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas, se reconoce el objeto matemático función y sus modelos como uno de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación, constituyéndose en una "herramienta de conocimiento necesaria para "enlazar" patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio" (MEN, 1998, p.73). Se plantea que el desarrollo de las estructuras conceptuales del pensamiento variacional se perfecciona con el tiempo, su aprendizaje es un proceso que madura progresivamente para hacerse cada vez más sofisticado, de ahí la importancia de iniciar lo antes posible su estudio en el currículo de matemáticas, reconociendo que uno de los caminos para dotar de sentido y significado la constitución de este concepto es a partir de "situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica" (MEN, 1998, p.73) que promuevan la modelación a través de diferentes sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico, simbólico y algebraico. Un análisis en tal sentido, implica las transformaciones entre los diferentes sistemas de representación a fin de lograr una construcción conceptual compleja.

Desde los Estándares Básicos de competencias en matemáticas, por su parte, se considera que el pensamiento variacional se establece en "el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos" MEN (2004, p. 66) donde se reconoce que el desarrollo del pensamiento variacional no se atiende de manera específica en algún nivel de la escolaridad, es un proceso lento y complejo que madura progresivamente, con el cual se espera generar desde la Educación Básica Primaria:

> Distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral (MEN, 2004, p. 66).

En los Estándares se contempla que el desarrollo del pensamiento variacional se da en estrecha relación con los otros tipos de pensamientos matemáticos (el numérico, el espacial, el métrico y el aleatorio), y con otros tipos de pensamientos relacionados a diferentes ciencias, relacionados principalmente con procesos de modelación de situaciones naturales y sociales, por medio de modelos matemáticos. En este documento se plantea que el estudio de los patrones está firmemente relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional (*constante*, *variable*, *función*, *razón, dependencia e independencia* de una variable con respecto a otra, y con los *modelos funcionales* asociados a ciertas familias de funciones), y que su aprendizaje se debe introducir con el estudio de regularidades y la comprensión de los criterios que rigen esas regularidades, involucrando actividades que les permitan a los estudiantes analizar de qué manera cambia el valor o forma de una secuencia o sucesión de figura, letras o números; realizar conjeturas respecto a los siguientes términos de la secuencia, en donde se les permita expresar dichos términos a través de distintas representaciones; actividades que posibiliten al estudiantes formular un procedimiento, operación o expresión algebraica que permita reproducir la secuencia o sucesión, y finalmente; calcular los siguientes términos, para confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas, estrategia que se constituye en una forma de preparar un aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar a los grados superiores (MEN, 2006).

Ahora bien, desde el plan de área de la institución educativa en la que trabajo, encuentro que el pensamiento variacional no se considera de manera progresiva iniciando desde la primaria, como se plantea en los Lineamientos Curriculares y en los Estándares Básicos de Competencias, sino que está propuesto para iniciar en grado séptimo, curso en el cual no suele ser abordado o desarrollado argumentando limitaciones de tiempo, ya que está programado para el último periodo del año escolar. En lo que respecta al concepto de función lineal y afín, es un objeto matemático que debe ser abordado en noveno grado según dicho plan, el cual es usualmente expuesto en el aula como un producto acabado, enseñado desde un sentido estático, a partir de diferentes representaciones consideradas de manera aislada, en donde se privilegia la enseñanza de una ecuación como una estrategia que posibilitará la solución de problemas, sin abordar elementos que podrían considerarse básicos, como los relacionados con las nociones de *variación* y *dependencia*, práctica que Freudenthal (1983) consideraba como una *inversión antididáctica,* por cuanto está orientada a enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma, enfoque contrario a su propuesta fenomenológica, desde la cual plantea que se deben tomar los fenómenos del mundo real, y desde las matemáticas mismas, estudiar las formas de organizarlos y abordarlos a través de *objetos mentales* que posibiliten ir constituyendo los objetos matemáticos, como pueden ser los de función lineal y función afín.

En relación con los resultados obtenidos en las diferentes pruebas estandarizadas, como lo son la Prueba Saber 11 (para el ingreso a la educación superior), las Pruebas Saber orientadas a los estudiantes de otros grados de la educación básica, y las pruebas TIMSS (Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias), Posada y Villa (2006) reconocen un desfase entre el currículo planteado y el logrado, pues tanto en las Pruebas Saber, como en las Pruebas TIMSS, los resultados estuvieron muy por debajo del rendimiento promedio esperado. Específicamente en relación con las pruebas TIMSS, Posada y Villa (2006a) aseguran que:

> […] los estudiantes colombianos tienen un rendimiento deficiente cuando requieren la identificación de patrones en arreglos numéricos, presentados en tablas, parejas ordenadas o situaciones problemas expresadas en forma verbal. Además resuelven problemas si el modelo de representación de éste sugiere la solución, pero su rendimiento es deficiente si la resolución del problema implica tanto la expresión de la información en un modelo algebraico, como un método de solución de éste. Esto quiere decir que tienen dificultad al pasar de una situación problema expresada en forma verbal o en tabla a otro modo de representación, algebraica por ejemplo, y se agudiza la situación cuando la solución no es directa o involucra varias operaciones o relaciones (p. 22).

Dada la situación planteada en los párrafos anteriores, se considera oportuno realizar una intervención en el aula, que posibilite en los estudiantes la constitución de los *objetos mentales* de variable y dependencia, los cuales, siguiendo las ideas de Freudenthal (1983) se constituyen en un recurso fenomenológico fundamental en la constitución del objeto matemático función, y en este caso en particular el concepto de función lineal y afín, a partir de la adaptación e implementación de un conjunto de tareas contextualizadas, en las cuales se utilizan distintas representaciones asociadas al concepto, promoviendo la articulación entre ellos.

Por último, y considerando la situación planteada hasta este punto, es oportuno plantear la siguiente pregunta que orienta el desarrollo de este trabajo de investigación ¿De qué manera la constitución de los *objetos mentales* variable y dependencia, propician la comprensión del concepto función lineal y función afín por parte de los estudiantes?

1.2 Propósitos de la investigación

El propósito de esta investigación es posibilitar en los estudiantes la constitución de los objetos mentales variable y dependencia, orientada a potenciar procesos de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático función lineal y afín.

En tal sentido, se parte de ajustar y desarrollar una intervención en el aula enmarcada en la constitución de los objetos mentales variable y dependencia, orientada a fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto función lineal y afín, con estudiantes de noveno grado; así como identificar y caracterizar la evolución progresiva en los niveles de comprensión de los estudiantes durante la implementación de las tareas ajustadas, describiendo logros y dificultades durante dicha intervención en el aula.

1.3 Antecedentes

Teniendo en cuenta que este trabajo de investigación toma como referente el enfoque del pensamiento variacional de los objetos matemáticos función lineal y función afín, planteados en los Lineamientos Curriculares MEN (1998) y en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas MEN (2006); así como en el estudio de las representaciones asociadas al mismo, se revisaron algunos trabajos encaminados en esta dirección, tanto a nivel nacional como internacional, con el propósito de establecer algunos referentes teóricos que puedan orientar el desarrollo de esta investigación.

En principio, se relacionan cuatro estudios que abordan una discusión desde el enfoque variacional, finalmente se revisan cuatro trabajos que dan cuenta de aspectos relacionados con los sistemas de representación.

1.3.1 Estudios de la función relacionados con el enfoque variacional.

En una investigación sobre el concepto de función desarrollada por Sierpinska (1992, como se citó en Ruiz-Higuera, 1993) se plantea el problema general de la comprensión de un concepto matemático, y a partir de un desarrollo histórico-epistemológico del concepto de función, se reportan algunos obstáculos epistemológicos presentes en la comprensión de dicho concepto, en donde se reconoce que para hablar de comprensión en matemáticas, el análisis debe centrarse en el paso desde antiguas formas de conocer a nuevas formas de conocer, prestando especial atención en los actos de comprensión y en los actos de superación de obstáculos. Según Sierpinska (1992 como se citó en Ruiz-Higuera, 1993) plantea la siguiente pregunta básica:

> ¿A qué hace referencia la definición de función? (X, Y, f). X e Y se refieren al mundo de los cambios, o bien a los objetos cambiantes; el símbolo f se refiere al mundo de las relaciones entre cambios u objetos cambiantes, o al mundo de los procesos que transforman objetos en otros objetos. Estas relaciones deben estar bien definidas y esto se refiere al mundo de los criterios, modelos y leyes (pp. 30-31).

Y señala además, que la enseñanza de las funciones debería desarrollarse en el aula de clase de manera análoga a como se presentó en la historia, primero como modelo de relaciones, posteriormente, como herramienta para la descripción y la predicción. Una de las conclusiones del trabajo de Sierpinska (1992 como se citó en Ruiz-Higuera, 1993) reporta que:

> Los estudiantes deben interesarse en explicar los cambios, y determinar así regularidades; identificando no sólo aquello que cambia, sino también cómo cambia; en donde las expresiones analíticas de las funciones debería constituirse como herramientas que permitan modelar situaciones de la vida real (p. 93).

En relación con lo curricular, García, Serrano y Camargo (1998) plantean una propuesta para abordar las nociones de función como dependencia y la proporcionalidad como función lineal en la educación básica, donde la función es propuesta como un organizador curricular. Para estos autores, “la noción de función como dependencia, es herramienta imprescindible para abordar los más variados problemas de los distintos campos, puesto que en éstos lo que interesa modelar matemáticamente son los mundos que cambian y el cambio” (p. 23). Esta propuesta parte de un diseño de unidades que permitan generar procesos reflexivos y mejorar la práctica educativa de las matemáticas, proponiendo algunos modelos nucleadores para la formulación de unidades didácticas, entre los que están: exploración y tipos de regularidad, patrones de repetición, patrones de crecimiento, patrones numéricos y geométricos, estudio de patrones con la calculadora como herramienta didáctica, entre otros, este tipo de actividades potencia el reconocimiento de estructuras y contribuye a describirlo verbal y simbólicamente, siendo la generalización la que permite al estudiante prepararse para el uso de variables en el futuro. La habilidad para reconocer patrones, debe llevar intuitivamente a fórmulas y relaciones matemáticas que tengan la estructura de relación funcional entre el valor numérico con el puesto que ocupa la secuencia.

En el contexto universitario, Rey et al. (2009) plantean que los estudiantes que ingresan a la universidad encuentran dificultades para interpretar, definir y graficar funciones que permitan modelar situaciones problemáticas, tanto del campo de la matemática como de otras áreas del conocimiento, y que se encuentra una diversidad de concepciones asociadas a la noción de función, producto de un sistema educativo que no ha promovido el estudio y el análisis de la variabilidad de fenómenos asociados al cambio, sino que por el contrario se ha enfocado en el uso de rutinas y procedimientos algorítmicos, en donde, la expresión algebraica de una relación funcional se reduce básicamente a "recetas" dejando de lado su gran poder modelizador.

Rey et al. (2009) reconocen que las fórmulas algebraicas "son visualizadas como conjunto de técnicas eficaces para encontrar el valor de las incógnitas, esta concepción elimina el sentido de variabilidad, movilizando incógnitas en lugar de variables" (p. 154) además, muchas de las dificultades que encuentran los estudiantes están relacionadas con la ausencia de su potencial modelizador durante su enseñanza, e identifican la variación y la dependencia, como los principales elementos constitutivos en los proceso de enseñanza y de aprendizaje de la noción de función. Destacan la importancia y reconocimiento de las representaciones mentales de los alumnos adquiridas previamente al ingreso a la Universidad, el poder modelizador del concepto de función, basado en sus elementos constitutivos de dependencia y variabilidad que le otorgan su carácter dinámico, la necesidad de diferenciar el concepto función de sus representaciones en los distintos registros, así como la resolución de situaciones problemáticas contextualizadas, que promuevan la articulación entre los diferentes registros.

Desde un enfoque integral, en el contexto de la educación básica secundaria, Posada y Villa (2006a) reportan el diseño e implementación de una propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal, a partir de la consolidación del pensamiento variacional, mediante tres elementos didácticos fundamentales, como son: la noción de variación como base en la construcción del concepto matemático de variable, el proceso de modelación matemática como una estrategia didáctica, y los sistemas semióticos de representación como elementos que facilitan los procesos de modelación y permiten objetivar los conceptos matemáticos.

En relación con los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las funciones, Posada y Villa (2006b) plantean que "su estudio se ha desarrollado sin apelar a la noción de variación y esto ha impedido verlas como modelos matemáticos" (p. 130) concluyendo que las estrategias recientes de enseñanza del objeto matemático función son insuficientes para lograr que los estudiantes reconozcan, en este concepto, una herramienta fundamental en la modelación de fenómenos que implican variación y cambio de magnitudes.

Dentro de los resultados encontrados, Posada y Villa (2006b) señalan que:

- La función es un concepto que en cuanto a sus sistemas de representación y como modelo de situaciones de variación ha evolucionado históricamente, ello sugiere la presencia de situaciones que involucren: la identificación de regularidades, razones y proporciones, descripción de gráficas, expresiones analíticas, relaciones de dependencia; como elementos indispensables en la construcción de dicho concepto, que permiten pensar en ideas para el diseño de situaciones que ayudan a los estudiantes a reconocer, en el concepto de función, un modelo matemático que describe, sistematiza y organiza situaciones en contextos particulares donde intervienen fenómenos de variación y cambio.
- Trabajar desde un enfoque de modelación matemática requiere largos periodos de tiempo, y debe ser abordado desde los primero años de escolaridad. Este estudio, realizado en grados superiores, se centró fundamentalmente en la fase de abstracción-formulación, la cual posibilitó que los estudiantes reconocieran en el concepto de función lineal, un modelo que permite describir situaciones en contextos particulares, no obstante, se reportan dificultades en la fase de validación y modificación.
- En cuanto al sistema de representación gráfico no se logró avanzar en su compresión, dado que los estudiantes tenían un conocimiento muy limitado de este registro como representante de una relación entre variación de magnitudes. Su interpretación iba desde una mirada meramente icónica hasta una visión muy puntual de la relación, es decir, no había una interpretación por intervalos o global de la gráfica, lo cual no permitió reconocer las características de variación que se pueden observar en este registro ((pp. 171-178).

En síntesis, una buena comprensión del concepto de función, implica pensarlo como un modelo matemático de relaciones de variación, apoyado en los diferentes sistemas semióticos de representación.

1.3.2 Estudios de la función y sus representaciones.

En un contexto de educación superior, Guzmán (1998) describe un estudio basado en la teoría de Registros Semióticos de Representación Duval (2006) y su incidencia en el aprendizaje de algunas propiedades de las funciones, el cual tuvo como objetivo poner en evidencia los sentidos que tienen algunas nociones asociadas al concepto de función para 75 estudiantes de primer año de ingeniería, expresadas en los registros de representación gráfico, algebraico y lenguaje natural. Desde esta experiencia, la autora reconoce que una actividad cognitiva propia en el proceso de enseñanza –aprendizaje de las matemáticas como lo plantea Duval (2006) consiste en distinguir y coordinar distintos registros de representación, los cuales deberían constituirse como objetivos pedagógicos en la enseñanza de las matemáticas. Dentro de las conclusiones más relevante de este trabajo están:

- Las respuestas de los estudiantes están dadas en un solo registro, de manera explícita no se evidencian coordinación entre dos o más registros.
- Las respuesta dadas por los estudiantes se expresan en el mismo registro en el que se formuló la pregunta, o recurren al registro algebraico, el cual es privilegiado en las clases.
- Se evidencian deficiencias conceptuales y falta de coordinación entre registros, esto como una posible consecuencia de la enseñanza recibida por estos estudiantes.
- Las respuestas dejen al descubierto que los estudiantes cuentan con una concepción parcial del concepto estudiado, y encuentran dificultad para formular explicaciones en el registro natural por escrito.
- Finalmente sugiere la importancia de enfrentar a los estudiantes a situaciones o problemas que requieran la articulación entre las distintas representaciones semióticas el objeto matemático estudiado, así como, una mayor presencia del registro natural en las clases de matemáticas (pp. 19-21).

En un contexto de educación básica secundaria, Vergel y León (1997) parten del reconocimiento de las dificultades en los procesos de enseñanza – aprendizaje relacionados con el concepto de función, y frente a esta problemática, proponen una intervención en el aula centrada en el desarrollo de situaciones – problema. El propósito de este trabajo es el de adaptar e implementar una propuesta sobre la enseñanza del concepto de función lineal, basada tanto en algunas formas de representar una función (verbal, tabla, gráfica o formula), como en el uso e interpretación que de éstas se haga, así como los procedimientos utilizados en la traducción de una forma de representación a otra. La propuesta tomada como base, es planteada por Azcarate y Deulofeu (1996) y, adaptada para el caso específico de la enseñanza del concepto de función lineal en grado octavo; en esta adaptación se presenta un esquema y las hipótesis del trabajo sustentadas por Azcarate y Deulofeu (1996); Janvier (1987), y Sfard (1992) las cuales se corroboraron en el desarrollo de la investigación.

En esta propuesta se consideró pertinente trabajar el concepto de función lineal, al pensarlo como un conocimiento que permite articular el trabajo en matemáticas, de igual manera es considerado un objetivo importante de la educación, en tanto que ofrece modelos para interpretar la realidad, posibilitando actuar en ella. Se está frente a una estructura conceptual nucleadora, con un enorme campo de aplicación teórica y práctica, es por ello que en esta propuesta se considera que dicha estructura conceptual merece atención en su enseñanza, más aún, si se es consciente de la complejidad de su comprensión por parte de los estudiantes, la dificultad para el reconocimiento de las diferentes imágenes que constituyen el mismo objeto y la forma como se trabajan temas específicos que involucran el concepto de función, exigiendo profundas construcciones teóricas.

Dentro de las conclusiones más relevante de este trabajo están:

- La implementación de las actividades propuestas, posibilitó en los estudiantes un acercamiento a diferentes formas de representar una función lineal y a los procesos involucrados en el uso, interpretación y traducción, entre otras formas de representar el concepto.
- Las hipótesis plantadas, con base en la tesis de Azcarate y Deulofeu (1996) Sfard (1992),entre otros, se corroboran durante el desarrollo de la propuesta en tanto se evidenció en los estudiantes un acercamiento al concepto de función lineal
- Durante la propuesta se plante el trabajo en diversos conjuntos numéricos. Al respecto se observó en el trabajo de aula que los estudiantes usan con alguna propiedad los números naturales y enteros, sin embargo, en otros universos numéricos se evidencian algunas dificultades respecto a la conceptualización y a la operatividad.

- Se observa que los estudiantes eran capaces de inferir el enunciado verbal como una forma de representar una función, fue difícil para ellos simbolizar lo verbalizado e interpretar la simbolización usada en el contexto de las funciones. Sin embargo evidenciaron algunos logros en cuanto al uso de un lenguaje simbólico formal, en particular el uso de letras para representar números generalizados y como parámetros una relación funcional.
- Una forma de trabajo en el aula como la desarrollada en esta experiencia, propicia en el ambiente escolar, mayor comprensión del estudiante sobre lo que hace, la reelaboración de sus preconceptos, toma de conciencia sobre la necesidad e importancia de argumentar sus afirmaciones e igualmente la relevancia de escuchar los argumentos del otro (pp.117-119).

Planchart (2000) en su tesis doctoral, aborda la idea de mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje del concepto de función y para ello requiere que este concepto sea analizado desde cuatro aspectos medulares: proceso didáctico en la adquisición de las funciones, la visualización, los sistemas de representación, y la modelación desde el contexto físico y geométrico; y para ello propone, en primer lugar, identificar y analizar las dificultades que surgen durante el proceso que conduce al aprendizaje de las funciones. En segundo lugar, analizar el papel de la visualización en la conceptualización de las funciones, diseñar módulos de actividades donde se incorpora la modelación matemática como articulación de los registros semióticos en la enseñanza y aprendizaje de las funciones. Propone a los estudiantes tareas de modelación y simulación diseñada con medios tecnológicos, en las que se requieren la articulación de diferentes registros de representación para dar solución al problema.

Dentro de los hallazgos y las conclusiones más relevantes de este trabajo, basadas en los análisis de los resultados de los cuestionarios, las entrevistas y las actividades realizadas con los estudiantes, están:

- Las dificultades en el manejo de las distintas representaciones semióticas utilizadas en el concepto de función.
- La tendencia a pensar que las funciones son continuas, lo cual es propiciado en muchos casos por el docente, quien privilegia las funciones continúas con una única fórmula. Ante el registro gráfico, los estudiantes tienden a unir los puntos, lo cual consideran un requerimiento para ser función.

- Las dificultades relacionadas con la notación simbólica de la función; su lectura adquiere otra dimensión, por ejemplo, deja de ser función para convertirse en una operación aritmética de multiplicación.
- Las dificultades en la conversión, tanto del sistema de representación gráfico como del sistema en lenguaje natural (sobre situaciones físicas) al sistema algebraico (Planchart, 2000, p.161).

Sin embargo, dicho autor reconoce que los estudiantes participaron activamente en el proceso de modelación, entendiéndolo como una alternativa didáctica que permite coordinar los distintos sistemas de representación.

Por otra parte, desde una investigación desarrollada en México por Peralta (2002) con estudiantes universitarios, fundamentada en los trabajos de Duval (1.998) sobre los registros de representación semiótica, también se reportan dificultades asociadas al aprendizaje de la función lineal al trabajar transformaciones de conversión entre representaciones gráficas, algebraicas y tabulares. Entre las conclusiones se destaca que:

- Los estudiantes no cuentan con un significado claro de la noción de pendiente, ya que ninguno de ellos asocia el signo de la pendiente con la inclinación de la recta, frente a esta condición es complicado que puedan convertir las representaciones graficas en algebraicas o viceversa.
- De manera general los estudiantes recurren a graficar una a una las parejas registradas en las tablas, y solo a partir de una representación gráfica logran determinar si la relación entre las variables es o no lineal. El registro tabular es considerado por los estudiantes como una herramienta que les permite ubicar puntos en el plano cartesiano y no como una representación en sí misma.
- Los errores registrados no solo revelan un descuido notorio de las actividades de conversión por parte de la enseñanza, sino además una confianza excesiva de los estudiantes en los procedimientos que han logrado mecanizar y de los que no manifiestan tener una significación clara.
- Es muy difícil que los estudiantes puedan utilizar con éxito la función lineal como herramienta para resolver problemas de oferta y demanda; ya que no muestran una articulación espontánea y libre de sus diversas representaciones,

> lo que lleva a pensar que no hay una aprehensión conceptual del objeto bajo estudio (pp, 172-173).

En concordancia con los procesos de conceptualización del objeto matemático función, diversos trabajos de investigación Gutiérrez (2007); Ospina (2012); Planchart (2000); Posada y Villa (2006a); Rey et al. (2009) Vergel y León (1997) entre otros, dan cuenta de la complejidad de su comprensión por parte de los estudiantes; encontrando que una de las dificultades que se evidencia es la manera como se abordan los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula, pues "en muchos casos, primero se formaliza el conocimiento a enseñar y luego se aplica en la resolución de ejercicios que, en general, están construidos exclusivamente para la aplicación directa del concepto aprendido, sin ningún tipo de transformación" (Rey et al., 2009, p. 153). En lo que refiere a los procesos de enseñanza de la noción de función, se da lugar a concepciones muy restringidas:

> Se utilizan fórmulas como "recetas", sin utilizar su gran poder matematizador. Las fórmulas algebraicas son visualizadas como conjunto de técnicas eficaces para encontrar el valor de la incógnita, esta concepción elimina el sentido de variabilidad, movilizando incógnitas en lugar de variables (Rey et al, 2009, p. 2).

De igual manera, las propuestas que consideran las funciones y sus representaciones, coinciden en afirmar que la principal causa en las dificultades de aprendizaje de las funciones radica en la conversión entre los diferentes registros de representación, también reconocen la dificultad que encuentran los estudiantes para interpretar el comportamiento global de las gráficas; registro que no logran articular con el registro algebraico, resultado de prácticas educativas que se apoyan en "la yuxtaposición simultanea de varias representaciones de un mismo objeto" Duval (2006, p.151) prácticas que en el mejor de los casos, predisponen a los estudiantes a mecanizar los procedimientos en lugar de articular las diferentes representaciones, en donde se privilegia el registro algebraico por encima de los demás, que en muchos casos son considerados por los estudiantes como herramientas y no como representaciones en sí mismas.

1.4 Una mirada desde la experiencia de aula: Un caso en grado 9°

Previo al diseño y desarrollo del conjunto de tareas propuesto para la intervención en el aula que se reporta en este informe, se toma como punto de partida el análisis a las respuestas obtenidas en un instrumento de indagación, orientado a establecer, si a partir de una situación dada, los estudiantes reconocían opciones de representar la función lineal; instrumento que inicialmente fue aplicado a un grupo de estudiantes de noveno grado, diferente a la población con la cual se desarrolló la propuesta de intervención en el aula, quienes previamente habían desarrollado la temática de función lineal con otro docente de la misma institución.

Instrumento de indagación

Fernando se encontraba desempleado desde hace más de 6 meses, tiempo durante el cual se dedicó a repartir hojas de vida y presentar varias entrevistas. Para su sorpresa, encontró que había sido seleccionado para trabajar con la Compañía de Gaseosas del Norte, encargada de la producción y distribución de Gaseosas. Fernando fue asignado al área de producción, contratado específicamente para operar la máquina semiautomática de tapar botellas, trabajando 8 horas diarias de lunes a sábado, de 8:00 a.m. a 5:00 p.m., periodo durante el cual toma una hora de receso para almorzar y descansar. Después de dos horas de haber sido ubicado en su punto de trabajo, Fernando observó que la máquina operada por él había tapado 1.800 botellas.

1. *Proponga una tabla que le permita comparar el número de botellas tapadas por la máquina que opera Fernando en relación al tiempo transcurrido.*
2. *Represente en un gráfico cartesiano la situación descrita en la tabla anteriormente propuesta por usted.*
3. *Explique cómo se puede saber la cantidad de botellas tapadas en un determinado tiempo y encuentre una expresión o una fórmula que permita determinar el número de botellas que Fernando tapa en **x** horas*

Figura 1. Instrumento de indagación.

El diseño del instrumento de indagación fue el resultado de adaptar una de las situaciones propuestas en el trabajo desarrollado por Posada y Villa (2006a) la cual fue pensada como una situación susceptible de ser organizada (matematizada) a través de la función lineal y no como una tarea rutinaria que debe ser solucionado por los estudiantes. Por medio de esta situación presentada en el registro lenguaje natural, se analizó, por un lado, la manera en que el estudiante reconoce y establece relaciones entre las variables que intervienen en la situación, y por otro, la manera de caracterizar la situación dependiendo del tipo de variación que percibe; igualmente, si por medio de dicha caracterización, lograba matematizar la situación a través de la función lineal. Adicionalmente se indagó por las posibilidades que tienen los estudiantes de trabajar con distintas representaciones y de articularlas en el proceso de matematización.

Frente al desarrollo del trabajo individual, los estudiantes plantearon propuestas de solución que pueden caracterizarse de la siguiente manera:

1). Respecto al **primer punto** del instrumento de indagación, en el cual se busca determinar si el estudiante reconoce la existencia de una relación de dependencia entre las magnitudes y consigue establecer dicha relación mediante el registro tabular.

La siguiente clasificación reúne en grupos de resultados, las elaboraciones de los estudiantes:

No responde (2,61%). Este grupo reúne a los estudiantes que no propusieron ningún tipo de registro como estrategia de solución.

No Reconocen ni establecen relaciones entre las magnitudes (13,15 %). En este grupo se recogen las producciones de los estudiantes que presentan una tabla en la que intentan consignar la mayor cantidad de información proporcionada por la situación, en la cual, se evidencia que los estudiantes no logran reconocer las magnitudes involucradas, ni establecer relaciones de dependencia entre ellas.

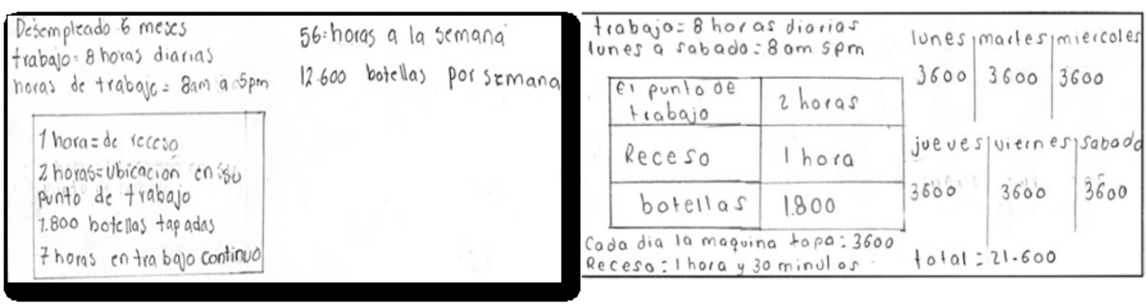


Figura 2. Ejemplo de los estudiantes que no reconocen ni establecen relaciones entre las magnitudes

Reconocen las magnitudes relacionadas pero no identifican la relación (29%). Corresponde a las producciones de los estudiantes que reconocen que las magnitudes que intervienen en la situación están relacionadas, no obstante, establecen diferentes tipos de relaciones a la planteada entre las variables en la situación. En este grupo se encuentra la producción de estudiantes que proponen tablas en donde aparentemente relacionan el tiempo con el número de botellas tapadas, sin embargo, la relación que establecen no es de dependencia, por ejemplo, en algunas producciones se evidencia que constituyen cambios de dos en dos de manera independiente para cada variable, sin establecer ningún tipo de relación funcional entre ellas.

Figura 3. Ejemplo de los estudiantes que reconocen que las magnitudes están relacionadas pero no establecen la relación

Reconocen y establecen relaciones entre las magnitudes (55,26 %). En este grupo se recoge las producciones de los estudiantes que identificaron y establecieron adecuadamente la relación de dependencia entre las variables, a través del sistema de representación tabular. En algunos de estos casos, los estudiantes propusieron tablas con alguna información que insinúa el reconocimiento de la relación de dependencia, no obstante, la poca información registrada y la manera de relacionarla, no permite evidenciar la relación de variación entre las magnitudes involucradas, otros sugieren una tabla de datos en donde registran exclusivamente la información suministrada por la situación, en la cual no se proponen datos diferentes a partir de la relación establecida.

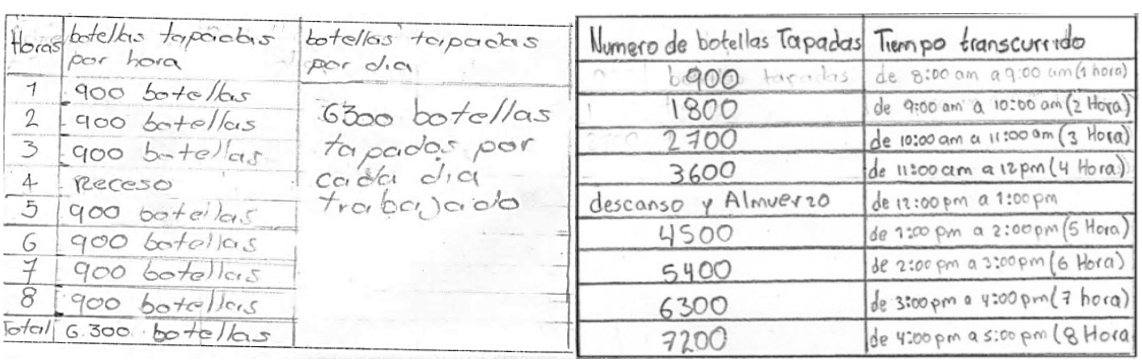


Figura 4. Ejemplo de los estudiantes que reconocen y establecen relaciones entre las magnitudes

Frente a las respuestas obtenidas a nivel individual, una de las que generó la necesidad de realizar una entrevista, fue la dada por Leidy (primera tabla, figura 4); entrevista en las que básicamente se buscó complementar y precisar las respuestas en aquellos casos en los cuales no hubo claridad respecto a los procedimientos empleados por los chicos. **Intervención estudiante,** intervención de la profesora.

Estudiante (Leidy): Acá dice que después de dos horas tapaba 1800 botellas, entonces pues por hora son 900, ¿no? *Profesora: entonces en una hora 900, y, ¿en dos horas?* *Estudiante (Leidy): pues ahí está, cada hora son 900 [se ríe] sino que sumándolas todas da esto [señala en el instrumento escrito el valor de 6.300] la primera hora da esto (señala hoja de respuestas), en la segunda da esto (señala hoja de respuestas), no en dos horas, sino a la segunda.*

Figura 5. Intervención estudiante**,** intervención de la profesora.

Es evidente Leidy reconoce la relación de dependencia entre las magnitudes involucradas en la situación cuando afirma "**pues ahí está, cada hora son 900**", sin embargo, la estudiante establece a través del registro tabular relaciones de manera independiente, no acumulada, en la primera hora tapa 900 botellas; a la segunda hora otras 900, a la tercera otras 900 y así sucesivamente.

Con respecto al primer punto en términos generales, se puede decir que los estudiantes reconocen en el registro tabular una opción de representar la situación, a través del cual se evidencia que estos jóvenes logran reconocer y relacionar las variables involucradas, estableciendo en algunos casos relaciones improcedentes. Cabe resaltar que en algunos de estas producciones se evidencia que el dato referente a la hora de receso generó confusiones, ya que asumían que este tiempo estaba incluido en las ocho horas de trabajo.

2). Con respecto al **segundo ítem,** con el cual se pretendía indagar la posibilidad que tiene los estudiantes de articular la representación inicial (tabular) con la representación gráfica, y determinar si los estudiantes reconocen en el registro gráfico una opción de representar la situación a través de la función lineal, se puede afirmar que los estudiantes a nivel general, cuentan con una escasa comprensión de este registro y encuentran dificultades para la utilización del mismo, por ejemplo, en algunas producciones se evidencia una dificultad generada por el uso de distintas unidades de tiempo, en otro, desaciertos en el primer punto generaron dificultades para representar la situación a través del registro gráfico. La siguiente clasificación muestra el nivel en el que se pueden agrupar las elaboraciones de los estudiantes.

No responde (29 %). Este grupo reúne a los estudiantes que no propusieron ningún tipo de registro como estrategia de solución o que propusieron un registro que sugiere un plano cartesiano en donde no se evidencia relación alguna entre las magnitudes que intervienen en la situación.

Gráfico sin variación (5 %). Este grupo reúne las producciones de los estudiantes que proponen un gráfico cartesiano en donde establecen relaciones entre las magnitudes en donde se excluye la variación, ya que el cambio en una de ellas no genera cambios en la otra. No logran establecer una relación de variación entre las magnitudes registradas.

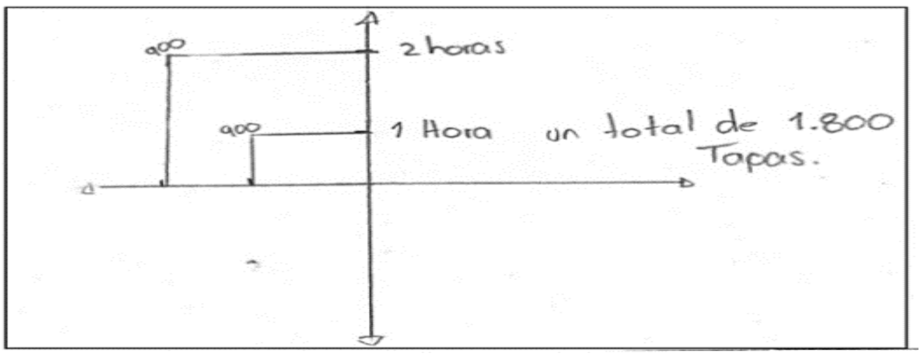


Figura 6. Ejemplo de Gráfico sin Variación

Gráfico para datos (8 %). Corresponde a las producciones de los estudiantes que utilizan el registro gráfico para ubicar datos correspondientes a la información suministrada en el problema, desconociendo completamente la relación de dependencia entre las magnitudes. En la Figura # se muestra el registro de un estudiante que intenta capturar y relacionar información suministrada en el instrumento indagación a través de gráficas cartesianas.

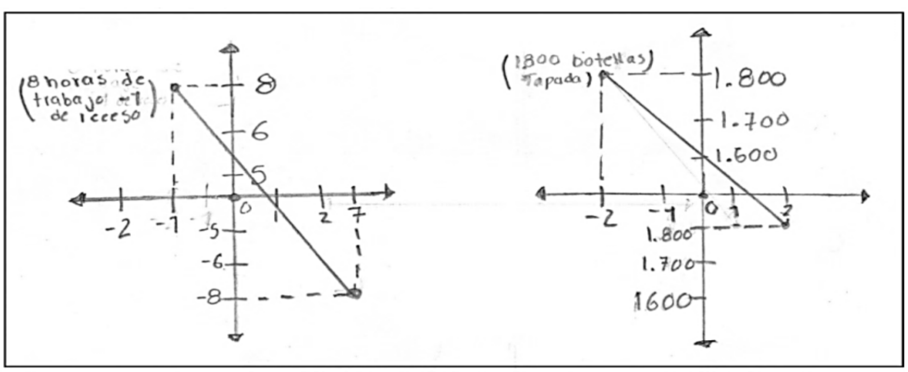


Figura 7. Ejemplo de Gráfico para datos

Gráfico punto a punto (58 %). En este grupo se ubican las propuestas de los estudiantes que se limitaron a transcribir los datos propuestos en la tabla al registro grafico cartesiano, algunos de los cuales emplearon como estrategia de solución la transcripción de la tabla punto por punto al registro grafico cartesiano, acción que le permite establecer una correspondencia entre los datos registrados en la tabla, pero que le impide visualizar realmente la relación de variación entre las dos cantidades de magnitud. Frente a esta categoría es importante resaltar que algunos estudiantes escogieron la representación de barras como la mejor manera de representar los datos obtenidos en el primer punto.

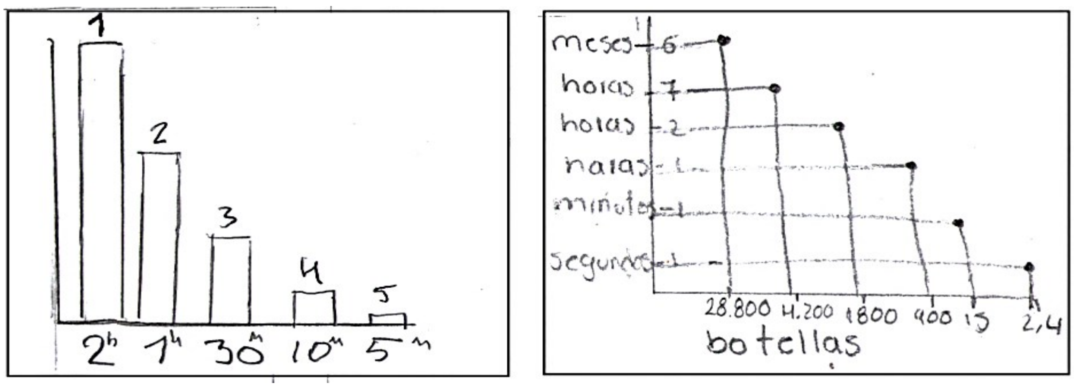


Figura 8. Ejemplo Gráfico punto a punto

3). En cuanto al **tercer punto** del instrumento de indagación, con el cual se desea determinar si los estudiantes consiguen explicar y generalizar la relación de dependencia entre las variables involucradas, puedo afirmar que la gran mayoría de estudiantes encontraron dificultad para constituir una expresión simbólica (algebraica) que les permita generalizar la relación funcional entre las variables, tan solo una estudiante consigue obtener una expresión funcional entre las variables involucradas. La siguiente clasificación muestra el nivel en el que se pueden agrupar las elaboraciones de los estudiantes.

No responden (25,6%). Corresponde al grupo de estudiantes que no contestaron la tercera pregunta.

Relaciones Generales (35,9%). Corresponde a la producción de los estudiantes que establecen expresiones en las que vinculan las variables sin establecer ningún tipo de relación funcional entre ellas, en algunos de estos casos se evidencian fórmulas en las que involucran información innecesaria, incluso se observan casos en donde plantean como alternativa de solución sistemas de ecuaciones 2X2 (temática que estaba siendo abordada en el momento de la implementación) que manipulan, haciendo coincidir su solución con los datos del problema.

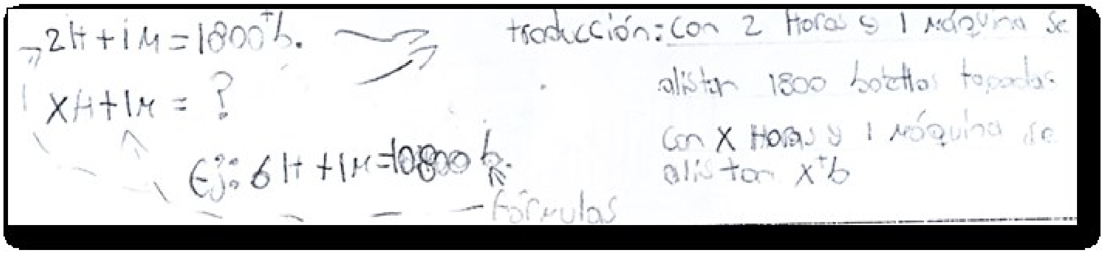


Figura 9. Ejemplos relaciones generales

Relaciones particulares (35,9%). En este grupo se ubican las propuestas de los estudiantes que a pesar de no haber conseguido generalizar la relación entre las variables, propusieron una relación de carácter funcional únicamente desde casos particulares. Un bajo porcentaje de los estudiantes ubicados en este grupo intentan explicar la relación entre las variables involucradas, explicación que se fundamentó básicamente en las operaciones que se debían desarrollar para determinar la cantidad de botellas tapadas para un determinado tiempo.

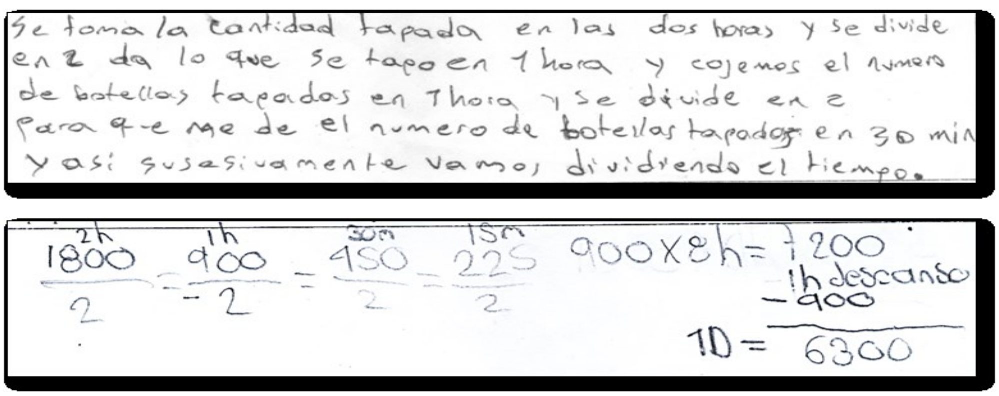


Figura 10. Ejemplos relaciones particulares

Relaciones funcionales (2,6%). Corresponde a la producción de una estudiante que reconoce y consigue expresar de manera general la relación funcional entre las variables. La expresión planteada es formulada en un lenguaje no algebraico e intenta involucrar las variables *x* (hora) y la variable *y* (botellas tapadas).

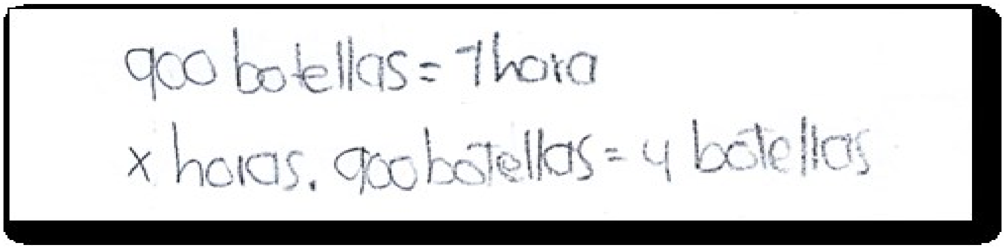


Figura 11. Ejemplo relaciones funcionales

Con respecto al trabajo en grupo, en términos generales se evidencian las siguientes propuestas de solución:

- En el trabajo realizado por algunos grupos muestra que no hubo un acuerdo entre sus integrantes para realizar una propuesta de solución conjunta, dado que la propuesta presentada por algún integrante del grupo es aceptada como válida sin mayor discusión y presentada como un trabajo desarrollado en grupo.
- Es de resalta que de forma individual algunos estudiantes no propusieron ningún tipo de solución frente al trabajo individual, sin embargo, frente al trabajo en grupo, proponen estrategias y posibles opciones de solución.
- Respecto a las propuestas de solución del segundo punto, la mayoría de los grupos optaron por los diagramas de barras como la mejor opción para representar los datos, a pesar que en algunos casos no fue considerada como una opción de respuesta frente al desarrollo del trabajo individual de ninguno de los integrantes del grupo.
- Al igual que en el trabajo individual, con respecto a la variable de tiempo, los estudiante involucran diferentes unidades de medida indistintamente para tabular y representa en el plano cartesiano.
- En el trabajo en grupo se observan básicamente las mismas dificultades registradas en el trabajo a nivel individual.

A manera de síntesis y en términos generales, el grupo de estudiantes con el cual se realizó el análisis preliminar, no reconoce en el concepto de función lineal (tema que desarrollaron previamente con otro docente de la misma institución), una herramienta que le permita matematizar la situación presentada. Adicionalmente los resultados permiten confirmar la dificultad que encuentran los estudiantes para expresar la relación entre las variables mediante los sistemas de representación gráfico y simbólico, lo cual no permite evidenciar una actividad de conversión entre los registros de representación tabular, gráfico y simbólico.

2. Marco referencial

Este capítulo está dedicado a describir los elementos que conforman la fundamentación teórica de esta investigación, en la cual se asumen como referente teórico y metodológico el enfoque de la *Educación Matemática Realista* de Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower (2016) se presenta un análisis fenomenológico del concepto función; adicionalmente se explicitan elementos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica Duval (2006) que aportan elementos importantes en los procesos de constitución de los modelos matemáticos y la articulación entre ellos.

Los inicios de la Educación Matemática Realista se remontan a la década de los 70, periodo en el cual se hace evidente la necesidad de transformar la situación en la cual se encontraba la enseñanza de las matemáticas, orientada hacia la *matemática moderna*, enfoque mecanicista que provocó profundos inconvenientes que superaban las "supuestas ventajas que se esperaban conseguir como el rigor en la fundamentación, la comprensión en las estructuras matemáticas, la modernidad y el acercamiento a la matemática contemporánea" (MEN,1998, p.15)

Dadas las circunstancias en las que se encontraba la enseñanza de la matematicas, Holanda, uno de los países que en la década de los setenta observó con prevención al movimiento de la *matemática moderna*, propone un movimiento de reforma que dio origen, en 1968, al proyecto Wiskobas. Para la consolidación de este proyecto fueron trascendentales las ideas de Freudenthal acerca de las matematicas, su profundo interés por su enseñanza y aprendizaje, a través de experiencias de aula recogidas. Dicho proyecto se impulso entre 1970 y 1977, y consistió en impedir que el movimento de la *Matematica Moderna* afectara la educación matemática holandesa, mediante la constitición de un proyecto curricular innovador para la enseñanza elemental de las matematicas, la formación de docentes en ejercicio como motores de cambio, desarrollos educativos en consulta con el educador, diseño y discusiones de ejemplos inspiradores, entre otros.

Freudenthal (1.980, pp 35-38, como se citó en Bressan, Zolkower & Gallego, 2004) reconoce que el término educación

> Comprende tanto el logro de los objetivos de la instrucción formal como el desarrollo de actitudes de toda clase: morales, sociales, emocionales, religiosas y cognitivas. Todo esto hará del ser humano un hombre culto, formado, que es uno de los objetivos más relevantes de la educación matemática (p. 4).

2.1 Ideas básicas sobre la Educación Matemática Realista (EMR)

La Educación Matemática Realista es una teoría global que se precisa en un conjunto de principios y teorías locales de enseñanza de temas de la matemática, según Bressan et al. (2016) más que una teoría clara y precisa de educación matemática, consiste en ideas básicas entre *el cómo* y *el qué* de la enseñanza matemática; el análisis y la reflexión continua de estas ideas, han dado lugar a lo que ahora conocemos por EMR, es una teoría que aún hoy se encuentra en construcción, en la que se reconoce que la educación matemática deben guardar relación con la realidad, mantenerse cercanas a los niños y ser relevantes para la sociedad; el uso de contextos realistas se convirtió en una de las características determinantes de este enfoque de la educación matemática, es decir, son los estudiantes quienes a partir del dialogo, la interacción entre pares, la negociación y mediación del profesor, los encargados de construir su propio conocimiento, utilizando situaciones reales como punto de partida para aprender matemáticas.

Este enfoque se precisa en unos principios centrales, en los cuales se reconoce que la matemática debe ser pensada como una actividad humana, en donde se conciba la idea de una matemática para todos, que pueden ser mejor aprendida haciéndola; a través de una trayectoria de aprendizaje que le permita al estudiante reinventar las matemáticas formales, en el que se reconocen diferentes niveles en el desarrollo de la comprensión matemática en un ambiente de heterogeneidad cognitiva, apoyándose en el uso de contextos o situaciones cercanas a la realidad que promuevan procesos de matematización progresiva. En la EMR el aprendizaje es una actividad social. Desde este enfoque es indispensable generar espacios de reflexión e interacción con los pares y el docente que les permitan alcanzar niveles de comprensión más avanzados.

La perspectiva de la EMR favorece la capacidad de los estudiantes para analizar y organizar los problemas presentados en el contexto mediante la producción y uso de modelos. Modelos que inicialmente están asociados al uso de conocimientos informales, pero que gradualmente adquieren un carácter más general. Es la actividad de organizar en sí misma la idea central en la concepción de Freudenthal “hacer más matemáticamente”, lo que se reconoce dentro de la EMR como *matematización*. “Matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos… incluida la matemática misma” (Freudenthal, 1983, p. 44). Desde este enfoque se considera que las acciones iniciales en el sistema escolar deben estar orientadas básicamente a la constitución de objetos mentales y solo en segundo lugar la adquisición de conceptos.

Freudenthal (1991 como se citó en Bressan et al., 2016) fundamenta el enfoque de la educación matemática realista a la que denomina "herramientas conceptuales para una teoría de la educación matemática" (p. 3)

2.1.1 Contextos y situaciones.

Desde el enfoque de la EMR, y de acuerdo con las ideas de Freudenthal (1973, 1991) la matemática surge históricamente como una herramienta que permite organizar la realidad, (esta expresión no sólo se refiere a la conexión con el mundo real, sino que también a las situaciones que son representable, razonable, realizables o imaginables para los estudiantes) razón por la cual su enseñanza y aprendizaje, también debe originarse en la organización de este tipo de situaciones. Los **contextos y situaciones problemáticas realistas** juegan un papel esencial en la actividad matematizadora de los estudiantes, para quienes un Contexto es un evento, una proposición o situación derivada de la realidad, la cual les es significativa o la pueden imaginar y conduce a usar métodos matemáticos desde su propia experiencia, dado que se constituyen en puntos de partida en el proceso de enseñanza y de aprendizaje para producir matemática, tornando accesible el contenido matemático a los estudiantes, quienes de acuerdo a sus posibilidades, el uso del sentido común, la movilización de conocimientos informales y la reflexión colectiva, pasan por diferentes niveles de comprensión en los que tiene lugar la matematización; comenzando por idear soluciones informales conectadas al contexto, hasta alcanzar cierto nivel matemático de formalización; siempre bajo la orientación del docente. Es un enfoque que le apuesta a que los estudiantes, guiados por el docente y en un constante trabajo en equipo con sus compañeros, reinventen modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas, a partir de contextos y situaciones problemáticas realistas susceptibles de ser matematizados, "se trata que los alumnos, quienes al principio no poseen herramientas matemáticas suficientes, las ***reinventen*** a partir de abordar problemas presentados en contextos y situaciones realistas" (Bressan et al., 2016, p. 3).

Los contextos y situaciones problemáticas realista desde el enfoque de la EMR deben ser significativos para el estudiante, sin embargo, como lo señalan Bressan et al. (2016) es importante tener en cuenta el carácter relativo del concepto de contexto realista, dado que depende de la experiencia previa de los estudiantes y de la capacidad de cada uno de ellos para imaginarlos y visualizarlos.

Desde el enfoque de la EMR los estudiantes tienen un papel dinámico en el proceso de aprendizaje, contrario al enfoque tradicionalista, determinado por el aprendizaje de unas matemáticas acabadas cuyo pensamiento era transmitido a los estudiantes, quienes a su vez desempeñaban un rol pasivo frete a su aprendizaje.

2.1.2 Proceso de matematización.

Se reconoce a la matemática como una actividad humana a la que todas las personas pueden tener acceso, y que puede ser mejor aprendida haciéndola, pasando de un conocimiento informal, al pre-formal y de allí al formal, este proceso se conoce como **Matematización progresiva**, en el cual se considera que los estudiantes "pasan por distintos niveles de comprensión, caracterizados por distintos tipos de actividades mentales y lingüísticas. La EMR reconoce dos formas de matematización, *la horizontal* y *la vertical* planteadas por Treffers (1987) y retomadas por Freudenthal (Bressan et al., 2004, p.7)

2.1.2.1 *Matematización horizontal.*

Este proceso consiste básicamente en la organización de situaciones reales mediante herramientas matemáticas, apoyados en la intuición, el sentido común, el uso de estrategias informales ligadas directamente al contexto, con el fin de alcanzar diferentes niveles de abstracción. Por ejemplo, "Identificar o descubrir la matemática específica que es relevante dentro de un contexto general, esquematizar, formular y visualizar un problema de diversas maneras" (Santamaría, 2006, p. 18), así como reconocer semejanzas con otro tipo de situaciones.

2.1.2.2 *Matematización Vertical.*

Proceso que permite la reorganización dentro de la matemática misma, lo cual conlleva a estrategias de reflexión, procesos de abstracción, generalización, prueba, simbolización y esquematización, con lo cual se espera alcanzar mayores niveles de formalización matemática (Zolkower, Bressan & Gallego, 2006).

Para Freudenthal (1991, como se citó en Bressan & Gallego, 2011):

> La matematización horizontal implica ir del mundo real al mundo de los símbolos, mientras que la matematización vertical significa moverse en el mundo de los símbolos" aclarando el carácter relativo entre estas dos formas de matematización, en donde el límite no siempre está bien definido, ya que este depende de la experiencia previa del estudiante (p. 8).

En este proceso de matematización progresiva los estudiantes pueden transitar por los distintos niveles de comprensión: situacional, referencial, de generalización y de formalización, los cuales representan el camino desde el conocimiento informal al formal, ligados al uso de estrategia, modelos y lenguajes de diferente categoría cognitiva, que no se constituye en una jerarquía estrictamente ordenada (Bressan et al., 2004):

> El ***nivel situacional*** está asociado al uso de estrategias ligadas totalmente al contexto de la situación misma y la puesta en marcha de las estrategias personales de los estudiantes, su sentido común y su experiencia para identificar y descubrir la matemática existente en el contexto.
>
> ***El nivel referencial*** es donde aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, y las descripciones, conceptos y procedimientos personales que esquematizan el problema. De allí que los modelos se consideren como *modelos de* en tanto están referidos a las situaciones particulares que les dieron origen.
>
> ***El nivel general*** se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto**.** En este nivel, por la reflexión sobre los conceptos, procedimientos, estrategias y modelos utilizados en el nivel anterior surgen aspectos generalizables de los mismos y los estudiantes pueden concluir que son utilizables en conjuntos de problemas, dando lugar a los *modelos para* la resolución de los mismos.
>
> ***El nivel formal*** está relacionado con la comprensión; utilización de procedimientos y notaciones convencionales que hacen parte de la matemática vinculada al contexto trabajado (p. 7).

Una síntesis de estos niveles de matematización y de sus relaciones se presenta en el siguiente cuadro:

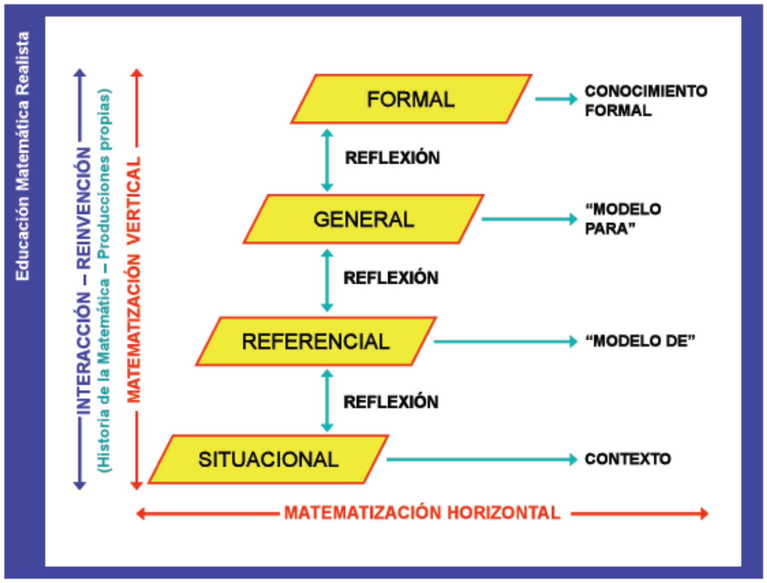


Figura 12. Niveles de Comprensión. Fuente. (Bressan & Gallego, 2011, p. 7).

Desde la perspectiva de la EMR, Bressan et al. (2016) se reconoce que el camino de enseñanza-aprendizaje es transitado gracias a la aparición de modelos emergentes, los cuales no corresponden a productos matemáticos preexistentes orientados a un fin determinado sino que surgen de la propia actividad matemática de los estudiantes en torno a situaciones realistas y comparten con Freudenthal (1983) que " El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal" (p. 34).

Los modelos son importantes recursos que permiten cerrar la brecha entre las matematizaciones contextualizadas de los estudiantes (informales) y las matematizaciones formales de la disciplina, pasado así de "**modelos de**" relacionado directamente con los contextos, a "**modelos para**", que permite organizar matemáticamente otro tipo de situaciones, posibilitando de esta manera un razonamiento matemático más formal.

2.1.3 Aprendizaje.

La Educación Matemática Realista admite que el aprendizaje de la matemática es una actividad social, en donde la reflexión colectiva permite alcanzar niveles de comprensión más avanzados, en este sentido, es importante crear las condiciones necesarias que posibiliten en los estudiantes procesos de reinvención, mediante la interacción con sus pares (horizontal) y con el docente (vertical), siendo este último, el encargado de organizar la interacción en las aulas de clase, siempre orientada a incrementar oportunidades para la producción, intercambio y reinvención de nuevos ideas por parte de los estudiantes, configurándose en un mapa de ruta que indica las posibles trayectorias que se deben seguir.

Es importante aclarar que desde el enfoque de la EMR los modelos distan de ser una traducción de situaciones reales a expresiones matemáticas que efectivamente pueden funcionar como modelos, por el contrario, son pensados como objetos de trabajo y reflexión en sí mismos.

En resumen, existen algunos elementos claves del enfoque teórico de la EMR fundamentales en el ajuste, rediseño y análisis del conjunto de tareas, como lo son el uso de contextos y situaciones de la vida real como generadores de una actividad matematizadora que ofrezca al estudiante la oportunidad de proponer sus propias estrategias de solución, las cuales gradualmente evolucionan a través de una serie de procesos de matematización horizontal y vertical a métodos formales, dando lugar a la reinvención de la matemática implícita en contexto planteado. De igual manera, este conjunto de tareas se fundamentó en un análisis fenomenológico del concepto matemático Función.

Teniendo en cuenta lo anterior, el conjunto de tareas debe cumplir con las siguientes características:

- Partir de contextos y situaciones de la vida real, como generadores de la actividad matematizadora.
- Un espacio que propicie una matemática para todos. “Se trata de posibilitar el acceso a estos conocimientos, destrezas y disposiciones mediante situaciones problemáticas que generen la necesidad de utilizar herramientas matemáticas para su organización y solución” (Bressan et al., 2004, p. 3).
- Que contenga Interrogantes cuya solución no sea inmediata, y que brinde al estudiante la oportunidad de leer, analizar, confrontar describir, interpretar diferentes tipos de representación de este concepto.
- Que brinde al estudiante “la oportunidad *guiada* por el maestro de reinventar la matemática (no crean, ni descubren, sino reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas con un proceso similar al que usan los matemáticos al inventarlas)” (Bressan et al., 2004, p. 6).
- Posibilita en los estudiantes una actitud crítica y flexible de las matemáticas en problemas que deberán afrontar en su cotidianidad.

- Permita manifestar las diferentes formas de pensar de los estudiantes, y reconozca que el desarrollo de la comprensión de los estudiantes, pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado reinvención guiada, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

2.2 Análisis fenomenológico

Siguiendo con las ideas de Freudenthal (1983) el *análisis fenomenológico* de un concepto o de una estructura matemática radica en "describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos" Puig (1997, p.2) el cual, se espera, sirva de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas.

Desde esta perspectiva, Puig (1997) reconoce que los conceptos matemáticos son creados como medios de organización de fenómenos del mundo; un mundo real, físico, cotidiano, no un mundo ideal del cual un reflejo estudiamos, ni cuya existencia es previa a la actividad matemática. Para Freudenthal (1983) esta actividad matemática va más allá de una simple correspondencia entre los fenómenos del mundo que solicitan ser organizados y la creación de medios de organización en las matemáticas. Para Freudenthal (1983) estos objetos matemáticos (*objetos mentales*) terminan incorporándose al mundo real de nuestra experiencia, en el que se reintegran como fenómenos a una nueva relación fenómenos/medios de organización, constituyéndose de esta manera objetos mentales cada vez más elaborados y abstractos, que a su vez, se convierten en nuevos conceptos matemáticos (Puig, 1997). Una progresión escalonada de pares fenómenos/medio de organización.

En relación con lo anterior, Puig señala que un análisis fenomenológico requiere considerar la totalidad de fenómenos para los que es un medio de organización, teniendo en cuenta, no solo el desarrollo actual del concepto o estructura matemática, sino también los fenómenos en cuya organización fue creado y a que fenómenos se extendió posteriormente.

2.2.1 Evolución histórica del concepto de función.

Las nociones asociadas al concepto de función se pueden rastrear desde la edad antigua; la civilización babilónica mostró interés en cálculos astronómicos, los cuales registraban en tablas dispuestas en dos columnas, de manera similar a las que se construyen actualmente. Los matemáticos babilónicos avanzaron en lo que actualmente se denomina *algebra retórica* (Primera fase en el desarrollo histórico del algebra, debido a que los problemas y sus soluciones se describían mediante lenguaje natural, sin incluir ninguna clase de símbolo, ni siquiera de las operaciones) , por cuanto "los problemas se enunciaban y solucionaban sin utilizar de manera sistemática notaciones algebraicas como las actuales" MEN (2004, p.1) sino mediante el uso del lenguaje natural, sin incluir ninguna clase de símbolo (ni para expresiones variables ni para las operaciones), expresando en casos particulares las relaciones entre las cantidades variables.

Las ideas de *cambio* y *cantidad variable*, no eran ajenas al pensamiento griego quienes desde los tiempos de Heráclito y Zenón habían considerado problemas asociados al movimiento. Ruiz-Higueras (1993) sostiene que a pesar de que en el pensamiento griego existía una idea preliminar de función, contenida en las nociones de cambio y relaciones entre magnitudes variables, consideraban estas nociones como algo externo a la matemática, la cual era considerada una ciencia estrictamente teórica, en las que se estudiaban objetos matemáticos fijos y relaciones estáticas. De modo que, las aproximaciones cualitativas y cuantitativas de fenómenos asociados al cambio, se hallaban totalmente disociadas, razón por la cual no fue posible consolidar una formulación explicita de nociones como variable, dependencia o función. (MEN, 2004, p.3)

En la Edad Media se hace evidente la preocupación por el estudio de cosas sujetas al cambio, y en particular al movimiento. Ruiz-Higueras (1994) afirma que a partir del siglo XIII, las matemáticas ocupan un lugar cada vez más importante, filósofos como Grosseteste y Bacon, la consideraban el principal instrumento para estudiar los fenómenos naturales, y entre sus mayores aportes resalta el estudio cuantitativo del movimiento local no uniforme, partiendo de las doctrinas Aristotélicas.

En los estudios de fenómenos asociados al cambio, tales como, el calor, la luz, la densidad, la velocidad, se analizan cualidades y formas, según la terminología de Aristóteles, en los cuales hay un interés por conocer no sólo *por qué sucede* el cambio, sino fundamentalmente *cómo sucede*. Las cualidades o formas pueden poseer varios grados de intensidad, que cambian continuamente entre ciertos límites establecidos. Desde los planteamientos del MEN (2004) es en el transcurso de estos estudios y al margen del valor concreto de cada uno de ellos, donde aparecen algunos conceptos fundamentales como cantidad variable entendida como una grado de cualidad, velocidad instantánea o puntual, aceleración, todos ellos íntimamente ligados al concepto de función

Como lo afirma Ruiz-Higueras (1993) un representante que se destaca de la escuela Francesa, es Nicolás Oresme (1323-1382), quien continuando con el estudio de fenómenos asociados al cambio, genera un nuevo camino al proponer el método grafico para representar las *latitudes de las formas*, mediante una aproximación geométrica, diferente a los estudios de fenómenos cinemático-aritméticos desarrollados hasta el momento. Este método de aproximación geométrica consiste en representar por medio de una figura las intensidades de una cualidad de magnitud continua que depende de otra magnitud análoga, intensidades representadas por medio de segmentos, ya que consideraba, que todo lo medible puede imaginarse como una cantidad continua. La autora reconoce que en su obra Oresme distingue tres tipos diferentes de figuras o configuraciones, uniformemente uniforme (el cual representa por medios de un rectángulo), uniformemente deforme (representado por un triángulo o un trapecio, según la intensidad inicial de la cualidad) y deformemente deforme (el cual representa por medio de un lado curvo). De manera que, por ejemplo, puede asociarse una figura uniformemente uniforme a una velocidad constante, Oresme traza una gráfica velocidad-tiempo, en las que los punto de una recta horizontal representan los sucesivos instantes de tiempo (longitud), y para cada instante traza un segmento perpendicular a la recta horizontal (al que llamó latitud), cuya longitud representa la velocidad en aquel instante. Con razonamientos geométricos Oresme intentó demostrar que, para un movimiento uniformemente uniforme, los extremos superiores de estos segmentos de velocidades, cubren el área correspondiente a un rectángulo. Las siguientes figuras ilustran las representaciones utilizadas por Oresme.

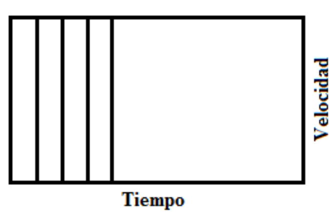


Figura 13. Representación gráfica de una variación uniformemente uniforme

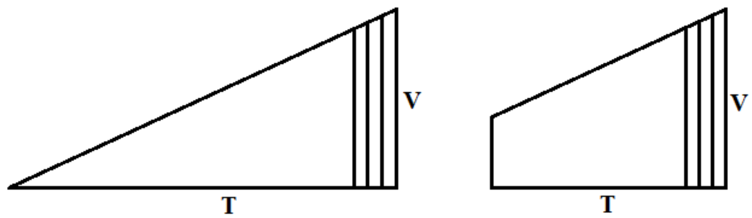


Figura 14. Representación gráfica de una variación uniformemente deforme

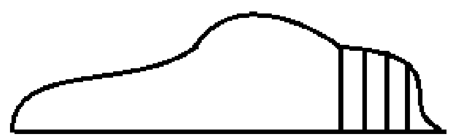


Figura 15. Representación gráfica de una variación deformemente deforme

En la Edad Moderna se produjeron sucesos esenciales que posibilitaron el desarrollo del concepto función, "es en este periodo donde es posible observar con mayor claridad el papel que cumplió la variación y el cambio en la génesis y desarrollo conceptual del concepto de función" (Posada y Villa, 2006, p.53). Los adelantos respecto a la simbolización, permitieron desarrollar la formulación y expresión de la "variable" en una función o "incógnita" en una ecuación.

Un gran representante de esta época fue Galileo Galilei (1564-1642), quien oriento todos sus esfuerzos en la búsqueda de resultados y relaciones provenientes de la experimentación y de la medida, constituyendo relaciones de causa y efecto, que le permitieron, establecer auténticas relaciones funcionales. Sastre-Vázquez, Rey y Boubée (2008) señalan que Galileo impulsó el sentido numérico en las representaciones graficas que le permitieron establecer algunas leyes del movimiento, en las que incorporó el lenguaje de las proporciones, dando un sentido de variación directa o indirectamente proporcional. Esta forma de relacionar funcionalmente las causas y los efectos, desarrollada por Galileo, fue un elemento fundamental en el desarrollo de la concepción de variable dependiente.

Descartes público su trabajo "*La géométrie*" hacia el año de 1637, libro que marca el nacimiento y desarrollo de la geometría analítica MEN (2004), y que, con los aportes de Fermat, permitió el uso de ecuaciones para interpretar curvas y superficies, "este fue el primer puente entre dos áreas diferentes de la matemática" (Diudonne, 12989 como se citó en Ruiz-Higueras, 1993, p 165). En particular, Descartes fue el primero en demostrar que una ecuación en términos de *x* e *y,* es una forma de mostrar una dependencia entre dos cantidades variables.

La geometría analítica fue determinante en el desarrollo del cálculo diferencial e integral, constituyéndose en una auténtica revolución para el pensamiento matemático. En términos generales, Sastre-Vázquez et al. (2008) señalan que el surgimiento del cálculo, se precisa en la creación de una de las herramientas matemáticas más potentes y" el nacimiento de un nuevo paradigma científico: la naturaleza puede ser explicada a partir de ecuaciones diferenciales, de ahí la consideración continua y dinámica de las relaciones funcionales, en contra de la consideración discreta y estática imperante hasta el momento. Fue Leibniz (1646-1716) el primer matemático en usar la palabra *función*, la cual, inicialmente utilizó para referirse a cualquier cantidad que varía de un punto a otro, en una curva.

En los siglos XVIII y XIX gracias a los trabajos de Bernoulli, Euler, Lagrange, Fourier y Dirichlet se consolida el sistema de representación simbólico del álgebra actual y la ampliación del concepto de función como una de las representaciones de procesos de variación y cambio MEN (2004, p. X), desarrollo que se dio gracias a los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet, entre otros. El desarrollo del concepto de función se le atribuye a Euler, en el siglo XVIII, quien en su obra I*ntroductio in analysis infinitorum* publicada en 1748, presentó un estudio detallado sobre el concepto de función, al definir las nociones iniciales se refiere a los términos constante, cantidad definida que toma siempre un mismo valor determinado, y variable, cantidad indeterminada, o universal. Euler propone una definición del concepto función, siguiendo la definición dada por su maestro Bernoulli: "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y números o cantidades constantes" (MEN, 2004, p. X)

La controversia iniciada entre D'Alambert y Euler sobre el problema de la cuerda vibrante, generó una evolución en el concepto de Función, cambiando su significado a partir de este momento, encaminando a Euler a considerar y explicitar por primera vez la noción general de correspondencia entre pares de elementos, la nueva definición aparece publicada en su obra *Institutiones calculi differentialis* (1755), "Si *x* es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de *x* de cualquier manera o que está determinada por aquél se llama función de dicha variable" MEN (2004, p.8) no obstante, es Dirichlet quien en 1837 propone una definición general, la cual adquiere un significado independiente del concepto de expresión analítica.

> Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x (MEN, 2004, p.9).

Con la introducción de la teoría de conjuntos, la definición de función alcanza un nivel de abstracción y generalización más avanzado:

> Dados dos conjuntos arbitrarios A y B una función (o aplicación) de A en B es una ley que a cada elemento x de A hace corresponder un solo elemento y de B; o si se prefiere, una función de A en B es un subconjunto F del producto cartesiano A x B tal que si (x, y) y (x, z) pertenecen a F entonces y=z. ((MEN, 2004, p. 9).

Con esta última definición, el concepto de función adquiere características de un objeto matemático estático, que pierde muchos de los atributos presentes en su comienzo y durante su evolución, como lo son la idea de variación y cambio.

2.2.2 Recursos fenomenológicos del objeto función.

Freudenthal (1983) destaca la importancia de trabajar dos objetos mentales fundamentales que anteceden la constitución del objeto matemático función, la idea de *variable* y de *dependencia funcional.* Este autor establece dos concepciones diferentes relacionadas al término variable: una, como nombre polivalente; otra, como objeto variable. Frente a la primera concepción se refiere a un conjunto de objetos o "medios para formular enunciados generales, esto es enunciados que se cumplen para todos los objetos que nombran" Freudenthal (1983, p. 491) o bien, "un símbolo que puede ser reemplazado por cualquier elemento de un conjunto determinado" (Wilhelmi, Godino, & Lasa, 2014, p.575). La segunda concepción se refiere a algo que efectivamente varía "Originalmente "variable" había significado algo que realmente varía, algo en lo físico, social, mental, o del propio mundo de las matemáticas, que se percibe o imagina que está variando" (Freudenthal, 1983, p. 491).

Para Freudenthal (1983 como se citó en Puig, 1997) es fundamental el sentido original cinemático de la noción de variable especialmente en el estudio de las funciones:

> El origen fenomenológico de la noción de función surge en el momento que se enuncia, se postula, se produce o reproduce una dependencia entre variables, presentes en el mundo físico, social o mental, así como entre variables matemáticas que, a su vez, está relacionada con variables de otros mundos (p. 36).

En tal sentido, se reconoce el estatus de la *dependencia funcional* como un objeto mental que debe ser constituido, como un recurso fenomenológico del objeto función.

2.3 Procesos de representación

En relación con los procesos de representación, Duval (2004) plantea la importancia de reconocer un objeto matemático en diferentes sistemas o registros de representación semiótica, así como la habilidad para transformar una representación en otra, por lo cual centra su interés en reconocer el tipo de funcionamiento cognitivo que requiere la actividad y el pensamiento matemático, en él se hace una invitación para analizar los procesos cognitivos que subyacen en el aprendizaje de las matemáticas. Las variables cognitivas relativas a las diversas maneras de representación deben ser tomadas en consideración, para Duval (2004) lo más importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática es que lo estudiantes sean capaces de relacionar diversas maneras de representar un mismo objeto matemático. Es por eso que, a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, es necesario ofrecer a los alumnos diferentes instancias en las cuales deban moverse de un registro semiótico a otro para el mismo objeto matemático.

En cuanto a los sistemas de representación, Duval (2006) presenta tres ideas principales:

- Cada sistema semiótico provee una capacidad específica de transformación.
- Hay dos clases de transformaciones de cualquier representación semiótica: *la conversión* y el *tratamiento*, las cuales deben diferenciarse por completo en toda actividad matemática, acción que se constituye en un primer requisito metodológico para analizar los problemas de comprensión de los estudiantes frente a la matemática.
- La conversión y el tratamiento deben ser analizados de manera separada en la producción de los estudiantes cuando se enfrenten con el problema, esta separación metodológica y teórica va en contravía de la práctica actual de considerar estos dos tipos de transformaciones como una unidad para la resolución de problemas (pp. 166-167).

Este autor considera que un recurso metodológico para analizar los problemas de aprendizaje y comprensión matemática de los estudiantes es distinguir por completo las dos clases de transformaciones de representaciones semióticas: la conversión y el tratamiento; reconociendo que la conversión es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento, y es considerado el primer umbral de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. A manera de ejemplo, el autor plantea una pregunta para el caso específico de la conversión del representación gráfica a la notación algebraica de la función lineal, ¿Cómo ver las características semánticas de una ecuación a través de las características visuales cualitativas de una gráfica dibujada y viceversa?, cuestionamiento frente al cual propone una red de discriminación cognitiva que permita la conversión entre gráficas y ecuaciones, fundamentado en la ley básica de funcionamiento semiótico "nada puede funcionar como una representación fuera del sistema semiótico en el cual su significado toma valor en oposición a otra representación dentro del sistema"(Duval, 2006, p.151).

3. Aspectos metodológicos de la investigación

En este capítulo se presentan los elementos metodológicos que se tomaron en cuenta durante el desarrollo de la investigación, para empezar se describe la metodología de este estudio que correspondió a una de enfoque cualitativo, indicando que el método utilizado corresponde al de la investigación acción, en el cual se destacan cada una de las etapas que se desarrollaron con el fin de alcanzar los objetivos propuestos. Además se presenta una caracterización de la población, así como la justificación del conjunto de tareas. Igualmente se describe el proceso de recolección de la información, finalmente se describe el proceso de la constitución de los datos y análisis de los mismos.

Esta investigación se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa, que plantea una intervención en el aula con el propósito de transformar una situación asociada con algunas dificultades que encuentran los estudiantes de noveno grado para lograr una comprensión de los objetos matemáticos función lineal y función afín, orientada a mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

La investigación cualitativa permite estudiar una realidad dinámica y posibilita la comprensión de manifestaciones y comportamientos desde el propio marco de referencia de quien actúa (Pérez, 1994). Frente a esta situación, se reconoce la necesidad de generar una acción disciplinada orientada a transformar y mejorar esta práctica educativa desde el método de la investigación-acción, considerado como un "proceso progresivo de cambios a partir de diagnosticar situaciones problemáticas, priorizar estas necesidades pedagógicas, imaginar su solución, planificar estrategias y poner en marcha acciones de mejora" (Elliott, 1983, como se citó en Hopkins, 1989).

El proceso de investigación-acción se desarrolló en ciclos de acción reflexiva, asumiendo los siguientes momentos: planificación, acción, observación y reflexión, desde una mirada retrospectiva. A continuación se describen de manera general las actividades desarrolladas en cada uno de estos momentos, el cual fue enriquecido por los principios que orientan el enfoque de la EMR.

Figura 16. Etapas de la investigación

3.1 Aspectos metodológicos específicos

3.1.1 Población.

El estudio se desarrolló con un grupo de 40 estudiantes de noveno grado, de una institución educativa del sector oficial, con jornada escolar única (de 6:30am a 2:20pm), ubicada en la cuidad de Bogotá, entre los meses de febrero y abril de 2016 en nueve sesiones de clase, cada una de aproximadamente 100 minutos.

Las sesiones se desarrollaron los días miércoles y viernes en el horario habitual de clase. En términos generales, se reconoce la disposición de los estudiantes para abordar el trabajo planteado. Inicialmente se presentaron algunas dificultades relacionadas con la metodología de clase prevista para el desarrollo de estas tareas, ya que para su implementación se partió del hecho que el trabajo en matemáticas, en tanto actividad humana, requiere de la interacción (trabajo en pequeños grupos) que posibilite procesos de reinvención a partir de la reelaboración de estrategias de trabajo, de objetos mentales que permitan organizar fenómenos o proponer modelos de solución ante situaciones-problema que demanden ser organizadas; en otras palabras, que la matemática puede ser aprendida desde la práctica misma, usándola para reelaborar y organizar ideas, e incluso reinventarla, contrario a las dinámicas con las cuales estaban habituados, en donde el profesor explica en el tablero la temática a desarrollar, como un producto acabado y el estudiante se limita a repetir procedimientos, los cuales en muchos casos, carecían de sentido para ellos.

El grupo con el cual se aplicó el estudio, como es usual, está caracterizado por la presencia de alumnos con diferentes habilidades e intereses en el área de matemáticas, cuyas edades oscilan entre 14 y 16 años, entre los cuales dos se encuentran repitiendo noveno grado.

3.2.2 Diseño de instrumentos.

Para el caso específico de esta investigación se desarrolló una intervención de aula, orientada a fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto función lineal y afín, con estudiantes de noveno grado de educación Básica Secundaria, a partir de la implementación de un conjunto de tareas que fueron ajustándose a las necesidades emergentes, en las cuales se consideraron situaciones cotidianas, susceptibles de ser organizadas matemáticamente a través de la función lineal y afín, en donde los objetos mentales variable y dependencia se constituyeron en elementos fundamentales que posteriormente posibilitan la construcción de dichos conceptos. Considerando que el trabajo realizado con el conjunto de tareas se asumió como una adaptación curricular de una de las temáticas propias del área de matemáticas en grado noveno, el cual se establece en los estándares curriculares y en la malla curricular de la institución en donde actualmente laboro, fue propuesto a la totalidad de los estudiantes de grado noveno (35 estudiantes).

En relación a la fundamentación del diseño de instrumentos, en primer lugar, se realizó un análisis fenomenológico del concepto matemático función; en segundo lugar, se consideraron algunas herramientas teóricas y metodológicas, relacionadas con el enfoque de la EMR, lo que permitió establecer el diseño del conjunto de tareas. Este análisis y elementos relacionados con el enfoque, han sido abordados y desarrollados en capítulos anteriores.

Con base en esta indagación se decidió estructurar una secuencia de 6 tareas, las cuales se presentan en el siguiente capítulo y están organizadas de acuerdo con los propósitos que se presentan a continuación:

3.2.2.1 *Tarea 1: Secuencia figural.*

Se constituye en la primera aproximación de contextos realistas para los estudiantes, cuyo propósito fundamental fue propiciar a través de una secuencia figural el reconocimiento de regularidades y de relaciones entre las magnitudes que intervienen en la situación. A partir de esta tarea se espera posibilitar en los estudiantes: el reconocimiento de alguna regularidad;

determinar valores específicos asociados a la regularidad percibida; expresar la regularidad percibida (tanto oral, como por escrito), y finalmente, encontrar una expresión algebraica que le permita generalizar la regularidad encontrada.

3.2.2.2 ***Tarea 2: Baldosas.***

Se compone de un arreglo de baldosas blancas y grises, a través de la cual el estudiante tendrán la oportunidad analizar la secuencia, identificar diferentes relaciones de dependencia entre las variables involucradas y expresar la generalidad en diferentes registros de representación.

3.2.2.3 ***Tarea 3: Prendas y salarios.***

Corresponde a una situación tomada del trabajo "*Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*" desarrollado por Posada y Villa (2006a), situación que ajustó a las necesidades de la propuesta. Los autores sostienen que el propósito fundamental de la situación planteada en la tarea N°3 es "movilizar elementos básicos de relaciones funcionales entre magnitudes discretas, identificación del modelo funcional, su representación en tablas y los demás sistemas de representación, la identificación de la razón de cambio, y el control de variables en una situación problema" (p.138)

3.2.2.4 ***Tarea 4: Desprendibles de nómina.***

Corresponde a una adaptación de la actividad *eje* propuesta en el trabajo desarrollado por León y Vergel (1.997) la cual fue pensada como una situación susceptible de ser organizada a través de la función afín, cuya razón de cambio se presenta de forma explícita. Con la situación presentada en lenguaje natural, se espera que los estudiantes, en un primer momento, identifiquen la relación de cambio entre las tres variables involucradas, y en un segundo momento, determinar si consiguen reconocer la variable como constante y establecer así, una relación funcional entre ellas, expresada mediante el registro algebraico.

3.2.2.5 ***Tarea 5: Planes de voz.***

Situación presentada mediante el registro gráfico con la cual se pretendió posibilitar que los estudiantes reconozcan y establezcan una relación funcional entre las variables, y puedan expresarla a través del registro simbólico-algebraico. El objetivo de esta tarea fue enfrentar a los estudiantes a una situación problema en la que debían comparar gráficos cartesianos visualmente semejantes, que representan funciones muy diferentes, y elegir convenientemente la mejor opción, la cual deberán respaldar con argumentos apoyados en la identificación de las variables involucradas y la relación de dependencia entre ella, la cual deben generalizar a través de una fórmula o expresión algebraica. Parte del diseño de esta tarea se fundamentó en la ley básica de funcionamiento semiótico “nada puede funcionar como una representación fuera del sistema semiótico en el cual su significado toma valor en oposición a otra representación dentro del sistema” (Duval, 2006, p. 147).

3.2.2.6 *Tarea 6: Secuencias numéricas.*

A manera de cierre se consideró pertinente plantear una situación problema en un contexto netamente matemático con el fin de determinar si los estudiantes consiguen reconocer y establecer una relación de dependencia a partir de una secuencia numérica, esta actividad a diferencia de las otras se desarrolló de manera individual, con el fin de poder evaluar el alcance la propuesta.

3.3 Recolección de información

El proceso de recolección de la información estuvo precedido por la implementación del conjunto de tareas, información que se encuentra registrada en las producciones escritas de los estudiantes, las grabaciones de audio realizadas durante la implementación (trabajo por grupos y socialización) y las notas de campo registradas por el investigador. Con respecto a la implementación del conjunto de tareas, se dio inicio haciendo una pequeña descripción a los estudiantes del trabajo a desarrollar, destacando la importancia que tenían cada uno de sus aportes a nivel individual y grupal, ahí la necesidad de no utilizar hojas extras.

Desde la EMR se reconoce el aprendizaje de la matemática como una actividad social y dinámica, donde los estudiantes pueden dar a conocer sus ideas y estrategias de solución, y reflexionar sobre ellas, lo cual les permite reconstruir sus estrategias de solución, logrando de esta manera, niveles de comprensión más avanzados. Atendiendo a este elemento, la totalidad del conjunto de tareas fue desarrollada en pequeños grupos de trabajo (entre 2 y 4 estudiantes); en relación con la disposición de los estudiantes, inicialmente se les pidió organizarse en parejas de trabajo, cabe resaltar que durante el desarrollo de las diferentes tareas, algunos grupos decidieron reorganizarse para continuar con el trabajo, dicha organización fue de manera voluntaria y por afinidad, en ningún momento se pensó en imponer los grupos de trabajo.

De manera simultánea al trabajo realizado en grupo, y en mi papel de docente investigadora visité cada uno de los grupos con la idea de escuchar las propuestas de solución planteadas por los estudiantes, además de participar en las discusiones y reflexiones al interior de algunos grupos en torno a los modelos propuestos. Según las herramientas conceptuales de la EMR, el proceso de aprendizaje-enseñanza de la matemática requiere un docente capaz de guiar estas trayectorias, un docente con la capacidad de adaptar las secuencias curriculares, a las necesidades y capacidades de los estudiantes; un docente con una *sensibilidad teórica* capaz de analizar e interpretar el trabajo oral y escritos de los estudiantes, atento a los momentos claves en donde se den los procesos de esquematización y formalización progresiva.

Posteriormente, se realizó la socialización de algunas de las respuestas a cada una de las tareas propuestas, dinámica que desde el enfoque de la EMR exige un análisis reflexivo en torno a las diversas soluciones propuestas por los estudiantes, de modo tal que la trayectoria de modelos de menos a más formales, eficientes, sofisticados y generalizables se haga visible.

En resumen toda la información recolectada se encuentra registrada en:

- producciones escritas de los estudiantes (en pequeños grupos). En las oportunidades que no fue posible concluir con alguna de las tareas propuestas, las hojas de trabajo se recogían y nuevamente se entregaban en la siguiente clase.
- las grabaciones de audio realizadas durante la implementación (trabajo por grupos y socialización). Estas grabaciones en audio evidencian las interacciones, reflexiones y dinámicas al interior de los grupos de trabajo, al igual que las socializaciones realizadas.
- Las notas de campo registradas por el investigador.

3.4 Organización y sistematización de la información.

Se realizó un análisis anticipado de cada tarea (supuestos iniciales sobre la forma en que los estudiantes pretenden dar solución a la situación-problema), el que servirá como apoyo, en la producción de unas categorías de análisis previas, las cuales a su vez serán complementadas con las producciones de los estudiantes a través de un análisis a posteriori. “Estos análisis didácticos *a priori* y *a posteriori* se centraron en la comparación y categorización de producciones, identificándose tanto modelos y estrategias, como formas de simbolización, esquematización y formalización” Zolkower, Bressan & Gallego (2006, p. 22); así pues, se continuará con un análisis descriptivo de las producciones escritas de cada uno de los grupos de trabajo en relación con las tareas asignadas, análisis que será complementado por los audios que evidencian los procesos de interacción y socialización y las notas de campo que se llevaron durante la implementación, este análisis estará orientado fundamentalmente por la constitución de los objetos mentales variable y dependencia, evidenciados a través de los diferentes niveles de comprensión .

Posteriormente, se demostrará la evolución progresiva de los modelos construidos por los estudiantes; es decir, evidenciar la transformación en la construcción de modelos situacionales (organizadores de la situación) a modelos con mayor grado de formalización, en los que muestran niveles de comprensión más avanzados.

3.5 Categorías de análisis

Para esta investigación, el proceso de organización y sistematización de la información representa un aspecto fundamental que debe ser pensado, organizado e interpretado no solo por la pregunta y objetivo de la investigación, sino también a través de los principios teóricos y metodológicos de la educación matemática realista (EMR), de manera que las categorías de análisis se originan de un análisis fenomenológico y de supuestos teóricos de la EMR, las cuales se han venido fortaleciendo con las producciones e interacciones desarrolladas por los estudiantes participantes. El proceso de construcción de categorías de análisis para el conjunto de tareas se ha venido desarrollando teniendo en cuenta; el propósito inicial con el cual se ajustó y diseñó dicha propuesta; un análisis predictivo (anticipado) de las respuestas de los estudiantes a las tareas propuestas; y las propuestas de solución planteadas por los estudiantes, con el fin de contrastar las predicciones con lo que realmente ocurrió en la implementación.

Desde esta perspectiva, la implementación del conjunto de tareas pretende esencialmente dar cuenta de: la constitución de los objetos mentales variable y dependencia funcional, y la evolución progresiva de los modelos construidos por los estudiantes; propósitos desde donde se definen las categorías de análisis de esta investigación.

3.5.1 La constitución de los objetos mentales variable y dependencia funcional

- **Categoría 1A:** Reconoce las variables involucradas, pero no establece relaciones entre ellas.
- **Categoría 1B:** Reconoce las variables involucradas y una relación entre ellas en casos específicos (no generaliza).
- **Categoría 1C:** Reconoce las variables involucradas y una relación general entre ellas, expresada en un lenguaje no algebraico.
- **Categoría 1D:** Reconoce las variables involucradas y una relación de tipo funcional entre ellas desde casos particulares, (no generaliza)

- **Categoría 1E:** Reconoce las variables involucradas y una relación de tipo funcional, expresada en un lenguaje no algebraico.
- **Categoría 1F:** Reconoce las variables involucradas y una relación funcional entre ellas, expresada en lenguaje algebraico.

3.5.2. La evolución progresiva de los modelos construidos por los estudiantes.

Referente al análisis de la información, las producciones escritas e interacciones de los estudiantes, estas han sido interpretadas a través de los niveles de comprensión establecidos desde el enfoque de la EMR, situación que se hizo manifiesta mediante descriptores (tabla 1. Modelos anticipado del conjunto de tareas) que permitieron establecer el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes frente a cada una de las tareas propuestas, y de esta manera, poder identificar el avance progresivo de los estudiantes respecto a los niveles de comprensión de una tarea a la otra.

Evidentemente, la tarea de comprender cada uno de los procesos individuales no es una tarea sencilla, Henao y Vanegas (2012) consideran importante que:

> El análisis de la información debe descansar sobre el marco teórico adoptado y por lo tanto, los *niveles de comprensión* representan un aspecto importante en este asunto, puesto que ayudan a seguir los procesos de aprendizaje, situando tanto el trabajo que hacen los estudiantes en niveles de *matematización horizontal*, como en niveles de *matematización vertical*. (p.65).

Tabla 1

Modelo anticipado del conjunto de tareas

		Modelos anticipado del conjunto de tareas
MATEMATIZACIÓN PROGRESIVA	**NIVEL SITUACIONAL**	▪ Identifica las magnitudes (variables) que intervienen en la situación. ▪ Utiliza material concreto para representar la situación. ▪ Visualiza el problema desde diferentes puntos de vista. ▪ Plantea modelos de solución elaborados a partir de esquemas, dibujos donde se evidencia la manera en que comprende el patrón.
	NIVEL REFERENCIAL	▪ Justifica y explica con sus propias palabras (oral - escrito) las relaciones y regularidades encontradas entre las variables involucradas. ▪ Enriquece las representaciones graficas con objetos matemáticos. ▪ Plantea diferentes modelos matemáticos particulares de la situación-problema, aunque se visualiza un vínculo con el contexto, modelos de solución en el que, por ejemplo, cada término de la secuencia está determinado por la figura inmediatamente anterior, ▪ Propone un modelo de solución asociado a valores particulares, en donde invisibilizan la expresión ***para cualquier figura***, por valores específicos en la secuencia.
MATEMATIZACIÓN PROGRESIVA	**NIVEL GENERAL**	▪ Enuncia modelos en los que utiliza notaciones y símbolos de la matemática para la obtención de modelos generales. ▪ Propone las primeras expresiones generalizadas, formulas, "ecuaciones" que dan cuenta de la relación de dependencia entre las variables involucradas en cada una de las situaciones planteadas. ▪ Constituye expresiones algebraicas que modelen la situación planteada y valida el modelo encontrado.
	NIVEL FORMAL	• Reconocen los conceptos centrales implicados en la situación problema. • Valida del modelo matemático encontrado • Reconoce y oordina diversos modelos de la situación-problema.

Tomado y Adaptado de Henao y Vanegas (2012, p. 152)

4. Desarrollo de la propuesta

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados obtenidos durante la implementación de cada una de las tareas propuestas, el cual se desarrolló desde la producción individual de los estudiantes, en el contexto de grupo. Para el análisis se ha privilegiado aquella información relevante en función de las categorías de análisis establecidas, aquella que ofreció elementos significativos para el análisis, razón por la cual no se consideraron las respuestas dadas a la totalidad de preguntas planteadas en el conjunto de tareas.

4.1 Análisis de resultados de las actividades de intervención

En esta sección y para cada una de las tareas se presentará un análisis del propósito de cada diseño, luego el desarrollo de la actividad, asimismo el análisis de las producciones de los estudiantes y finalmente, una breve síntesis de los resultados obtenidos, lo cual posibilito la toma de decisiones frente a la manera de continuar desarrollando la implementación programada.

Inicialmente se realizó un análisis específico de la producción individual de los estudiantes para cada una de las tareas, en el contexto de grupo, análisis que se complementó con las grabaciones en audio de las interacciones de los estudiantes durante el trabajo en grupo y la socialización, al igual que por las notas de campo del investigador. Se establecieron algunos fragmentos de diálogos que reflejan las interacciones durante la socialización y que dan cuenta de las diferentes categorías de análisis:

4.1.1 Tarea 1: Secuencia de figuras

A continuación podemos ver una secuencia de figuras.

1. *Grafique la Figura 5 de esta secuencia.*
2. *¿Cuántos cuadrados tendría la Figura **9** de la secuencia dada?*
3. *¿ Cuál Figura de secuencia tendría en total 48 cuadrados?*
4. *¿Cuántos cuadrados tendría la Figura 100 de la secuencia dada?*
5. *¿Cómo le explicaría a un compañero el procedimiento necesario para obtener el número de cuadrados para cualquier figura?*
6. *Encuentre algún método o expresión que le permita determinar cuántos se necesitan para formar cualquier figura de la secuencia.*

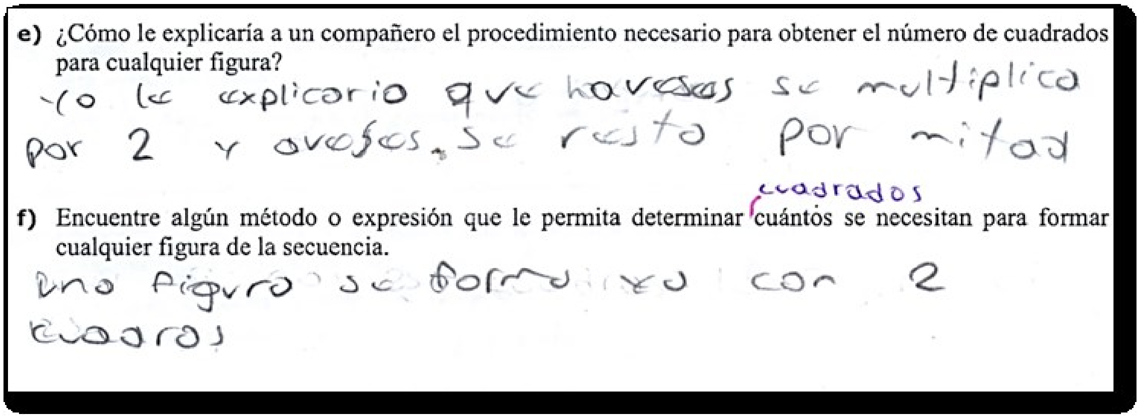
Figura 17. Secuencia de figuras

Esta tarea, tal y como fue justificada en el capítulo tres se constituye en la primera aproximación de contextos realistas, a partir del cual se espera que los estudiantes identifique las regularidades y relaciones entre las variables que intervienen en la situaciones, posibilitando de esta manera la constitución sus propios modelos. Se inicia la sesión haciendo una descripción general del trabajo a desarrollar, destacando la importancia de cada uno de sus aportes a nivel individual y grupal, de ahí la necesidad de no utilizar hojas extras, y registrar todos sus aportes en el documento que les fue entregado. Simultáneamente, se hizo entrega de la primera tarea a cada uno de los estudiantes, quienes se mostraron incomodos frente a la idea de resolver una guía de trabajo de un tema nuevo, sin una explicación previa, lo cual era contrario a las dinámicas de trabajo a las cuales estaba habituado, frente a esta situación se les explicó, me interesaba reconocer y analizar cuáles eran los mecanismos de solución que cada uno de ellos planteaba, y constituir junto con ellos este concepto nuevo para ellos.

Una vez organizados las parejas de trabajo, fue necesario intervenir al observar que a pesar de la disposición con la que se organizó el trabajo, muchos de los estudiantes iniciaron su trabajo de manera individual, argumentando que era trabajo sencillo que podían desarrollar individualmente, frente a lo cual replique justificándoles la importancia de desarrollar el trabajo en grupo, la idea era poner en juego las opciones de solución que cada uno de ellos tenía, escuchar las opciones de sus compañeros y poder analizar cada una de dichas propuestas. Durante el desarrollo de la tarea, pase grupo por grupo con la firme intención de escuchar las discusiones al interior de cada uno de ellos. En términos generales se evidenciaron serios inconvenientes por parte de los estudiantes frente a los dos últimos puntos de la tarea, al tratar de explicar su percepción de la secuencia de manera precisa,

Las propuestas de solución planteadas por los estudiantes frente a la primera tarea, pueden caracterizarse de la siguiente manera:

Los estudiantes (Categoría 1A; 2, 96%) que reconocen las variables involucradas en la situación, sin embargo, no logran establecer relaciones entre ellas.



e) ¿Cómo le explicaría a un compañero el procedimiento necesario para obtener el número de cuadrados para cualquier figura?

Yo le explicaria que haveces se multiplica por 2 y aveces se resta por mitad

f) Encuentre algún método o expresión que le permita determinar cuadrados cuántos se necesitan para formar cualquier figura de la secuencia.

Una figura se forma [illegible] con 2 cuadros

Figura 18. Modelo de solución situacional propuesto por un estudiante que no consigue establecer relaciones entre las variables.

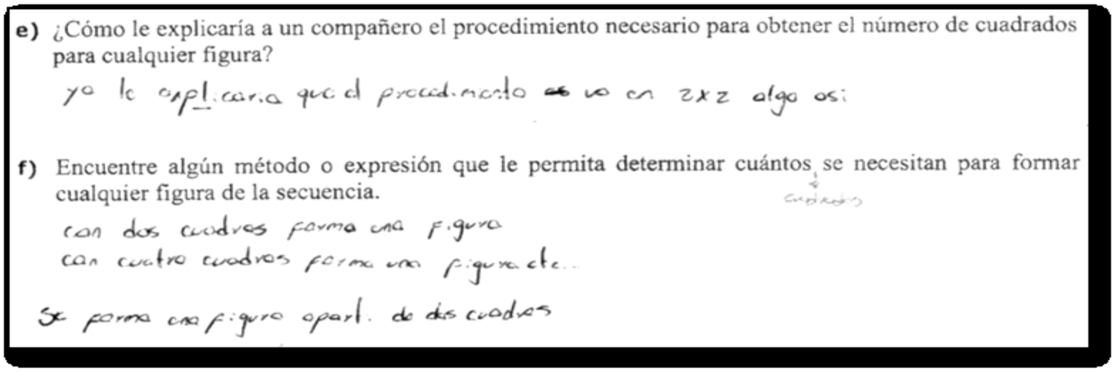
El único estudiante ubicado en esta categoría propone la solución de los cuatro primeros numerales de la tarea, no obstante, en la producción escrita se evidencia que efectivamente no logró establecer ningún tipo de relaciones entre el número de la figura y la cantidad total de cuadrados. Frente a las grabaciones de audio realizadas durante la socialización de las propuestas de solución se encuentra una intervención del mismo estudiante, quien intenta explicar el procedimiento necesario para determinar el número de cuadrados para cualquier figura.

Profesora: Yo quiero que le explique a alguien; que busques la manera de explicarle a un compañero el procedimiento necesario para obtener el número de cuadrados de cualquier figura, supongamos que usted le va a explicar y que esta persona frente a su explicación va a entender **E (Fabián): dos cuadrados tengo que, tengo que tener dos cuadrados para entender la figura, y así, entre más cuadrados tenga formo más figuras.**

Figura 19. Inquietud de un estudiante sobre el procedimiento para obtener el numero cuadrado de cualquier figura

Este tipo de producción corrresponde *con un nivel de comprensión sitiacional*, en tanto que el modelos planteado por el estudiante se encuentra inmerso en la misma situacion que le dio origen, en donde evidentemente los objetos matemáticos no aparecen directamente.

En este grupo se reúnen las producciones de los estudiantes (Categoría 1B; 24,52%) que ante la situación reconocen las variables involucradas y establece una relación entre ellas solamente para valores específicos (no logran generalizar). Cabe señalar, que la totalidad de estudiantes agrupados en esta categoría, respondieron satisfactoriamente las 4 primeras preguntas, lo cual supone una comprensión general de las condiciones planteadas en la situación, esto permite evidenciar un reconocimiento por parte de los estudiantes de las variables involucradas


e) ¿Cómo le explicaría a un compañero el procedimiento necesario para obtener el número de cuadrados para cualquier figura?

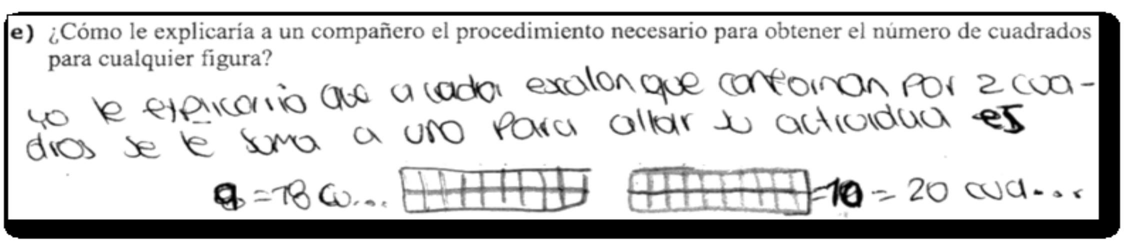
yo le explicaria que el procedimiento es en 2x2 algo asi:

f) Encuentre algún método o expresión que le permita determinar cuántos cuadrados se necesitan para formar cualquier figura de la secuencia.

con dos cuadros formo una figura
con cuatro cuadros formo una figura etc...
Se forma una figura apart. de dos cuadros

Figura 20. Modelo de solución propuesto por un estudiante que consigue establecer una relación entre las variables a partir de proceso recursivos.

Dentro de esta categoría se encuentran propuestas de solución constituidas mediante procesos recursivos, en los cuales logran establecer relaciones como : "que va aumentado de dos en dos" o " la figura va aumentando 2 cuadros más", explicaciones que en algunos casos son seguidas por operaciones de carácter aditivo, que permiten establecer satisfactoriamente relaciones para valores específicos, no obstante, encontraron dificultades para establecer un procedimiento o método que le permita generalizar la situación.

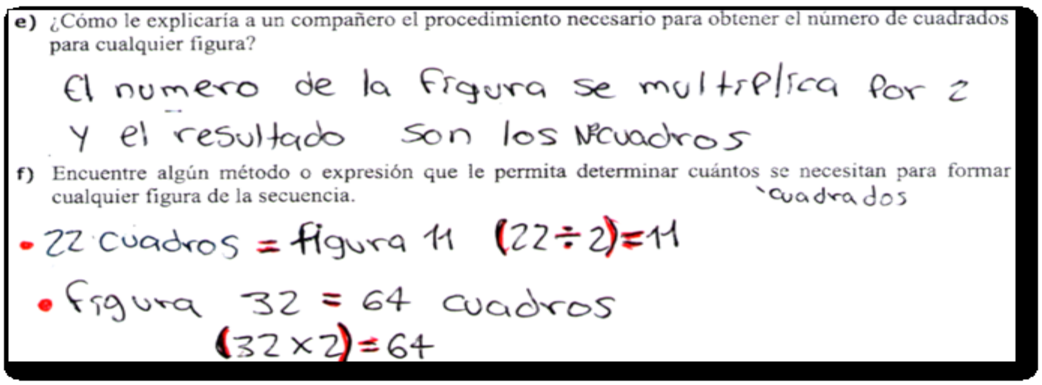

e) ¿Cómo le explicaría a un compañero el procedimiento necesario para obtener el número de cuadrados para cualquier figura?

yo le explicario que a cada escalon que conforman por 2 cuadros se le suma a uno para allar su actividad es
9 = 18 cu... 10 = 20 cua...

Figura 21. Modelo de solución referencial propuesto por un estudiante que establecer una relación entre las variables a partir de proceso recursivos.

De modo que, en este tipo de producciones se evidencia un primer nivel dentro de la matematización vertical, relacionado con la constitución de *modelos de*, que sugiere *un nivel de comprensión referencial* por parte de los estudiantes ubicados en esta categoría. De hecho, la figura XX pone de manifiesto el reconocimiento por parte de los estudiantes de ciertas regularidades y relaciones numéricas entre las variables que resultan útiles para valores concretos, no obstante, esta clase de modelos adquieren un carácter limitante en la medida en que se necesita conocer el resultado inmediatamente anterior para saber cómo continua la secuencia.

Los estudiantes (Categoría 1D; 23,52%) que consiguen establecer una relación de carácter funcional entre las variables involucradas, a partir, únicamente de valores específicos, no obstante, encuentran dificultad para consolidar una expresión que les permita generalizar la relación encontrada.



e) ¿Cómo le explicaría a un compañero el procedimiento necesario para obtener el número de cuadrados para cualquier figura?

El numero de la figura se multiplica por 2 y el resultado son los Nºcuadros

f) Encuentre algún método o expresión que le permita determinar cuántos se necesitan para formar cualquier figura de la secuencia. cuadrados

- 22 cuadros = figura 11 (22÷2)=11
- figura 32 = 64 cuadros (32×2)=64

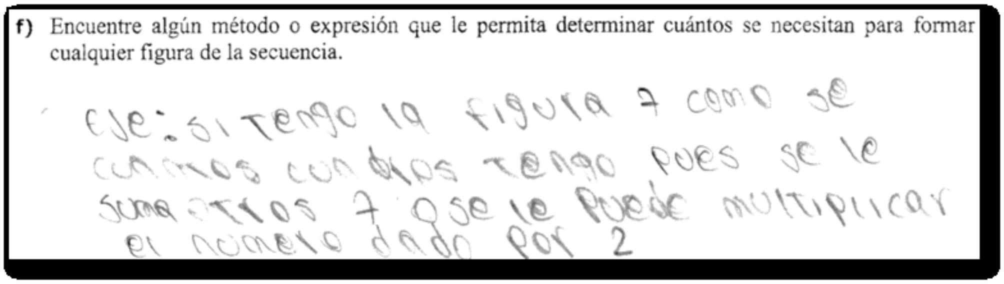
Figura 22. Modelo de solución propuesto por un estudiante que consigue establecer una relación entre las variables a partir de valores particulares.

En este grupo se evidencia que a pesar de que algunos estudiantes apelan a procesos recursivos para explicar el procedimiento, recurren a procesos inductivos para determinar un método o expresión general que les permita encontrar número total de cuadrados para cualquier figura.

Profesora: ¿? O sea que si yo quiero saber el número de cuadrados y te doy el número de la figura, ¿tú qué haces con el número de la figura? Estudiante (Brayan): lo multiplico por dos [……….] *La estudiante frente a la misma pregunta, pasa a tablero a explicar el procedimiento encontrado.* Estudiante (Ingrid): doce se multiplica por dos, doce por dos, y 24 es el número de cuadrados.

Figura 23. Ejercicio sobre hallar el número cuadrado

Durante la socialización se pudo constatar que algunos estudiantes que habían logrado reconocer una relación de carácter funcional entre las variables, sin embargo, recurren a valores específicos para validar el procedimiento encontrado.



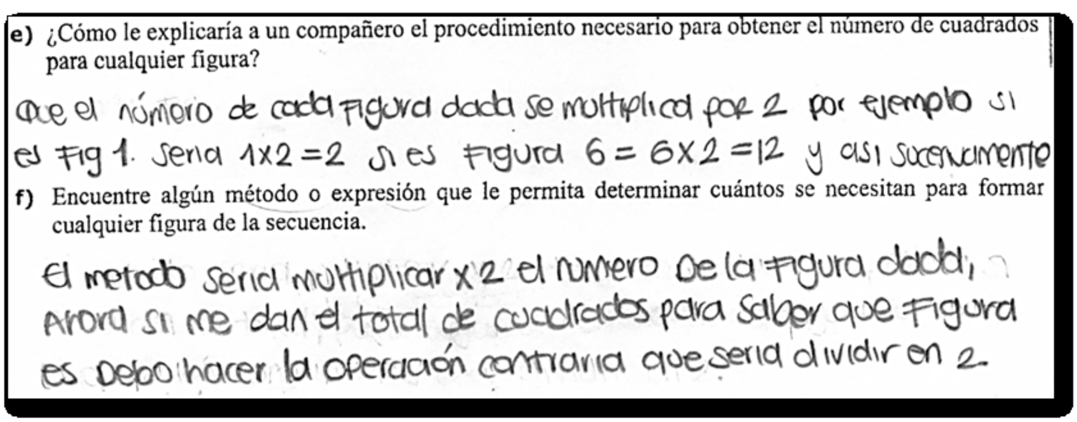
f) Encuentre algún método o expresión que le permita determinar cuántos se necesitan para formar cualquier figura de la secuencia.

EJE: si tengo la figura 7 como se cuantos cuadros tengo pues se le suma otros 7 o se le puede multiplicar el numero dado por 2

Figura 24. Modelo de solución referencial propuesto por un estudiante que consigue establecer una relación entre las variables a partir de valores particulares.

Hay que mencionar, además, que este modelo al igual que el anterior resulta conveniente para valores especifico de la secuencia, sin embargo, una de sus limitantes es el hecho de no posee un carácter general que permita determinar la cantidad total de cuadrados para cualquier figura. Este modelo permite ubicar a los estudiantes de este grupo en *un nivel de comprensión referencial.*

Este grupo recoge las producciones de los estudiantes (1E; 50 %) que reconocieron las variables involucradas y una relación de tipo funcional entre ellas, expresada en un lenguaje no algebraico. Este grupo de estudiantes logró reconocer y describir la relación funcional de la variable (dependiente) con respecto a los cambios proporcionales de la variable (independiente), a través de un modelo descrito en lenguaje natural, en el cual se establece la relación entre las variables, con algunas dificultades relacionadas con la redacción.



e) ¿Cómo le explicaría a un compañero el procedimiento necesario para obtener el número de cuadrados para cualquier figura?

Que el número de cada figura dada se multiplica por 2 por ejemplo si es Fig 1. Sería 1x2 =2 si es figura 6 = 6X2 =12 y así sucesivamente

f) Encuentre algún método o expresión que le permita determinar cuántos se necesitan para formar cualquier figura de la secuencia.

El metodo sería multiplicar x 2 el numero de la figura dada, Ahora si me dan el total de cuadrados para saber que figura es Debo hacer la operación contraria que sería dividir en 2.

Figura 25. Modelo de solución referencial propuesto por un estudiante que consigue establecer una relación de carácter funcional entre las variables, mediante el lenguaje natural.

En efecto, este modelo, se constituye en un *modelo para,* que permite organizar otro tipo de situaciones afines, lo cual permite asociar a los estudiantes ubicados en esta categoría en *un nivel de comprensión general*. Evidentemente este grupo de estudiantes puso de manifiesto varios aspectos generales, no obstante, a pesar de haber logrado detectar los algoritmos con los que solucionaron cada una de las preguntas, encontraron dificultades para expresar cuantitativamente la generalización de dicha relación. Es de resaltar que la totalidad de los estudiantes dispuestos en esta clasificación emplearon el lenguaje natural para expresar la generalización, ninguno de ellos empleó símbolos en su generalización.

e) ¿Cómo le explicaría a un compañero el procedimiento necesario para obtener el número de cuadrados para cualquier figura?

Yo le explicaria a mi compañero diciendole que el resultado es el doble de el número de la figura

f) Encuentre algún método formula o expresión que le permita determinar cuántos cuadrados se necesitan para formar cualquier figura de la secuencia.

El método que yo encontre fue mirar el doble del número de la figura.

Figura 26. Modelo de solución referencial propuesto por un estudiante que consigue establecer una relación de carácter funcional entre las variables, mediante el registro natural.

Es necesario resaltar la importancia de las interacciones que se presentaron entre algunos integrantes del grupo en la construcción de este modelo, en las cuales se evidencian la manera en que las estrategias informales de algunos de sus integrantes posibilitaron la consolidación de aspectos generales.

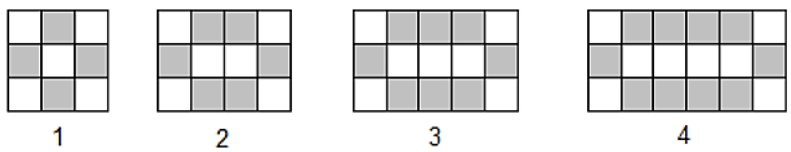
Estudiante (Edison): imagínese dos filas y vaya aumentando de a dos personas…
Profesora: ¿dos personas?
Estudiante (Edison): si, en cada fila
Profesora: imagínese dos filas, ¿de qué?
Estudiante (Edison): de persona (risas)
Profesora: dos filas de personas, y en cada fila, ¿cuantas personas hay? ……
Estudiante (Edison): una
Profesora: y después que pasa
Estudiante (Edison): váyale aumentando una persona a cada fila.
Estudiante (Valentina): yo le diría que hiciera dos filas, con el mismo número pues,…. que tiene la figura.
Profesora: dos filas con el mismo número de la figura, entonces… si vamos a hacer la figura número tres?
Estudiante (Valentina): pues, *con el dedo señala en el tablero lo que serían dos filas, y en un tono muy bajo de vos me dice* Pues, una fila de tressss.
E (Brayan): dos filas de a tres.

Figura 27. Interacción entre alumnos en la construcción del modelo

Finalmente y considerando los resultados obtenidos al implementación la tarea N°1, se hace necesario continuar trabajando con secuencias figurales, y plantear una tarea que le permita a los estudiantes determinar a partir de una secuencia, varias relaciones de dependencia, posibilitando de esta manera la búsqueda de generalidades a partir de diferentes estrategia de solución, fundamentadas en el ver, decir y registrar.

4.1.2 Tarea 2: Baldosas

Sara construyó una secuencia de figuras con pequeñas baldosas blancas y grises dispuestas de la siguiente manera:



A partir de esta secuencia responde las siguientes preguntas:

1) *Representa la quinta figura de la secuencia.*
2) *Representa la sexta figura de la secuencia.*
3) *¿Cuántas baldosas en total tiene la figura 10?*
4) *¿Qué figura de la secuencia tiene en total 81 baldosas?*
5) *Ayuda a Sara a completar la tabla que tiene para organizar los datos*

Número de la figura	***Número de baldosas blancas***	***Número de baldosas Grises***	***Número total de baldosas***
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

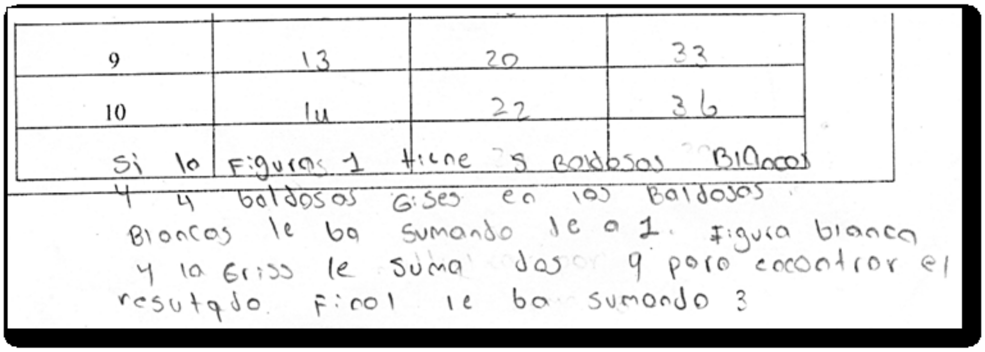
Figura 28. Tarea 2. Baldosas.

Tal y como se justificó en el tercer capítulo de esta investigación, con la Tarea 2 se pretendía que los estudiantes tuvieran la oportunidad de analizar la secuencia, e identificar diferentes relaciones de dependencia entre las variables involucradas, expresándolas en diferentes registros de representación. Una vez conformados los mismos grupos de trabajo, se entregó el material de manera individual para ser desarrollado, en general se pudo observar una actitud favorable frente al desarrollo de la tarea propuesta, a diferencia de la primera tarea, se observa una disposición natural para trabajar en grupos y plantear propuestas de solución frente a cada uno de los interrogantes. Evidentemente los estudiantes encontraron dificultades para expresar (verbalizar) de manera clara y convincente el patrón encontrado, y es aquí donde la interacción entre los estudiantes cobró mucha importancia, ya que fueron justamente ellos los encargados, en una producción colectiva, de ir precisando dichas expresiones, dotándolas de nuevas interpretaciones y significados cada vez más relevantes. Fue interesante observar la dinámica de interacción entre diferentes grupos, que permitió el intercambio de diferentes estrategias de solución. Durante el trabajo en grupo, pase por cada uno de ellos escuchando sus propuestas de solución, sus discusiones; se presentaron algunos momentos en los que fue necesario intervenir a través de preguntas que posibilitaran desbloquear algunas dinámicas de grupo, siempre motivándolos a explicar los elementos característicos que cada uno de ellos había conseguido percibir de la secuencia.

Hay que mencionar que durante la implementación se detectaron algunas dificultades con el diseño de la tarea N°2, relacionadas con la falta de precisión en algunas preguntas, por lo cual fue necesario intervenir y aclarar verbalmente que el objetivo que se buscó alcanzar con la casilla en blanco era precisamente encontrar una expresión o fórmula que les permitiera determinar la cantidad de baldosas blancas, grises y totales para cualquier número de figura, sin embargo, y a pesar de la aclaración algunos estudiantes no comprendieron y continuaron con el patrón, otros lograron reconocer y expresar algunas relaciones de dependencia entre las variable, en las cuales representaban la variable independiente mediante la palabra *figura*, ante lo cual sugerí reemplazar dicha palabra por algún símbolo o letra que les representara el número de la figura, ante lo cual ellos sugirieron que la mejor opción era la letra F.

La caracterización de las propuestas de los estudiantes frente a la segunda tarea, se organizó de la siguiente manera:

Estudiantes (Categoría 1B; 31,43%) que reconocen las variables involucradas y consiguen establecer relaciones particulares entre ellas a través de procesos recursivos. Evidentemente estas relaciones de dependencia emergieron cuando los estudiantes percibieron algunas regularidades en los valores que registraban en la tabla del quinto punto, razón por la cual dejaron de lado la secuencia y continuaron trabajando con el modelo encontrado, así pues, los estudiantes ubicados concluyen de una figura a la otra, las baldosas blancas aumentan de uno en uno a partir de cinco, las grises de dos en dos a partir de cuatro, y la totalidad de las baldosas de tres en tres a partir de nueve.



9	13	20	33
10	14	22	36

Si la Figuras 1 tiene 5 baldosas Blancas y 4 baldosas Gises en las Baldosas Blancas le ba sumando de a 1. Figura blanca y la Griss le suma dos y para encontrar el resutado final le ba sumando 3

Figura 29. Modelo de solución propuesto por un estudiante que consigue establecer relaciones entre las variables a partir de proceso recursivos.

Este tipo de producciones pone de manifiesto el reconocimiento de ciertas regularidades y relaciones numéricas entre los resultados obtenidos en la tabla, relaciones que resultan útiles en casos particulares, pero que cuentan con limitaciones relacionadas con la poca funcionalidad del modelo para conocer la cantidad de baldosas en un arreglo donde la variable independiente tome valores grandes, sin la necesidad de conocer los resultados anteriores. Según lo dicho hasta el momento, este modelo corresponde a un *modelo de* la situación, lo cual permite ubicar a los estudiantes en un nivel de comprensión referencial.

Durante el trabajo en grupo se pudo identificar que los estudiantes que lograron establecer estas relaciones mediante procesos recursivos, lo hicieron a partir de los resultados obtenidos en la tabla, sin establecer ni identificar estas variaciones en la secuencia propuesta.

Profesora: ¿cuéntanos que encontraste?
Estudiante (Cristian M): digamos en la figura 1, en la figura1 tengo, tengo 4 negras, 4 blancas, Mmmm cinco, 5 blancas y ahí pa bajo (*se refiere a la tabla del punto número cinco*) voy sumando uno a cada una.
Profesora: ¿y por qué?
Estudiante (Cristian M): Digamos, por ejemplo tengo cinco y le sumo otra, para 6 blancas, y así sucesivamente hasta el final. Y acá le sumo 2, 2 negras que son esas dos (*señala las dos baldosas grises de los extremos*).
Profesora: ¿Cuáles se le suman, cuáles se le suman?
Estudiante (Cristian M): Estas dos, pues yo le sumo estas dos (*nuevamente señala en la gráfica las dos baldosas grises de los extremos*) le sumaba estas y más estas y me daba así sucesivamente, y para

encontrar el final sumaba de a tres.
Profesora: Pero mira que estas dos (*señalo las dos baldosas grises de los extremos*) o sea las dos de los extremos, mira, préstame el lápiz por favor, o sea, es lo mismo, esta acá, pero también esta acá, o sea ¿por qué le sumo los extremos, si siempre están?, también están acá.
Estudiante (Cristian M): Se le suman estas.
Profesora: Que se le añadió, digamos si tengo la figura así(*señalo la figura uno*), la figura uno, que le añadimos(*indico con la mano la acción de pasar de la figura uno a la dos*)
Estudiante (Cristian M): otra, para que sea dos [4-.19 ~ 5:50]

Figura 30. Relaciones mediante procesos recursivos

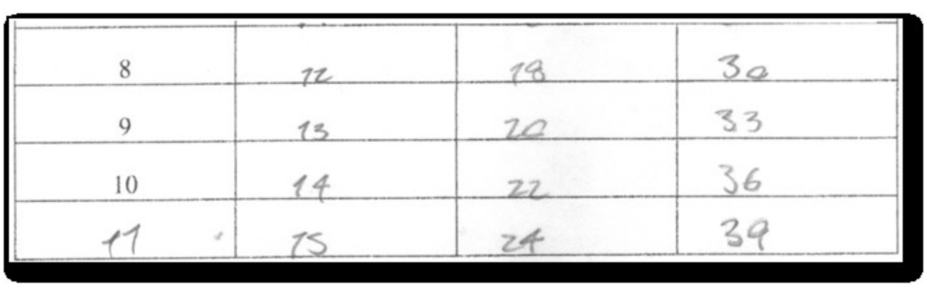
Tiempo después, este mismo estudiante frente a una pregunta realizada durante la socialización, explica un método diferente para determinar el número de baldosas blancas al planteado originalmente.

Profesora: Entonces ya lo saben, si yo les digo ¿la figura número… 15 cuantas baldosas blancas tiene?
Estudiante (Cristian M): blancas? Tiene 15, 16, 17, 18, 19, **19**
Profesora: pero dime como es que lo hiciste, es que no me lo dicen y quiero que lo digan.
Estudiante (Cristian M): le sume estas 15, es como decir estas 15 acá y le sumo…; digo 15 y le sumo 4 de las esquinas. [16:20 ~16:45]

Figura 31. Método diferente para determinar el número de baldosas blancas

En este caso, es claro que Cristian evidencia un avance progresivo en la percepción y determinación de una expresión general que le permita determinar el número de baldosas blancas para cualquier número de figura, sin embargo, la respuesta que dio por escrito no refleja el procedimiento que explicó verbalmente, donde se observa claramente que persiste en procesos recursivos.

La falta de claridad en el instrumento generó que algunos estudiantes no comprendieran que la intencionalidad de la casilla en blanco del quinto punto, era precisamente expresar en forma generalizada cada una de las relaciones encontrada y no continuar con la secuencia, procedimiento en el cual incurrieron algunos de los estudiantes ubicados en esta categoría.



8	12	18	30
9	13	20	33
10	14	22	36
11	15	24	39

Figura 32. Solución propuesta por un estudiante que consigue establecer una relación entre las variables a partir de proceso recursivos.

Dentro de esta categoría, se ubican algunos estudiantes que consiguen percibir una relación funcional que permite determinar el número de baldosas blancas para cualquier figura, sin embargo, ante las otras relaciones, obtienen relaciones que aunque válidas, requieren conocer el valor de otras variables, que determinan mediante procesos recursivos, por ejemplo, el método propuesto por una estudiante que permite determinar el número total para determinada figura consiste en sumar el número de baldosas blancas y grises.

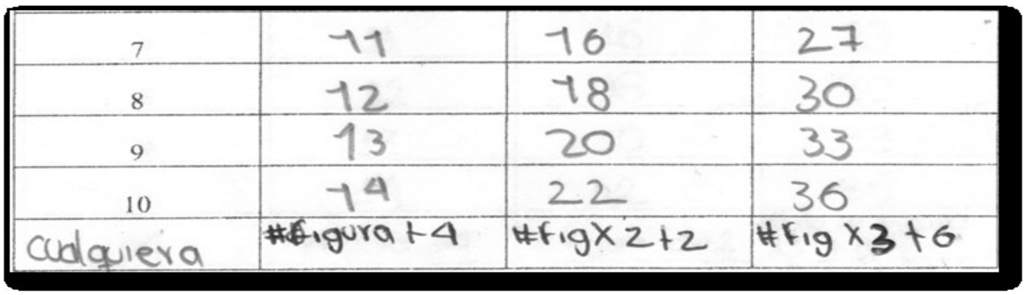
Estudiantes (Categoría 1E; 68,57%) en cuya producción se observa un reconocimiento de las variables involucradas en la secuencia y el establecimiento de una relación de carácter funcional, expresada en un lenguaje no algebraico. En esta tarea, a diferencia de la primera, se observa que los estudiantes plantean expresiones con las cuales pretenden generalizar las relaciones encontradas, expresiones que tienen una estrecha relación con lo que perciben, en las cuales aparecen los primeros símbolos con los que intentan representar las variables involucradas.

Comenzaré dando dos ejemplos, sobre las expresiones que permiten determinar el número de baldosas blancas, grises y el total de ellas, planteadas por los estudiantes, en el primer caso los estudiantes identifican ciertas características en la secuencia que les permite generalizarla.

Profesora: Búscame una relación entre este número (*Señalo en hoja de trabajo la figura N° 1*) y las baldosas blancas, hay algo que relaciona este número con las baldosas blancas.
Estudiante (Novoa): algo que tienen común esta, con esta, con esta, es que en el centro siempre es un múltiplo de tres, entonces en el uno, se descuentan los lados, se descuentan los lados,…
Estudiante (German) dígale más fácil, N° de la figura por 3 más 6.
Estudiante (Novoa): Si, ¿entonces uno que hace? Usted multiplica el número de la figura por 3 y luego le suma 6.
Profesora: ¿ese sería para todas las baldosas?
Estudiante (Novoa): si
Profesora: ahora tu reto es,.. Búscame para las baldosas blancas y grises.
Estudiante (Novoa): profe, profe ya, ya tengo el de las blancas, el número de las blancas es fácil, es lo mismo, en el centro está el número de la figura, y entonces usted que hace? Suma el número de la figura por…, le suma 4 al número de la figura.
Profesora: y funciona con este también?(*Señalo en hoja de trabajo la figura N°2*)
Estudiante (Novoa): Si
Profesora: ¿por qué?
Estudiante (Novoa): porque es el número de la figura en el centro, y se le suman cuatro que son las esquinas que no se pintan.

Figura 33. Expresiones que permiten determinar el número de baldosas blancas, grises y el total de ellas

Los estudiantes ubicados en esta categoria reconocieron caracteristicas en la secuencia, fundamentales en la posterior constitución de expresiones de carácter general que les permitio determinar el numero de baldosas para cualquier figura, como lo son por ejemplo, el número de baldosas blancas del centro corresponde al número de la secuencia; las cuatro baldosas blancas de las esquinas es un valor que se mantiene constante para cualquier figura, al igual que las dos baldosas grises a lado y lado de cada figura y finalmente, el número de baldosas grises centrales corresponden al doble de las blancas. El reconocimiento de estas caracteristicas, posibilitó que los estudiantes consiguieran establecer una relación matemática entre el número de la figura y la cantidad de baldosas en cada uno de los casos, promoviendo así, una evolución progresiva en los niveles de compresión, "en la medida en que los estudiantes doten de significado matemático las estrategias de solución (…), es posible que la reflexión los lleve a construir expresiones algebraicas que modelen la situación" (Henao & Vanegas, 2012, p. 108)



7	11	16	27
8	12	18	30
9	13	20	33
10	14	22	36
Cualquiera	#figura+4	#figX2+2	#fig X3+6

Figura 34. Modelos de solución propuestos por un estudiante que consigue establecer relaciones funcionales entre las variables, expresada en un lenguaje no algebraico.

La mayoría de los estudiantes ubicados en esta categoría plantean una expresión similar a la del ejemplo anterior, tan solo una estudiante planteó una expresión diferente que permite encontrar el número total de baldosas para cualquier figura, y consiste en sumar 2 al número de la figura, resultado que debe multiplicarse por 3. La estudiante estructura la expresión encontrada en el mismo orden en que pensó las operaciones, lo cual puede configurarse en una dificultad al desconocer elementos claves como el orden en el que deben desarrollarse las operaciones.

Total de baldosas = (Nº figura + 2) x 3

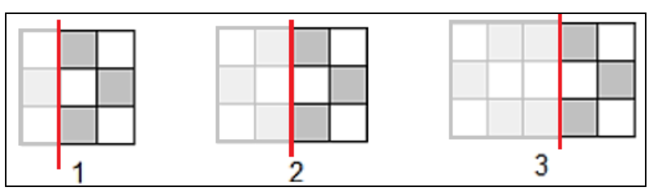


Figura 35. Total de baldosas

7	11	16	27
8	12	18	30
9	13	20	33
10	14	22	36
Cualquier numero	# fig+4 que son las esquinas	# fig x2+2	# fig+2 x3

Figura 36. Modelos de solución general propuestos por una estudiante que consigue establecer relaciones funcionales entre las variables, expresada en un lenguaje no algebraico.

Este tipo de modelos permite evidenciar elementos fundamentales en el proceso de matematización vertical, lo cual permite ubicar a los integrantes de este grupo en *un nivel de comprensión general*.

En términos generales, los resultados obtenidos al implementar la tarea N°2 permiten inferir un reconocimiento global de la situación por parte de los estudiantes, quienes consiguen establecer algunas relaciones de dependencia a través de diferentes modelos matemáticos entre las variable que intervienen en la situación, encontrando algunas dificultades para representar dichas relaciones a través del registro algebraico, ya que constituyen la fórmula en el orden en el que perciben a regularidad, dejando de lado el orden en que deben realizarse las operaciones.

Estos resultados sugieren la necesidad de ajustar y diseñar tareas que posibiliten modelar situaciones de variación lineal en otro tipo de contextos, que se promueva la conversión del registro natural al registro simbólico y gráfico, la construcción e interpretación de los gráficos cartesianos y del registro tabular. Incluir otros pipos de registros que permitan la modelación.

4.1.3 Tarea 3: Prendas y salarios.

La empresa de confecciones TUESTILO Ltda., se tienen dos clases de operarios: los de las máquinas planas y otros para las planchas a vapor; a estos últimos se les paga sus servicios con un salario base de $80.000 a la semana, más una comisión de $140 por cada prenda planchada. A los operarios de las máquinas planas se les paga el día según un salario mínimo establecido por la empresa, más una comisión por cada prenda extra elaborada.

1) *Con respecto a los operario asignados a las máquinas planas, responda:*
Si se sabe que la producción mínima exigida por la empresa para los operarios de las máquinas planas es de 200 prendas diarias, complete la siguiente información.

NÚMERO DE PRENDAS ELABORADAS A DIARIO	***SALARIO TOTAL DEVENGADO (DIARIO)***
200	*$24000*
210	*$25000*
221	
	$28500
	$24500
251	
305	
	$41800
298	

a) *Si un operario de máquina plana recibe por un día de trabajo un pago de $31.200 ¿Cuántas prendas elaboró ese día?*
b) *¿De qué depende la asignación diaria de los operarios de máquina plana?*
c) *Exprese la relación existente entre el número de prendas elaboradas a diario y el salario total devengado por un operario de máquina plana*
d) *¿Cuál puede ser una expresión que permita calcular el salario de cualquier empleado de máquinas teniendo en cuenta el valor de las comisiones?*

2) *Con respecto a los operarios asignados a las planchas a vapor responda:*
a) *¿Cuánto ganaría un prensista a la semana si lograra planchar:*
- *¿20 prendas?* $____________________
- *¿200 prendas?* $____________________
- *¿750 prendas?* $____________________

b) *Exprese la relación existente entre el salario semanal y el total de prendas planchadas por estos empleados utilizando los mismos parámetros del inciso anterior.*
c) *Si uno de los empleados ganó en una semana $152.800, ¿qué se puede decir del total de prendas planchadas en esta semana?*

3) *La empresa desea suprimir el salario mínimo de los operarios encargados del planchado y propone al sindicato que en cambio del salario base aumentará la comisión en $40 por prenda planchada.*
a) *Si usted fuese asesor del sindicato, que opción le sugeriría a los operarios y como justificaría que esta decisión es la más acertada.*

En su calidad de asesor del sindicato elabore una gráfica a partir de la cual pueda dar un argumento convincente que la decisión tomada es la más acertada.

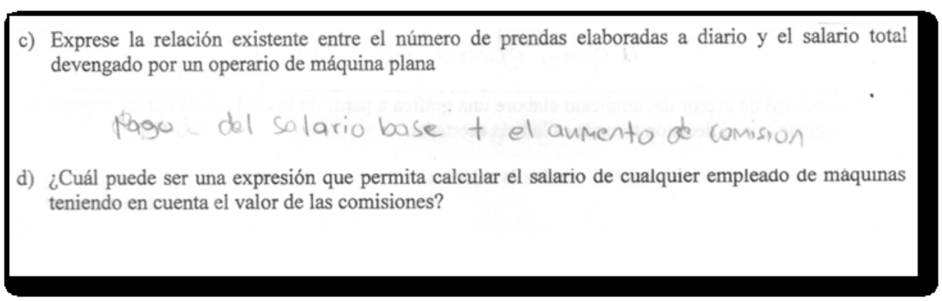
Figura 37. Tarea 3: Prendas y salarios.

Para el desarrollo de la tarea N° 3 se les pidió a los estudiantes reunirse en las parejas de trabajo, sin embargo en esta oportunidad, algunos grupos de trabajo se reorganizaron de manera autónoma y voluntaria, la actividad misma los llevo a interactuar espontáneamente con otros compañeros, buscando diferentes estrategias que les permitieran responder a los cuestionamientos. La eminente confusión de los estudiantes ante la situación planteada, suscitó la necesidad de intervenir a través la lectura de la situación en voz alta, con el fin de garantizar una comprensión por parte de los estudiantes, precisando junto con ellos, elementos clave involucrados en la tarea. Pese a que se realizó la lectura, algunos estudiantes continuaban confundiendo las condiciones de asignación salarial de los dos tipos de empleados, por ello, fue necesario precisar estos elementos en el tablero. Debido a la extensión y complejidad que encontraron los estudiantes frente al desarrollo esta tarea fue necesario emplear dos sesiones de trabajo más.

Considerando las sugerencias planteadas por Posada y Villa (2006b, p. 142), el análisis de esta tarea se realizó en dos momentos diferentes, el primero, donde la razón de cambio no es explícita y debe ser calculada; y el segundo donde la razón es expresada explícitamente.

De acuerdo con el primer momento, donde la razón de cambio debe ser calculada siguiendo las orientaciones del enunciado y la información de la tabla, las propuestas de solución planteadas por los estudiantes se caracterizan de la siguiente manera:

Reconocen las variables involucradas pero no establecen relaciones entre ellas (43%, Categoría 1A), algunos de ellos confunden las condiciones de cada relación. Jonathan, por ejemplo, reconoce las variables involucradas pero no logra establecer una relación entre ellas:

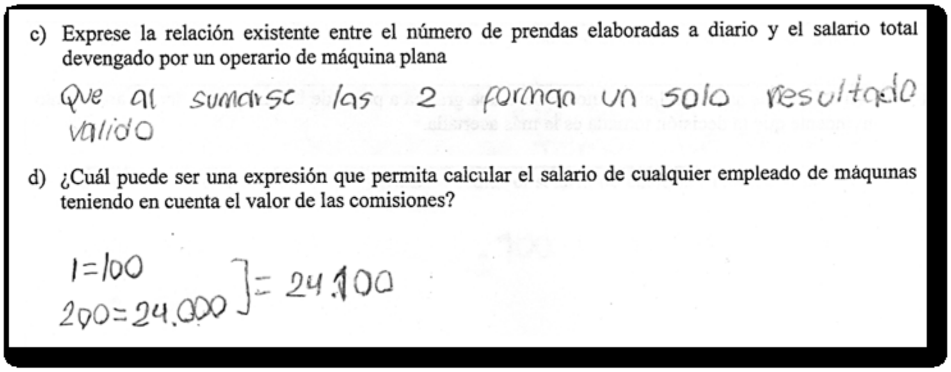

c) Exprese la relación existente entre el número de prendas elaboradas a diario y el salario total devengado por un operario de máquina plana

Pago del salario base + el aumento de comision

d) ¿Cuál puede ser una expresión que permita calcular el salario de cualquier empleado de máquinas teniendo en cuenta el valor de las comisiones?

Figura 38. Modelo de solución situacional propuesto por un estudiante que no consigue establecer relaciones entre las variables involucradas en la situación.

Reconoce las variables involucradas, y consigue determinar la razón de cambio entre ellas; no obstante, propone una expresiones que permiten pensar el establecimiento de una relación únicamente desde casos particulares (Categoría 1 B, 2.86%), que no logran generalizar. En este sentido, el estudiante la asume como un conjunto de operaciones que debe seguir para calcular un valor determinado, y no como una relación entre las variables involucradas.


c) Exprese la relación existente entre el número de prendas elaboradas a diario y el salario total devengado por un operario de máquina plana

Que al sumarse las 2 forman un solo resultado valido

d) ¿Cuál puede ser una expresión que permita calcular el salario de cualquier empleado de máquinas teniendo en cuenta el valor de las comisiones?

1=100
200=24.000]= 24.100

Figura 39. Modelo de solución propuesto por un estudiante que consigue establecer una relación entre las variables a partir de un valor particular.

Reconocen las variables involucradas, identifican la razón de cambio y establecen relaciones de carácter general entre ellas (1 C, 14.28%). Los estudiantes ubicados en esta categoría consiguieron establecer una relación de carácter general que consiste en *sumarle 40 al número total de prendas elaborado, resultado que debe ser multiplicado por cien, y así obtener el sueldo devengado diariamente,* al cuestionar a una de las estudiantes frente al por qué de este procedimiento, manifiesta que el 40 es el valor que hace falta al número de prendas para ser igual al sueldo, invisibilizando los ceros.

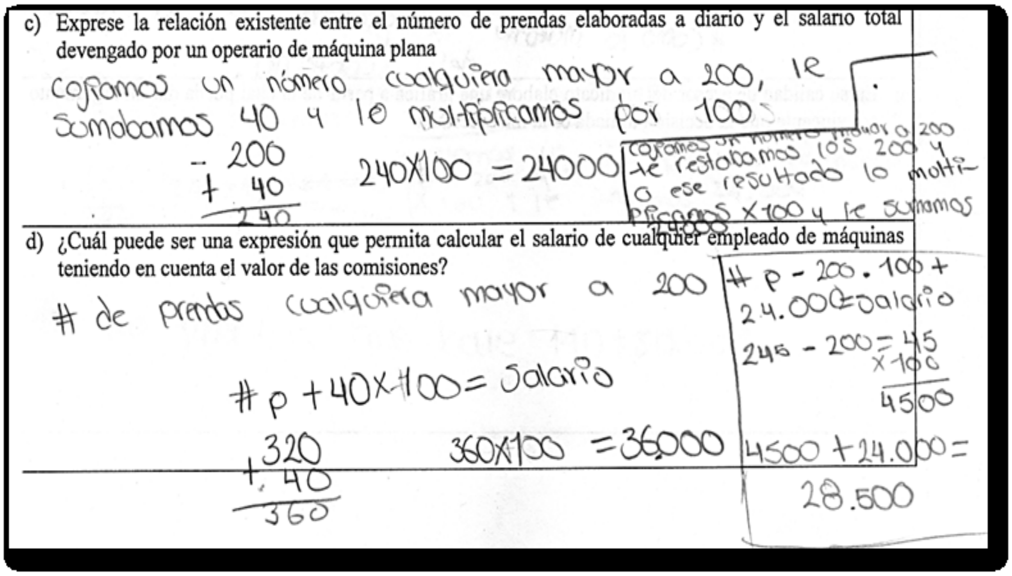
Tabla 2

Producción diaria vs salario diario

Número de prendas elaboradas a diario	Salario total devengado (diario)
200	*$24000*

Una de las limitaciones de este modelo radica en que se constituye prescindiendo de las condiciones iniciales dadas por la situación, en el cual reconocen que el sueldo devengado depende del número de prendas elaboradas, y no, del número de prendas extra elaboradas, lo cual permitiría pensar que no hubo un reconocimiento explícito de las variables involucras en la situación planteada. Evidentemente cuando validan su procedimiento y lo comparan con las relaciones encontradas por otros compañeros, reconocen que efectivamente funciona.

Una de las estudiantes ubicada en esta categoría considera oportuno explicar las dos relaciones encontradas, admitiendo que la relación de carácter funcional la constituyo a partir de la interacción con sus compañeros de grupo.



c) Exprese la relación existente entre el número de prendas elaboradas a diario y el salario total devengado por un operario de máquina plana

cojamos un número cualquiera mayor a 200, le sumabamos 40 y lo multiplicamos por 100

200 + 40 = 240

240X100 = 24000

cojamos un número mayor a 200 le restabamos los 200 y a ese resultado lo multiplicamos X100 y le sumamos 24000

d) ¿Cuál puede ser una expresión que permita calcular el salario de cualquier empleado de máquinas teniendo en cuenta el valor de las comisiones?

de prendas cualquiera mayor a 200

p + 40X100 = salario

320 + 40 = 360

360X100 = 36000

p - 200 . 100 + 24.000 = salario

245 - 200 = 45

45 X100 = 4500

4500 + 24.000 = 28.500

Figura 40. Modelo de solución propuesto por una estudiante que consigue establecer relaciones generales entre las variables, expresada en un lenguaje no algebraico.

Otro estudiante propone un modelo similar al anterior que consiste en "*multiplicar el número total de prendas elaborado por cien, y sumarle 4.000"*, cambiando de esta manera las condiciones iniciales dadas por la situación, al igual que el modelo anterior.

Estudiante (Novoa): ¿Cómo hicimos para determinar el total de plata? Fácil, si por 200 prendas le están pagando esto, que son $24.000, sea el número que sea, el número de prendas siempre se tiene que multiplicar por 100, ¿por qué por cien? Porque por cada prenda le están dando $100.

Profesora: por cada prenda, e….

Estudiante (Novoa): le dan un bono extra

Profesora: extra

Estudiante (Novoa): entonces aquí, este no es el salario total que ellos se llevan, o sea si? El salario total que ellos se llevarían en un día así no hiciera prendas seria $4.000.

Profesora: ¿por qué? No, ahí no dice eso.

Estudiante (Novoa): Sí, sí porque dice que la empresa tiene un salario especial determinado por la empresa, sí, un salario mínimo establecido por la empresa.

Profesora: Pero mira cuál es la condición para que la empresa le de ese salario (*retomo el texto y comienzo a leer textualmente*), "*Si se sabe que la producción mínima exigida por la empresa, para los operarios de máquina plana es de doscientas prendas diarias*", o sea, lo mínimo que él tiene que hacer son 200 prendas, para que le den

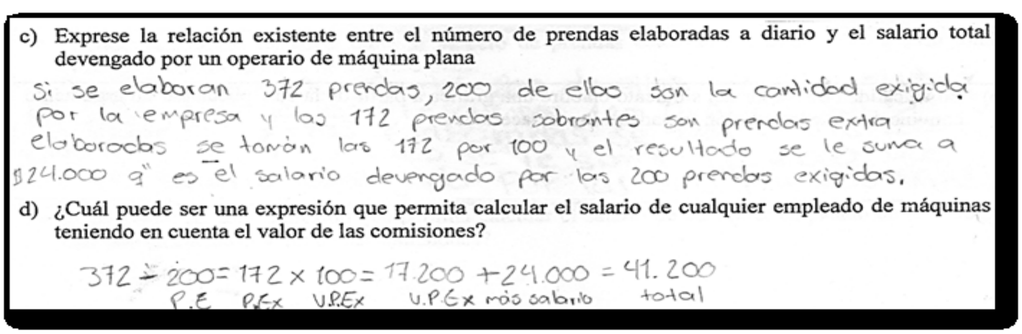
$24.000, sin no las hace no le pagan.

Estudiante (Novoa): sí, pero entonces hay llego yo, como éste [señala la cifra en la tabla con el dedo] es el número más pequeño de prendas que pueden hacer en el día y éste [señala la cifra respectiva en la tabla] es el salario menor, entonces, usted multiplica esto [señala las 200 prendas elaboradas a diario] por 100 le va a dar $20.000 más $4.000.

Figura 41. Modelo de solución elaborado por cien, y sumarle 4.000

Durante la socialización de las propuestas de solución, el estudiante reportado en el fragmento de audio, explica el procedimiento planteado, intervención que me permitió hacer cuestionamientos relacionados con el reconocimiento de las condiciones iniciales plantadas por la situación, esperando por parte de los estudiantes el reconocimiento de dichas condiciones y el planteamiento de un nuevo modelo constituido a partir de dichas condiciones. Efectivamente el estudiante reportado reelaboró un modelo diferente, en el cual consideró las condiciones iniciales planteadas por la situación.

Reconocen y establecer una relación de carácter funcional únicamente para valores específicos (Categoría 1D, 17.15%), en las cuales se evidencia que los estudiantes consiguen determinar la razón de cambio entre las variables involucradas, no obstante, la relación encontrada la expresan desde un caso en particular, explicándola como un ejemplo, lo cual se convierte en un limitante que impide trabajar en el plano de los general. Este modelo que da cuenta de una relación de carácter funcional entre las variable, permite demostrar la importancia del registro natural en los procesos de matematización. La forma en que los estudiantes constituyen y utilizan este modelo, se reconoce como un elemento fundamental dentro del proceso de matematización vertical, lo cual permite ubicar a los estudiantes de este grupo en *un nivel de compresión referencial.*



c) Exprese la relación existente entre el número de prendas elaboradas a diario y el salario total devengado por un operario de máquina plana

Si se elaboran 372 prendas, 200 de ellos son la cantidad exigida por la empresa y los 172 prendas sobrantes son prendas extra elaboradas se toman los 172 por 100 y el resultado se le suma a $24.000 q' es el salario devengado por las 200 prendas exigidas.

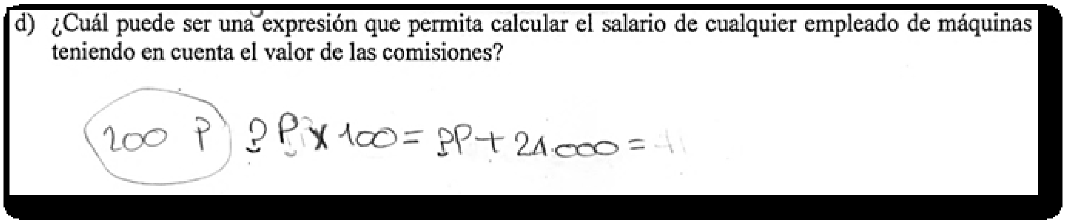
d) ¿Cuál puede ser una expresión que permita calcular el salario de cualquier empleado de máquinas teniendo en cuenta el valor de las comisiones?

372 − 200 = 172 × 100 = 17.200 + 24.000 = 41.200

P.E P.Ex V.P.Ex V.P.Gx más salario total

Figura 42. Modelo de solución propuesto por una estudiante que consigue establecer una relación de carácter funcional entre las variables a partir de un valor particular.

Este grupo recoge las producciones de los estudiantes (Categoría 1E, 54.28%) que establecen una relación de carácter funcional entre las variables involucradas y encuentran una expresión no algebraica que les permite generalizarla. En cuanto a las expresiones encontradas, se puede evidenciar que acudieron al registro natural y simbólico, apoyados fundamentalmente en un tratamiento aritmético, expresiones organizadas en el mismo orden en el que pensaron las operaciones, en las que evidentemente se desatienden algunas reglas operacionales.


d) ¿Cuál puede ser una expresión que permita calcular el salario de cualquier empleado de máquinas teniendo en cuenta el valor de las comisiones?

200 P ?P x 100 = ?P + 24.000 =

Figura 43. Modelo de solución propuesto por una estudiante que consigue establecer una relación de carácter funcional entre las variables, expresada en un registro simbólico.

Esta clase de modelos pone al descubierto elementos importantes del proceso de matematización vertical, como lo es la reflexión de algunas estrategias y procedimientos que posibilitaron la constitución de aspectos generalizables, dando lugar a un *modelo para* resolver la situación, modelo que permite ubicar los estudiantes de este grupo en *un nivel de comprensión general.*

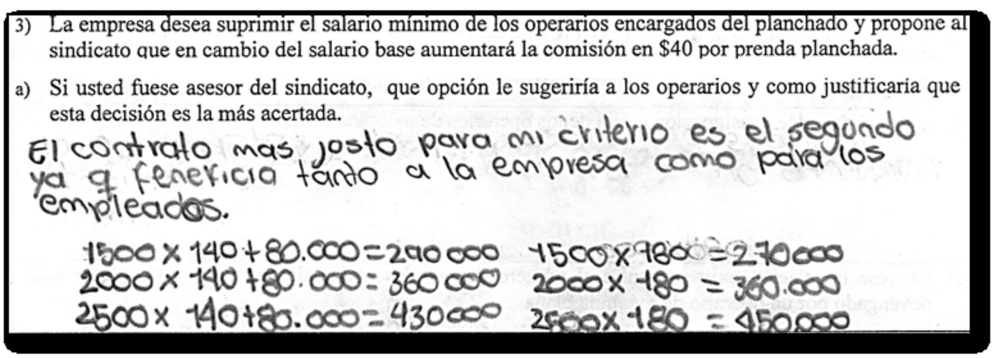
Debo resaltar que la mayoría de los estudiantes ubicados en esta categoría, plantean expresiones en las que invisibilizan alguna de las variables involucradas, y en consecuencia sus relaciones de dependencia.

Profesora: ¿Qué dice acá?
Estudiante (Alejandra R.): 200 prendas, acá este, porque es el número, mmm como el número determinado de prendas. Mientras, mientras uno escribe el número que es, el de prendas por cien, ahí está el igual.
Estudiantes: [otra integrante del equipo la contradice, dice que no se debe multiplicar por cien, y en vez de ello, debe sumarlos]
Estudiante (Alejandra R.): es por cien, yo lo hago por cien; igual, más los $24.000, y me da el resultado. Así hice estas.
Profesora: ¿Cómo lo hiciste?, digamos, ¿en dónde metiste esto en la operación?
Estudiante (Alejandra R.): ahí están las 200 prendas y acá….
Profesora: Digamos que vamos hacer mmm 360 prendas, ¿cómo lo harías?, hazlo.
Estudiante (Alejandra R.): dejo los 200 aparte
Profesora: listo, entonces no los metes en la ecuación, ¿no los metes?
Estudiante (Alejandra R.): No, por eso lo dejo ahí a un ladito. Y... ¿cuántos eran? ¿300 qué?
Profesora: 60
Estudiante (Alejandra R.): y acá, 160 por cien, igual, y el resultado que me da, más $24,000, y ahí me da. Yo lo hice así.

Figura 44. Invisibilización de algunas variables involucradas

Con respecto al segundo momento, en donde la razón de cambio entre las variables aparece explícitamente en la situación, las propuestas de solución desarrolladas por los estudiantes se organizaron de la siguiente manera:

- Estudiantes (20%) que no propusieron ningún tipo de estrategia de solución, que permitiera evidenciar el reconocimiento de la relación entre las variables involucradas en la situación.
- Estudiantes (1 D; 14,28%) que logran establecer la relación funcional entre las variables, únicamente a partir de valores específicos, que no consiguen generalizar a través de una expresión. De modo que esta producción, limitada a casos particulares, puede considerarse un *modelo de*, carente de un simbolismo matemático que permita generalizar la situación, ubicando a este grupo de estudiantes en *un nivel de comprensión referencial.* A manera de ejemplo, es oportuno mencionar la producción de un estudiante ubicado en esta categoría, quien evidentemente en el tercer punto, logra capturar en ambos casos y desde valores específicos las relaciones de dependencia entre las variables. Este planteamiento le permitió contrastar los resultados y poder tomar así una decisión frente a la situación sugerida.


3) La empresa desea suprimir el salario mínimo de los operarios encargados del planchado y propone al sindicato que en cambio del salario base aumentará la comisión en $40 por prenda planchada.

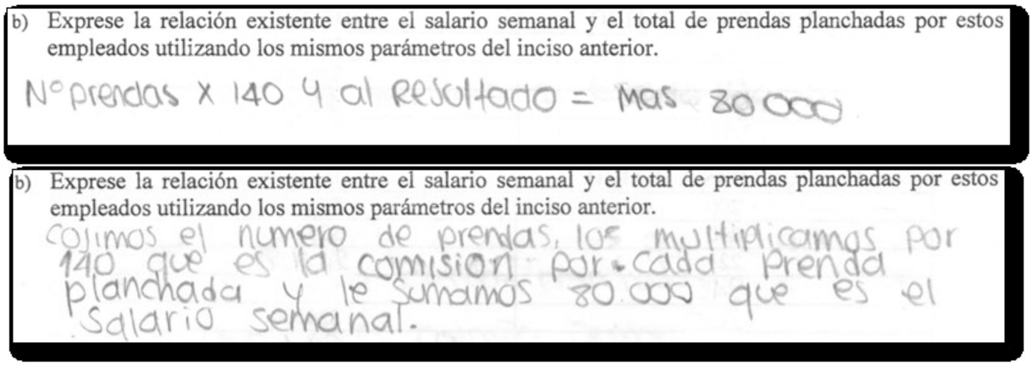
a) Si usted fuese asesor del sindicato, que opción le sugeriría a los operarios y como justificaría que esta decisión es la más acertada.

El contrato mas justo para mi criterio es el segundo ya q feneficia tanto a la empresa como para los empleados.

1500 x 140 + 80.000 = 290 000 | 1500 x 180 = 270 000
2000 x 140 + 80.000 = 360 000 | 2000 x 180 = 360.000
2500 x 140 + 80.000 = 430 000 | 2500 x 180 = 450.000

Figura 45. Modelos de solución propuestos por un estudiante que consigue establecer relaciones de carácter funcional entre las variables a partir de valores particulares.

Estudiantes (Categoría 1E; 62,85%) que consiguen constituir una relación funcional entre las variables como un modelo de la situación, reconociendo claramente la relación de dependencia entre las variables, no obstante, en el momento de escribir la relación de dependencia entre ellas, algunos de ellos, omiten una de las variables involucradas (el salario total devengado). La totalidad de los estudiantes ubicados en esta categoría, recurren al registro natural para explicar la relación encontrada, en palabras de ellos *el procedimiento*, apoyados nuevamente en una formulación básicamente operacional, lo cual permite asociarlos a *un nivel de comprensión general*, gracias a que consiguieron identificar los aspectos fundamentales asociados a la situación de variación y sintetizarlos en una expresión, que evidentemente carece de un simbolismo matemático apropiado.


b) Exprese la relación existente entre el salario semanal y el total de prendas planchadas por estos empleados utilizando los mismos parámetros del inciso anterior.

N° prendas x 140 y al Resoltado = mas 80 000

b) Exprese la relación existente entre el salario semanal y el total de prendas planchadas por estos empleados utilizando los mismos parámetros del inciso anterior.

cojimos el numero de prendas, los multiplicamos por 140 que es la comision por cada prenda planchada y le sumamos 80.000 que es el salario semanal.

Figura 46. Modelos de solución propuestos por estudiantes que consigue establecer relaciones de carácter funcional entre las variables, expresadas mediante un leguaje no algebraico.

A manera de síntesis, los estudiantes encontraron un mayor nivel de dificultad en relación con la tarea N°3, posiblemente por la extensión y variedad de relaciones de dependencia que podían deducirse de la misma, esto llevó a que muchos estudiantes no concluyeran con la actividad programada. En cuanto a la utilización de otros sistemas de representación, puedo decir que los estudiantes no reconocen en el registro gráfico una opción que les permita establecer una relación de dependencia entre las variables, situación que se complica debido a la escasa comprensión que se tiene de este registro y la utilización del mismo.

Esto sugiere el planteamiento de tareas que posibiliten el acercamiento de los estudiantes con este registro, y la conversión a otros registros. Frente a esta circunstancia fue necesario retomar la tarea en dos sesiones más en las que se posibilitaron las condiciones para que los estudiantes pudieran comprender la situación y sugerir diferentes alternativas de solución.

Evidentemente los estudiantes logran establecer con mayor facilidad relaciones de dependencia cuando el valor de la razón de cambio se da explícitamente, que cuando no se les da y debe ser calculado. Esto me permite considerar dos tipos de situaciones que deben trabajarse por separado en las próximas tareas y evitar así confusiones y desmotivación por parte de los estudiantes.

4.1.4 Tarea 4: Desprendibles de nómina.

Raquel trabaja como asesora comercial en la compañía "ELECTROHOGAR", dedicada a la comercialización de electrodomésticos. En esta compañía los ingresos de Raquel dependen de una asignación básica de $20.000 diarios, más una comisión de $5.000 por cada millón vendido.
A continuacion aparecen cuatro desprendibles de nómina de Raquel del año 2015

COMPROBANTE DE PAGO		
IDENTIFICACIÓN: 52`432.401		**PERIODO:** Del 01/10/14 al 31/10/15
NOMBRE: Raquel Guerrero		**CARGO:** Asesor Comercial
DEVENGADO		
Días trabajados	26	
NETO A PAGAR:	$ 740.000	Firma del Trabajador

COMPROBANTE DE PAGO		
IDENTIFICACIÓN: 52`432.401		**PERIODO:** Del 01/11/14 al 30/11/15
NOMBRE: Raquel Guerrero		**CARGO:** Asesor Comercial
DEVENGADO		
Días trabajados	24	
NETO A PAGAR:	$ 800.000	Firma del Trabajador

COMPROBANTE DE PAGO		
IDENTIFICACIÓN: 52`432.401		**PERIODO** Del 01/12/14 al 31/12/15
NOMBRE: Raquel Guerrero		**CARGO:** Asesor Comercial
DEVENGADO		
Días trabajados	20	
NETO A PAGAR:	$ 960.000	Firma del Trabajador

COMPROBANTE DE PAGO		
IDENTIFICACIÓN 52`432.401		**PERIODO: :** Del 01/01/15 al 30/01/16
NOMBRE: Raquel Guerrero		**CARGO:** Asesor Comercial
DEVENGADO		
Días trabajados	24	
NETO A PAGAR:	$ 640.000	Firma del Trabajador

a) *¿Cuántos millones vendió Raquel en diciembre del 2015?*
b) *¿Cuántos millones vendió Raquel en Enero del 2016?*
c) *¿Cuánto dinero devengaría Raquel en un día, si realizara ventas por un valor de $ 3 millones?*
d) *Que sucedería con su salario, si no logra vender electrodomésticos en determinado día*
e) *¿De qué depende la asignación mensual de Raquel?*

A partir del mes de febrero del 2015, Raquel fue asignada a un nuevo punto de venta, en donde debe trabajar un total de 25 días al mes

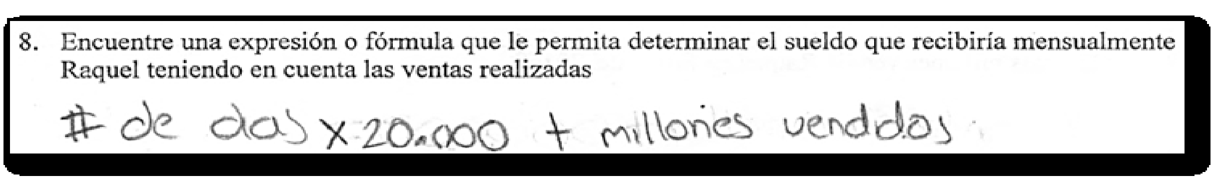
a) Si en Febrero vendió $ 49 millones ¿Cuál fue el sueldo recibido por Raquel este mes?
b) Si en marzo su sueldo fue de $ 825.000 ¿Cuántos millones vendió Raquel este mes?
c) Encuentre una expresión o fórmula que le permita determinar el sueldo que recibiría mensualmente Raquel teniendo en cuenta las ventas realizadas.

Figura 47. Tarea 4: Desprendibles de nómina

Con la tarea N°4, se pretendía en primer lugar que los estudiantes identifiquen la relación de cambio entre las tres variables involucradas, y en un segundo lugar, determinar si consiguen reconocer la variable como constante y establecer así, sus propios modelos, que les permitan determinar una relación funcional entre las variables involucradas mediante el registro algebraico. Para el desarrollo de la tarea N° 4 se les pidió a los estudiantes reunirse en los grupos de trabajo organizados la última vez, en general se observó una buena disposición de los estudiantes frente al desarrollo de la tarea. Con el fin de evitar confusiones se inicia el desarrollo de la tarea haciendo una lectura en voz alta, verificando mediante preguntas la comprensión por parte de los estudiantes de la situación planteada. El tiempo destinado para el desarrollo de la actividad fue optimizado al máximo por los estudiantes, lo cual permitió realizar la socialización del trabajo desarrollado por cada uno de los grupos en el tablero, propiciando de esta manera un rol activo de los estudiantes, quienes propusieron alternativas de solución, escucharon y validaron cada una de las propuestas de solución de sus compañeros.

Con respecto al último punto de la tarea, fue necesario intervenir mediante preguntas con el fin de evitar que los estudiantes continuaran ignorando alguna de las variables en las expresiones planteadas, como hasta el momento venía ocurriendo en las tareas anteriores, ya que encontraban una expresión simbólica pero no una expresión que permitiera relacionar las dos variables. Las propuestas de solución planteadas por los estudiantes pueden caracterizarse de la siguiente manera:

Reconocen las variables involucradas y consiguen reconocer que cambios en una variable generan cambios en otra, no obstante, establecen relaciones de carácter general que no corresponden (Categoría 1C; 14.7%). Las expresiones propuestas por los estudiantes permiten percibir el reconocimiento de una relación de dependencia entre el sueldo, los días trabajados y la cantidad de millones vendidos, no obstante los registros planteados reflejan confusiones de los estudiantes con respecto a la variable independiente, en este caso millones vendidos, y su relación directa sobre el sueldo devengado, ya que prescinden de la razón de cambio entre ellas. Algunos estudiantes ubicados en esta categoría, ignoran la condición propuesta en la situación, y continúan reconociendo y manipulando la cantidad de días trabajados como una variable que cambia y no como un parámetro establecido, percepción que se refleja en los modelos constituidos, en el cual invisibilizan una de las variables "el sueldo".

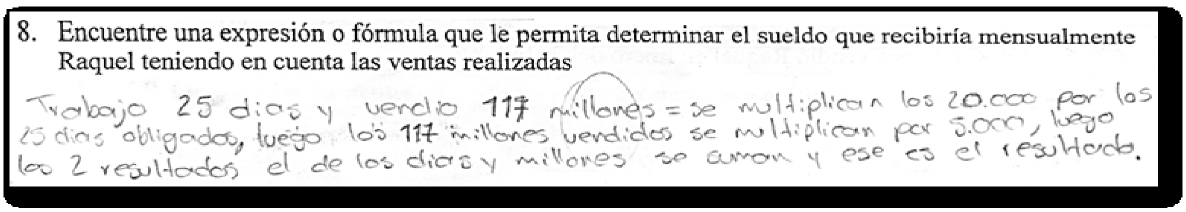

8. Encuentre una expresión o fórmula que le permita determinar el sueldo que recibiría mensualmente Raquel teniendo en cuenta las ventas realizadas

de dias x 20.000 + millones vendidos

Figura 48. Modelo de solución propuesto por un estudiante que consigue establecer una relación general entre las variables, en donde omite la razón de cambio entre ellas.

Este tipo de modelos permiten ubicar a los integrantes de este grupo en un nivel de comprensión referencial,

Establecen una relación funcional entre las variables a partir de valores específicos (Categoría 1D; 11,77%), que no consiguen generalizar a través de una expresión o fórmula. Sus planteamientos corresponde una explicación del procedimiento que se debe seguir para determinar el sueldo bajo unas condiciones establecidas por ellos mismos.


8. Encuentre una expresión o fórmula que le permita determinar el sueldo que recibiría mensualmente Raquel teniendo en cuenta las ventas realizadas

Trabajo 25 dias y vendio 117 millones = se multiplican los 20.000 por los 25 dias obligados, luego los 117 millones vendidos se multiplican por 5.000, luego los 2 resultados el de los dias y millones se suman y ese es el resultado.

Figura 49. Modelo de solución propuesto por una estudiante que consigue establecer una relación de carácter funcional entre las variables a partir de un valor particular.

Este tipo de modelos carentes de simbolismos matemáticos permite evidenciar la importancia del registro natural para expresar la relación de dependencia entre las variables, pese a que no consiguieron expresarla en un nivel general.

Establecen una relación de carácter funcional entre las variables involucradas y encuentran expresiones no algebraicas que permiten generalizar la relación encontrada (Categoría 1E, 73.53%). Indiscutiblemente este tipo de producciones permiten evidenciar representaciones simbólicas cada vez más elaboradas, en donde emergen las primeras letras empleadas para representar las variables; además, paréntesis que permitirían pensar en una necesidad por parte de los estudiantes de simbolizar el orden en el que constituyeron la relación de dependencia encontrada.

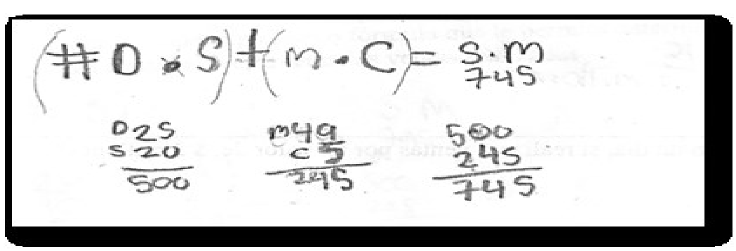


Figura 50. Modelo de solución propuesto por una estudiante que consigue establecer una relación de carácter funcional, en donde desconoce que la variable *días trabajados* adquiere un valor constante.

Aproximadamente la mitad de los estudiantes ubicados en esta categoría, consiguen identificar el valor constante que adquiere la variable *días trabajados,* valor que es registrado en las expresiones propuestas por ellos. Los estudiantes restantes continúan considerándola una variable susceptible de cambios.

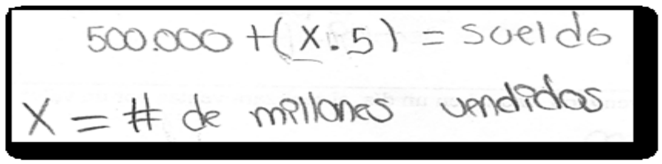


Figura 51. Modelo de solución propuesto por una estudiante que consigue establecer una relación de carácter funcional, en donde la variable *días trabajados* adquiere un valor constante.

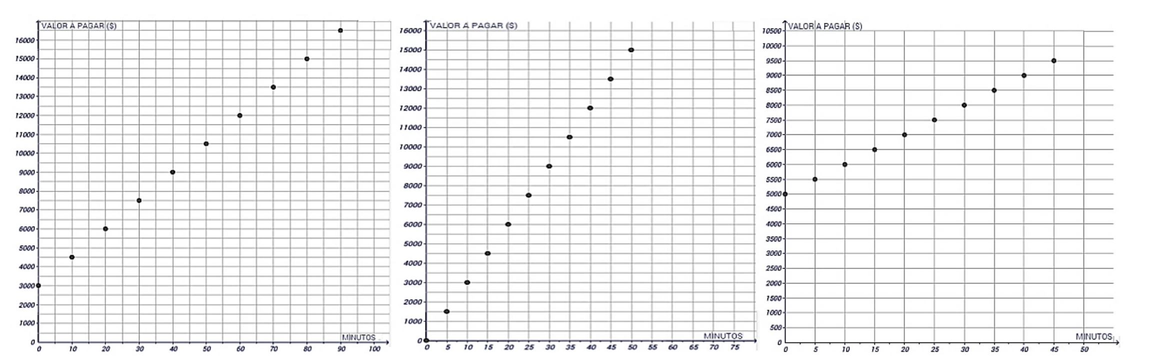
De esta manera, los estudiantes organizados en este grupo lograron constituir una expresión general como un modelo de la situación, gracias a que consiguieron reconocer las variables involucradas y su relación de dependencia y expresarla en un contexto eminentemente matemático, lo cual permite ubicarlos en un *nivel de comprensión general.*

Los resultados obtenidos al implementar la tarea N°4, me permiten confirmar una evolución respecto a las expresiones formuladas por los estudiantes, registros simbólicos en las cuales se consideran las variables involucradas y la relación funcional entre ellas, suceso que no se evidenció en tareas anteriores. Las expresiones simbólicas que proponen los estudiantes adquieren sentido y significado para ellos, evidenciando de esta manera, una evolución progresiva respecto a los modelos planteados.

La tarea N°4 posibilitó básicamente el uso de dos registros de representación y la articulación entre ellos, del registro natural al simbólico, por lo tanto es indispensable considerar otros registros de partida en una próxima tarea.

4.1.5 Tarea 5: Planes de voz.

A continuación se muestran los gráficos de algunos planes de voz de tres compañías de telefonía celular, en donde se relaciona el número de minutos y el valor a pagar. Analice cada una de esta propuestas



COMPAÑÍA TELÉFONICA Nº 1 ***COMPAÑÍA TELÉFONICA Nº 2*** ***COMPAÑÍA TELÉFONICA Nº 3***

1. *Si usted tuviera que tomar la decisión y determinar cuál de ellos es más favorable, ¿Qué plan tomaría?*

COMPAÑÍA TELÉFONICA Nº 1	
COMPAÑÍA TELÉFONICA Nº 2	
COMPAÑÍA TELÉFONICA Nº 3	

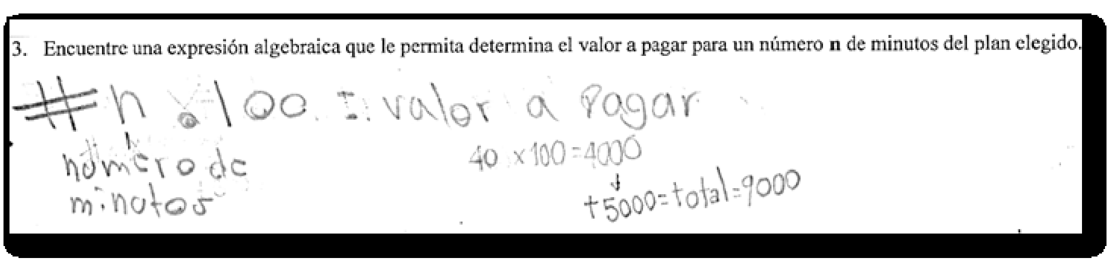
2. *¿Qué razones justificarían que el plan elegido corresponde a la decisión más acertada? Explique por qué ese y no otro.*
3. *Encuentre una expresión algebraica que le permita determina el valor a pagar para un número **n** de minutos del plan elegido.*

*Figura 52.*Tarea 5 planeas de voz

Tal y como se justificó en el tercer capítulo de esta investigación, la situación problema planteada en la tarea 5 le permitió a los estudiantes comparar algunas características visuales matemáticamente relevantes en el registro gráfico con el fin de posibilitar la conversión al registro algebraico. Esta tarea fue desarrollada por cada estudiante en los grupos de trabajo conformados con anterioridad, inicialmente se presentaron algunas restricciones en cuanto a las propuestas de solución planteadas por los estudiantes, quienes se limitaron a la información suministrada por las gráficas, sin sugerir un análisis más profundo, situación frente a la cual fue necesario intervenir haciendo algunas aclaraciones respecto a la tarea propuesta.

En lo que se refiere a las propuestas de solución planteadas por los estudiantes pueden describirse de la siguiente manera:

Consiguen reconocer y establecer una relación de dependencia de una variable con respecto a la otra, únicamente para valores específicos (Categoría 1D; 37,15%), no emplearon ningún registro que permita evidenciar la generalización de dicha relación. La totalidad de los estudiantes ubicados en esta categoría logran determinar la razón de cambio entre las variables de la opción elegida, no obstante, la relación entre las variables involucradas la establece desde valores particulares, algunos de ellos intentan describir la relación encontrada y explica las razones que les permitieron elegir la tercera compañía como la mejor opción entre los planes a elegir.


3. Encuentre una expresión algebraica que le permita determina el valor a pagar para un número **n** de minutos del plan elegido.

#n x 100 = valor a pagar

número de minutos

40 x 100 = 4000

+5000 = total = 9000

Figura 53. Modelo de solución propuesto por un estudiante que consigue establecer una relación de carácter funcional entre las variables a partir de un valor particular.

En efecto, la figura pone en evidencia el reconocimiento por parte de los estudiantes de ciertas regularidades que le permite establecer algunas relaciones numéricas entre las variables, no obstante, una dificultad con este tipo de modelos radica en que el análisis se hizo sobre un caso particular de la situación misma, y no cuenta con un análisis que permita trabajar en el plano de lo general, que permita determinar el valor que debe ser cancelado por emplear *cualquier* cantidad de minutos. Este tipo de modelos permiten reconocer elementos fundamentales dentro del proceso de matematización vertical, lo cual permite ubicar a los integrantes de este grupo en un *nivel de comprensión referencial.*

Corresponde a la producción de los estudiantes (Categoría 1E; 14,28%) que a partir del registro gráfico consigue identificar una relación de dependencia entre las variables, la cual expresan en un lenguaje simbólico no algebraico. De hecho, las expresiones propuestas por los estudiantes ubicados en esta categoría ponen de manifiesto el reconocimiento de ciertas regularidades y relaciones numéricas, que permiten evidenciar algunas dificultades que encuentran los estudiantes en cuanto al uso y significado del signo igual, ya que en algunos casos, fue interpretado como un operador encargado de separar una secuencia de operaciones, y en otros casos, fue omitido de las expresiones, razón por la cual una de las variables fue ignorada.

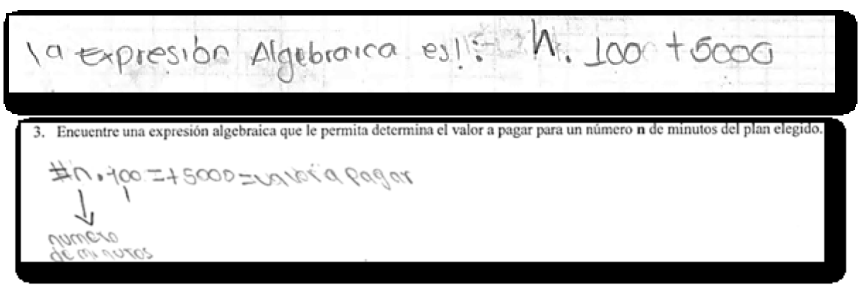


Figura 54. Modelos de solución propuestos por estudiantes que consiguen establecer una relación de carácter funcional entre las variables, expresada mediante un lenguaje simbólico no algebraico.

Lo importante de este tipo de producciones, es que evidentemente son modelos que gradualmente adquieren un carácter más general, de manera que, este grupo de estudiantes que consiguió identificar y establecer una relación de dependencia entre las variables mediante símbolos y relaciones numéricas, constituyen un *modelo para* la situación, lo cual permite ubicar a este grupo de estudiantes en *un nivel de comprensión general.*

El último grupo corresponde a la producción de los estudiantes (Categoría 1F; 51,43%) que a partir de la situación planteada, consiguieron reconocer y establecer una relación funcional entre las variables, la cual fue expresada a través del registro algebraico. Con la intensión de identificar bajo qué condiciones una opción es más conveniente que otra, algunos estudiantes ubicados en este grupo compararon los tres planes de voz en diferentes momentos, esto les permitió plantear las relaciones funcionales

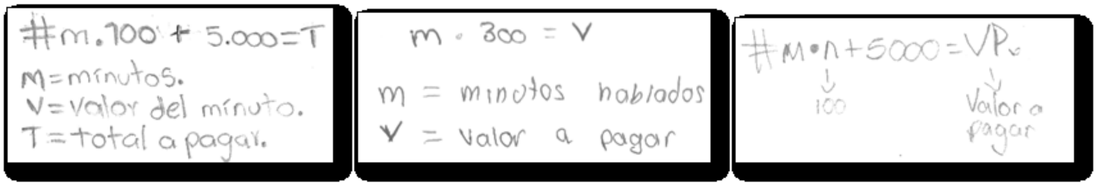


Figura 55. Modelo de solución propuesto por una estudiante que consigue establecer una relación de carácter funcional entre las variables, a través del registro algebraico.

En los ejemplo se puede observar como algunos estudiantes plantean expresiones en donde consideran la razón de cambio como una variable susceptible de cambios a pesar de conocer su valor.

Estudiante (Michel): nosotros nos pusimos a…. como analizar, digamos, usted habló 90 y en total pagó $16.000, acá habló 50 minutos y tuvo que pagar $15.000
Estudiante (Tania G): [otra integrante del equipo mismo equipo] Acá pagó 1.000 más por 40 minutos.
Estudiante (Michel): mil más por 90 minutos.
Profesora: Cuánto, ¿Cuánto?
Estudiante (Michel): mire, acá son 40 minutos más y pago solo $1000 a diferencia de este [la estudiante señala las dos primeras gráficas del problema]
Estudiante (Tania G): y acá habló menos.
Profesora: Y este [se hace referencia a la tercera gráfica]
Estudiante (Tania G.): y en este, hablo 45 minutos y le cobraron 9.500. Hay la diferencia seria de cuanto esta…, hay 9.500 entonces la diferencia seria, entonces seria tres.

Figura 56. Razón de cambio como una variable

Este tipo de producciones ponen de manifiesto la manera en que los estudiantes ubicados en este grupo identifican la relación de dependencia entre las variables y consiguen constituir una expresión general, a partir de la comparación de las características visuales de tres graficas cartesianas diferentes, lo que permite ubicarlos en un nivel de comprensión general gracias a que consiguieron reconocer a partir del registro grafico los elementos relevantes de la situación planteada y modelarlos en un contexto eminentemente matemático, por lo que es apropiado ubicarlos en un *nivel general*.

4.1.6 Tarea N° 6: Secuencias numéricas.

Observe atentamente las siguientes secuencias numéricas y responda.

a) *1, 4, 7, 10, 13,……..*

b) *3, 7, 11, 15, 19,……*

1. *El número que ocupa la posición 15 es:*
2. *Escriba una expresión algebraica que le permita calcular el n-ésimo término de la secuencia numérica dada:*

Figura 57. Tarea N° 6: Secuencias numéricas.

Inicialmente se pensó que la situación planteada en la última tarea mostraría un mayor grado de dificultad para los estudiantes, no obstante el tiempo destinado por ellos para su desarrollo disminuyó en comparación con las otras.

Las secuencias propuestas se generaron a partir de los términos generales

a) 4n – 1, con n = 1, 2, 3,…..

b) 3n – 2, con n = 1, 2, 3,…..

En términos generales las respuestas de los estudiantes permiten determinar que un (76,7%) de los estudiantes consiguen reconocer y establecer una relación de carácter funcional entre las variables involucradas. Los estudiantes ubicados en este grupo consiguieron establecer una expresión general como un modelo de la situación, mediante el cual, consiguen generalizar algunas relaciones numéricas e identificar la relación de dependencia entre las variables, la cual logran expresar mediante el registro algebraico, permitiendo ubicar a los estudiantes de este grupo en un nivel de compresión general

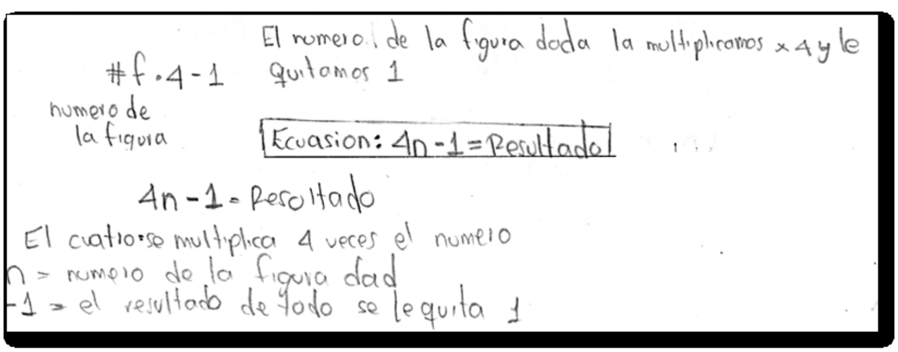
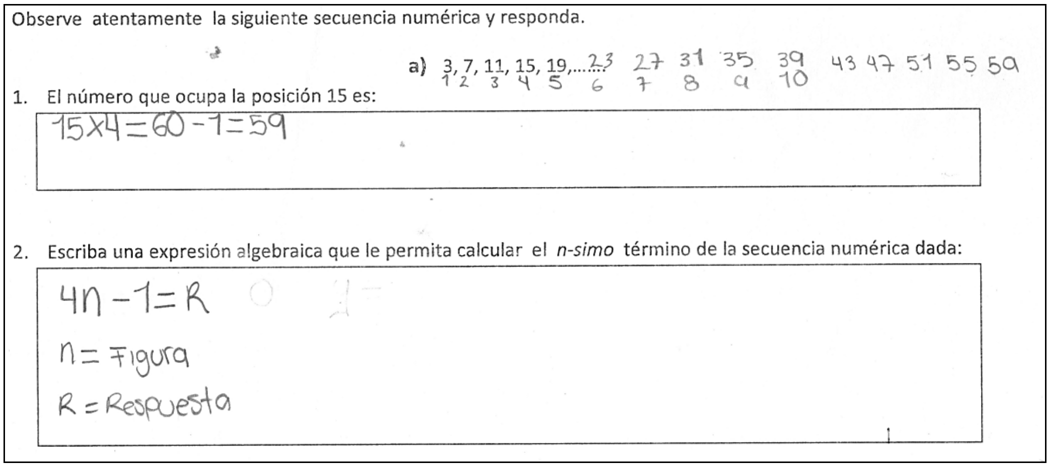


Figura 58. Modelo de solución general propuesto por una estudiante que consigue establecer una relación de carácter funcional entre las variables involucradas en la secuencia numérica.

Por ejemplo la producción de esta estudiante pone de manifiesto un avance en los niveles de comprensión donde se evidencia el paso de un *modelo de* la situación (mediante procesos recursivos continúa con la secuencia) a un *modelo para* donde plantea una expresión algebraica que permite generalizar el patrón la relación de dependencia encontrada.


Observe atentamente la siguiente secuencia numérica y responda.

a) 3, 7, 11, 15, 19,...23 27 31 35 39 43 47 51 55 59
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1. El número que ocupa la posición 15 es:

15x4=60-1=59

2. Escriba una expresión algebraica que le permita calcular el *n-simo* término de la secuencia numérica dada:

4n-1=R
n= Figura
R = Respuesta

Figura 59. Modelo de solución propuesto por una estudiante que evidencia una evolución progresiva en la misma tarea, iniciando en un nivel de comprensión referencial a uno general.

5. Resultados, conclusiones y reflexiones finales

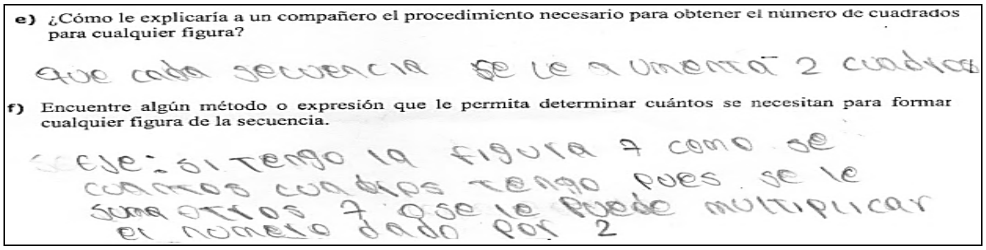
El trabajo desarrollado con los estudiantes de noveno grado, a partir del conjunto de tareas propuestas en relación con el objeto matemático función lineal y afín, permitió evidenciar la importancia de orientar actividades hacia la constitución de los objetos mentales *variable* y *dependencia*, fundamentales para la comprensión de dicho concepto.

Si bien los estudiantes contaban con ideas relacionadas con las variables, se pudo evidenciar que ellos les asignaban un significado restringido, en tanto las reconocían básicamente como expresiones estáticas, con las cuales podían realizar ciertos procedimientos. Frente a esta situación, la implementación de tareas permitió realizar un abordaje previo al trabajo simbólico con las variables, en tanto se propusieron contextos que exigían a los estudiantes percibir *qué* cambia*, cómo* se produce el cambio y posteriormente *comunicar a otros* su percepción con respecto al cambio a través de diferentes registros de representación. Esta metodología permitió a los estudiantes constituir una idea más amplia de los objetos mentales variable y dependencia, conceptos que gradualmente fueron adquiriendo significado para los educandos, pues no sólo pudieron reconocer las variables involucradas sino también establecer relaciones de dependencia entre ellas.

En cuanto a las situaciones planteadas en el conjunto de tareas, éstas mostraron su papel protagónico en relación con el trabajo desarrollado por los estudiantes, en tanto se constituyeron en puntos de partida, que permitieron proponer diversos modelos de solución, formulados desde diferentes niveles de comprensión, los cuales paulatinamente se fueron perfeccionando, mediante la reflexión e interacción entre los estudiantes y el docente.

El análisis realizado a la producción escrita de los estudiantes, durante la implementación del conjunto de tareas, permitió reconocer una evolución progresiva en los modelos de solución propuestos por los mismos, que dan cuenta de la constitución de los objetos mentales variable y dependencia. Por ejemplo, en el caso de German, sus producciones ponen en evidencia dicha evolución con respecto a la formulación de modelos de solución, propuestos desde la primera, hasta la sexta tarea.

Los modelos de solución propuestos por el estudiante para las dos primeras tareas permiten evidenciar un reconocimiento inicialmente implícito de las variables involucradas, las cuales consigue relacionar mediantes procesos recursivos, que propician la organización de las situaciones, desde casos particulares.

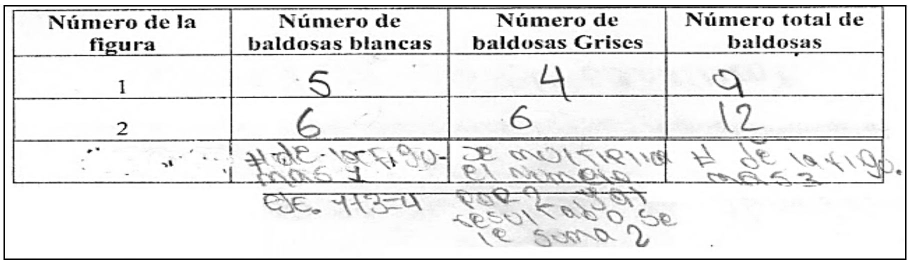

e) ¿Cómo le explicaría a un compañero el procedimiento necesario para obtener el número de cuadrados para cualquier figura?

que cada secuencia se le aumenta 2 cuadros

f) Encuentre algún método o expresión que le permita determinar cuántos se necesitan para formar cualquier figura de la secuencia.

eje: si tengo la figura 7 como se cuantos cuadros tengo pues se le suma otros 7 o se le puede multiplicar el numero dado por 2

Figura 60 Modelo de solución propuesto por German para las Tarea 1.

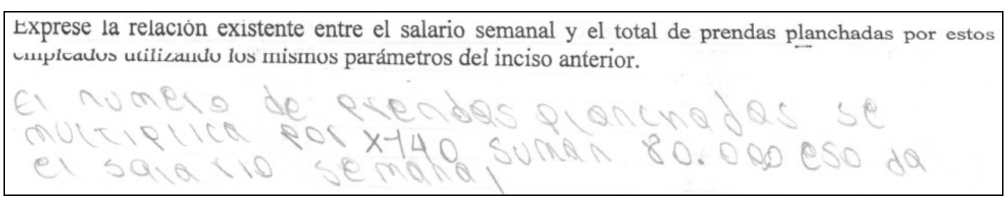


Número de la figura	Número de baldosas blancas	Número de baldosas Grises	Número total de baldosas
1	5	4	9
2	6	6	12
...	# de la figu- mas 1	se multiplica el numero por 2 y al resultado se le suma 2	# de la figu. mas 3

eje. 1+3=4

Figura 61. Modelo de solución propuesto por German para las Tarea 2.

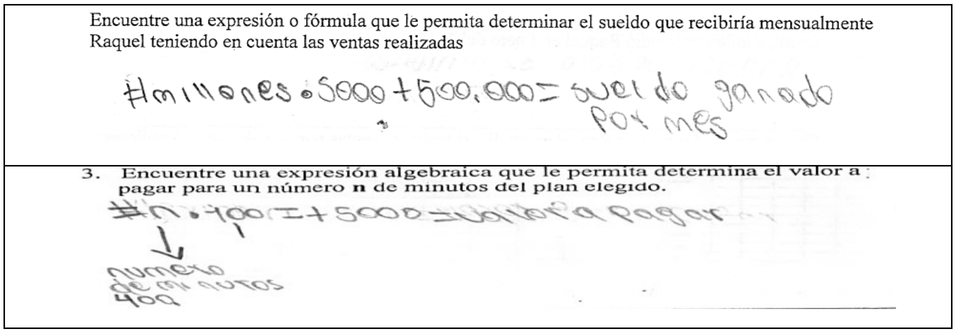
Para la tarea 3, German propone un modelo de solución en el cual se evidencia un reconocimiento explícito de las variables involucradas en la situación, entre las cuales consigue establecer una relación de dependencia, que plantea como un procedimiento que se debe seguir para determinar el sueldo devengado a partir de cualquier número de prendas, aunque aún no hace uso de un lenguaje simbólico. En este caso el estudiante recurre al registro en lengua natural para expresar la relación encontrada.


Exprese la relación existente entre el salario semanal y el total de prendas planchadas por estos empleados utilizando los mismos parámetros del inciso anterior.

el numero de prendas planchadas se multiplica por X+40 suman 80.000 eso da el salario semanal

Figura 62. Modelo de solución propuesto por German para la Tarea 3

A partir de la tarea 4, este estudiante propone modelos de solución que permiten identificar el reconocimiento explícito de las variables involucradas en cada una de las situaciones, las cuales relaciona a través de expresiones en las que emergen las primeras representaciones simbólicas que le facilitan generalizar la relación aritmética de dependencia encontrada, claro está, con algunas dificultades directamente relacionadas al registro algebraico, principalmente con la utilización del signo igual, que reconoce como un operador encargado de separar una secuencia de operaciones.



Encuentre una expresión o fórmula que le permita determinar el sueldo que recibiría mensualmente Raquel teniendo en cuenta las ventas realizadas

#millones • 5000 + 500.000 = suel do ganado por mes

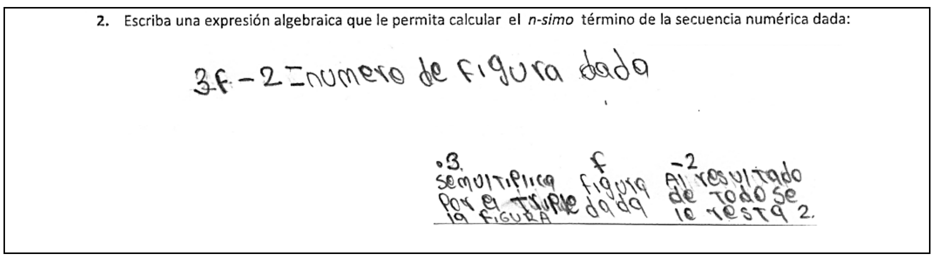
3. Encuentre una expresión algebraica que le permita determina el valor a pagar para un número **n** de minutos del plan elegido.

#n • 400 I + 5000 = valor a pagar

numero de minutos 400

Figura 63. Modelos de solución propuestos por German para las Tareas 4 y 5.

Finalmente, ante la tarea 6, German consigue explicitar la relación de dependencia entre las variables mediante el registro algebraico.



2. Escriba una expresión algebraica que le permita calcular el *n-simo* término de la secuencia numérica dada:

3f – 2 = numero de figura dado

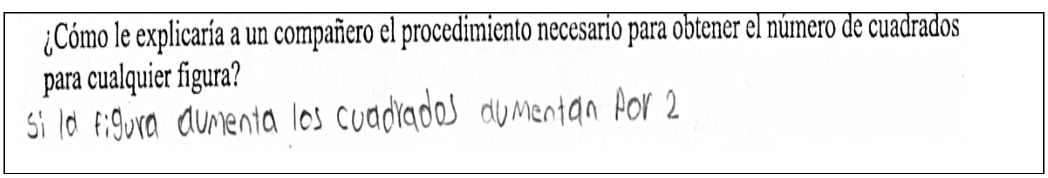
•3 se multiplica por el numero de la figura

f figura dada

–2 Al resultado de todo se le resta 2.

Figura 64. Modelo de solución propuesto por German para la Tarea 6

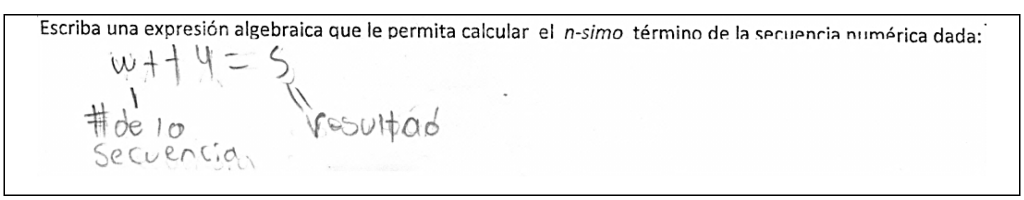
En relación con los avances logrados por el grupo de estudiantes, no todos lograron el avance esperado, como es el caso de Sebastián, quien desde un principio encontró dificultades para organizar situaciones mediante procesos inductivos en contextos eminentemente matemáticos (tareas 1, 2 y 6), los cuales insiste en organizar, a través de procesos recursivos.



¿Cómo le explicaría a un compañero el procedimiento necesario para obtener el número de cuadrados para cualquier figura?

si la figura aumenta los cuadrados aumentan por 2

Figura 65. Modelo de solución propuesto por Sebastián para la Tarea 1.



Escriba una expresión algebraica que le permita calcular el *n-simo* término de la secuencia numérica dada:

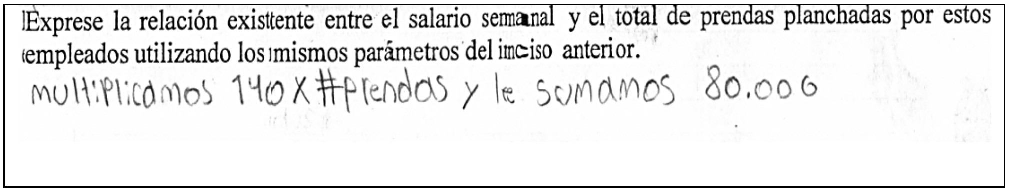
w + + 4 = s

#de la secuencia

resultad

Figura 66. Modelo de solución propuesto por Sebastián para la Tarea 6.

Sin embargo, Sebastián ante situaciones realistas, pone en juego su sentido común y diversas estrategias personales con el fin de organizar la situación propuesta, lo que le permite encontrar relaciones de dependencia para este tipo de situaciones.


Exprese la relación existtente entre el salario semanal y el total de prendas planchadas por estos empleados utilizando los mismos parámetros del inciso anterior.

multiplicamos 140 X #prendas y le sumamos 80.000

Figura 67. Modelo de solución propuesto por German para la Tarea 3.

Los resultados obtenidos al concluir la implementación de la propuesta diseñada permiten evidenciar la manera en que los objetos mentales variable y dependencia, se constituyeron a lo largo del desarrollo del conjunto de tareas; de igual manera, dan cuenta de la evolución progresiva de los modelos de solución propuestos por los estudiantes, aspecto que se evidencio, tanto en la producción escrita, como en las puestas en común que permitieron verificar y validar cada una de los propuestas formuladas.

Es importante resaltar que, aunque en un principio, se presentaron algunos inconvenientes en el trabajo en grupo, reflejados en la poca importancia que los estudiantes otorgaban a sus estrategias personales de solución y la eminente necesidad de “descifrar” y unificar sus respuestas, el desarrollo mismo de la implementación del conjunto de tareas permitió evidenciar cómo, paulatinamente, los estudiantes fueron perfeccionando dichos modelos, adquiriendo una mayor comprensión sobre sus planteamientos personales, condiciones que permitieron desarrollar un trabajo cada vez más potente en un contexto formal de las matemáticas, hasta llegar a *organizar* la matemática inmersa en la situación planteada.

En efecto, el interés de los estudiantes en proponer estrategias de solución fue aumentado progresivamente en la medida que se vinculaban con el desarrollo del conjunto de tareas, lo que propició la organización de las situaciones en modelos cada vez más elaborados; este tipo de estrategias permitió que los estudiantes asumieran un papel activo frente a su proceso de aprendizaje, lo que se pudo constatar con los avances significativos frente al proceso de constitución de los objetos mentales variable y dependencia.

Posibilitar comprensión del concepto función lineal y afín, requiere desarrollar actividades que promuevan la constitución previa de los objetos mentales variable y dependencia, con el apoyo de diferentes sistemas de representación que permita identificarlos y generalizarlos, lo cual demanda largos periodos de tiempo, que deben respetarse, con el fin de garantizar la comprensión de este objeto matemático por parte de los estudiantes.

Reflexiones finales. A manera personal, una de las mayores dificultades que enfrenté durante el desarrollo de la implementación del conjunto de tareas, fue precisamente no interferir de manera directa en los "procesos de reinvención" que desarrollaron mis estudiantes; habitualmente como docentes creemos que es indispensable direccionar y tomar el control de las dinámicas internas en el aula de clase, pues asumimos que el profesor es el encargado de indicar qué se debe enseñar, cómo se debe aprender, en qué momento debe darse el aprendizaje, sin reconocer que los estudiantes cuentan con habilidades que les permiten realizar "actividades matimatizadoras" o hacer matemáticas, las cuales en muchas ocasiones subestimamos.

Considero que el alcance de la propuesta puede mejorarse, si se tiene en cuenta la importancia de desarrollar el pensamiento variacional desde los primeros grados de escolaridad, ya que es un pensamiento que debe fortalecerse y enriquecerse con el tiempo, que en este caso en particular, no fue abordado y desarrollado adecuadamente por los estudiantes de noveno grado, constituyéndose en un obstáculo que impidió obtener mejores resultados.

A partir de mi experiencia frente al trabajo desarrollado con el conjunto de tareas, considero oportuno realizar algunas modificaciones a éstas, orientadas a mejorar el impacto de la implementación, que consisten en reestructurar las tareas 2 (Baldosas) y 3 (Prendas y salarios), teniendo en cuenta los resultados obtenidos con estas tareas.

En relación con la tarea 2, considero que generó un impacto positivo en los estudiantes, la cual pudo haberse aprovechado más, de haber involucrado valores diferentes en la tabla (en diferente orden) que permitieran a los estudiantes analizar a fondo la relación de dependencia entre las variables, y no quedarse con la percepción de que la variación se produce de uno en uno, de dos en dos y de tres en tres, que resulta al completar los valores sugeridos en la tabla. Además, considero oportuno incluir una pregunta que posibilite en los estudiantes, explicar el método o procedimiento que permita determinar la cantidad de baldosas para cualquier número de figura, en cada uno de los casos; adicional a esto, incluiría otro ítem en el que se les pida representar cada una de las relaciones encontradas a través del registro gráfico, registro frente al cual inicialmente reportaron serias dificultades.

En cuanto a la tercera tarea, considero que es pertinente desarrollarla como una de las actividades finales de la implementación, esto debido a su alto nivel de complejidad. Otra alternativa a tener en cuenta, es la posibilidad de ajustarla en dos tareas diferentes, una donde la razón de cambio no se de manera explícita y deba ser calculada siguiendo las orientaciones del enunciado y de la tabla; y otra, donde la razón de cambio esté dada explícitamente en la situación, esto con el fin de evitar confusiones por parte de los estudiantes.

Referencias

Bressan, A. & Gallego, M. (2011). La Educación Matemática Realista: Bases teóricas. *III congreso nacional de matemática y problemáticas de la educación contemporánea*. Argentina: Catamarca.

Bressan, A., Zolkower, B. & Gallego, M. (2004). *La Educación Matemática Realista: Principios en que se sustenta.* Argentina: Escuela de inverno en Didáctica de la Matemática

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S. & Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista: Bases teóricas. Bariloche (Argentina): Grupo Patagónico de Didáctica de las Matemáticas*. Recuperado de: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf

Duval, R. (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Forma Superiores del Desarrollo Cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle (Original de 1999).

Duval. R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME,* 9, 143-168.

García, G., Serrano, C. & Camargo, L. (1998). *Una propuesta curricular para las nociones de función como dependencia y la proporcionalidad como función lineal. Cuadernillo didáctico*. Bogotá: IDEP.

Gutiérrez, S. I. (2007). *Caracterización de tratamientos y conversiones: el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones.* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá (Colombia).

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a las funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1,* 5-21.

Henao, S. & Vanegas, J. (2012). *La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadrático* (Trabajo de pregrado). Universidad del Valle. Cali (Colombia).

Hopkins, D. (1989). *Investigación en el Aula, Guía del profesor*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

León, J. & Vergel, R. (1997). *Enseñanza del concepto de Función lineal en octavo grado de educación Básica Secundaria. Reporte de una experiencia.* (Tesis de especialización). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá (Colombia).

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Bogotá: MEN. Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co /html/productos/1685/articles-113759_archivo.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ospina García, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal.* Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias. Universidad Autónoma de Manizales, Caldas, Colombia.

Peralta García, J. X. (2002). *Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal*. Sonora, México: Instituto Tecnológico de Sonora

Pérez Serrano. G. (1994). *Investigación cualitativa I. Retos e interrogantes; Métodos* (6ª ed). Madrid: La Muralla.

Planchart, M. (2000). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función* (Tesis Doctoral).Universidad Autónoma del estado de Morelos. Cuernavaca, México.

Posada, B., & Villa, J. (2006a). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional* (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Posada, B., & Villa, J. (2006b). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. En Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia & Universidad de Antioquia (Ed.), *Módulo 2: Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico.* (pp.127-163). Recuperado de http://www.galileodidacticos.com/sites/default/files/M%C3%93DULO %202%20PENSAMIENTO%20VARIACIONAL.pdf

Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori / ICE.

Rey, G., Boubée, C., Sastre-Vázquez, P. & Cañibano, A. (2009). Ideas para enseñar, aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Revista iberoamericana de educación matemática, 20*, 153-162.

Ruiz-Higueras. L (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada. Granada (España).

Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1-36

Santamaría, F. (2006). *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda,* (Tesis de maestría). Universidad Nacional del Comahue. Neuquén (Argentina)

Sastre-Vázquez, P., Rey, G. & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de educación matemática,* 16, 2-16

Wilhelmi, M.R., Godino, J.D., & Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En MT. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega, (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 573-582). Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Zolkower, B.; Bressan, A. & Gallego, F. (2006). La corriente realista de didáctica de la matemática: experiencias de aula de profesores y capacitadores. *Yupana Revista de Educación Matemática.* Recuperado de: https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/ . Yupana/article/download/247/333