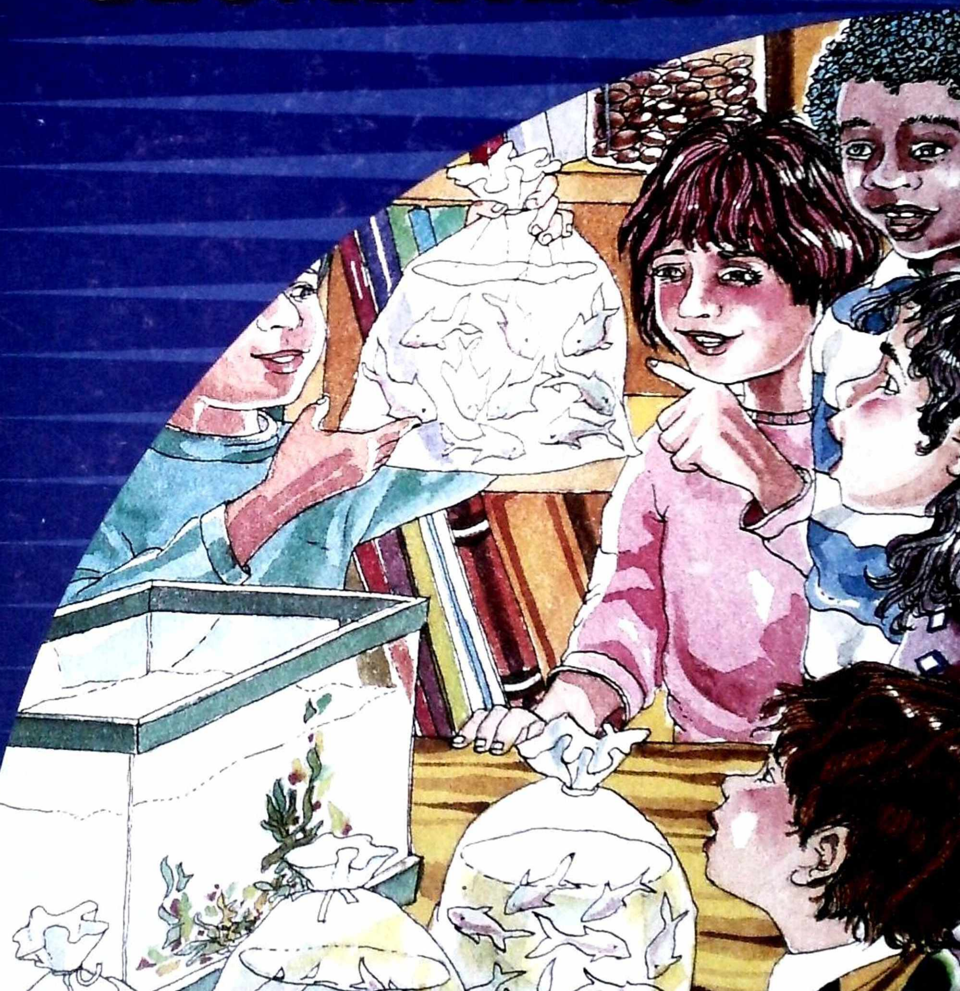
SERIE GUÍAS

por la Bogotá que Queremos

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL Y GEOMÉTRICO



ALCALDIA MAYOR
SANTA FE DE BOGOTA D.C.

Secretaría
EDUCACION

por la
Bogotá que
Queremos

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL Y GEOMÉTRICO

PROYECTO EVALUACIÓN COMPETENCIAS BÁSICAS

Material de apoyo al trabajo de los docentes

ÁREA DE MATEMÁTICAS

ALCALDIA MAYOR
SANTA FE DE BOGOTA D.C.
Secretaría
EDUCACION

Noviembre de 1999

ENRIQUE PEÑALOSA LONDOÑO
Alcalde Mayor de Santa Fe de Bogotá

CECILIA MARÍA VÉLEZ WHITE
Secretaria de Educación Distrital

NOHEMY ARIAS OTERO
Subsecretaria Administrativa

JESÚS MEJÍA PERALTA
Subsecretario Académico

SYLVIA ESCOVAR GÓMEZ
Subsecretaria de Planeación y Finanzas

JUANA INÉS DÍAZ TAFUR
Directora de Fomento a la Calidad de la Educación

Textos de Lenguaje: Rosa Julia Guzmán Rodríguez
Textos de Matemáticas: Marina Ortiz Legarda
Integrante de la Asociación Anillo de Matemáticas
Edición: Marta Osorno Reyes
Coordinación Editorial:
Corporación para el Desarrollo de la Educación Básica
CORPOEDUCACIÓN
Diseño y Armada electrónica: Patricia Montaña Domínguez
Ilustración cubierta: Elías Taffur Miranda
Ilustración: Patricia Montaña Domínguez

Primera edición 10.000 ejemplares
Santa Fe de Bogotá, noviembre de 1999

Tabla de Contenido

Presentación

La Secretaría de Educación Distrital, en su plan sectorial para el período 1998 - 2001, se propone mejorar los resultados de la acción educativa, definidos en términos de las competencias y valores que se espera desarrollen todos los estudiantes durante su paso por las instituciones educativas.

Como parte de este propósito, realizó una evaluación censal de competencias básicas en Lenguaje y Matemáticas, aplicada a los estudiantes de tercero y quinto grados de educación básica del Distrito Capital, en el segundo semestre de 1998. La Universidad Nacional de Colombia tuvo a cargo la orientación académica de este proceso.

Los resultados de esta evaluación permitieron identificar algunos aspectos que requieren un mayor trabajo en las escuelas, tanto en el área de Lenguaje como en el área de Matemáticas.

El material que se presenta en esta colección de módulos aporta elementos de las dos áreas mencionadas, y tiene como propósito apoyar el trabajo de los docentes, con el ánimo de contribuir así en el mejoramiento de la educación.

Este material está constituído por cinco módulos para el área de Lenguaje y cinco para el área de Matemáticas, que trabajan los siguientes aspectos:

- Una reflexión general sobre la temática que aborda el módulo.
- Unos aportes conceptuales que ayudan al maestro a una mejor comprensión de la situación y le dan la posibilidad de generar actividades propias en su aula.
- Unas sugerencias para trabajar con sus alumnos, que incluyen tanto la exposición de ideas, como la presentación de actividades concretas que pueden ser utilizadas directamente por los profesores con sus alumnos.
- Unas reflexiones, presentadas en forma de taller para los docentes, con el propósito de que sean compartidas en grupo, enriquezcan la discusión sobre cada tópico y generen la búsqueda de alternativas realizables en cada escuela.
- Unas sugerencias bibliográficas, para apoyar el estudio de los docentes sobre cada tema.

Las secciones presentadas en cada módulo se complementan mutuamente, y tienen la intención de aportar elementos en la construcción del discurso pedagógico necesario para sustentar las prácticas educativas particulares de cada institución escolar. Se trata además, de propuestas didácticas que pueden ser implementadas con los recursos que las instituciones educativas oficiales poseen, por lo que es de esperarse que su aplicación y seguimiento se den en la perspectiva de mejorar los resultados que nuestros estudiantes están presentando en el momento.

Los temas desarrollados en cada uno de los módulos son los siguientes:

Lenguaje

1. Producción de textos
2. Comprensión de lectura
3. La escritura y la escuela
4. La lectura y la escuela
5. La comunicación

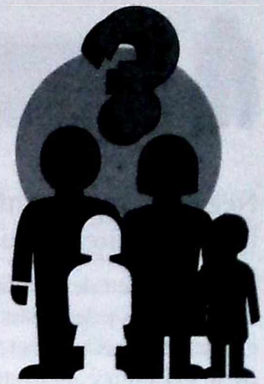
Matemáticas

1. Manejo de códigos matemáticos
2. Sistemas de numeración con valor posicional
3. Solución de problemas con estructuras aditiva y multiplicativa
4. Solución de problemas que requieren inferencias lógicas
5. Desarrollo del pensamiento espacial y geométrico

Otro propósito de los módulos es el de someter a la consideración de los docentes una(s) forma(s) de orientar la actividad didáctica, que han dado resultados exitosos en procesos investigativos, con el fin de proporcionar otros referentes, otros puntos de vista, que enriquezcan la discusión y amplíen los horizontes de comprensión de la complejidad del acto pedagógico, pero que también contribuyan a lograr resultados de mayor calidad en las áreas de Lenguaje y de Matemáticas.

El logro del anterior propósito podrá establecerse en la medida en que ocurran, como resultado de la distribución del material, las siguientes situaciones:

- El material sea recibido efectivamente en las instituciones educativas.
- Su contenido sea objeto de lectura y análisis cuidadoso por parte de los docentes y demás integrantes de la comunidad educativa interesados en su contenido y funcionalidad.
- Los docentes decidan experimentar en las aulas, como parte del Proyecto Educativo Institucional, las propuestas didácticas contenidas en los distintos módulos.
- El proceso de experimentación esté acompañado permanentemente por el intercambio de las experiencias particulares, en reuniones de área o en consejos de maestros.
- Los grupos de docentes compartan su experiencia con colegas de otras instituciones.
- Se comience el diseño de categorías de análisis que permitan establecer si los nuevos resultados son o no de mejor calidad que los anteriores.
- Se comunique a la Secretaría de Educación algunos de los resultados obtenidos con los estudiantes, tanto en lo afectivo como en lo cognitivo.



Reflexión

Relación lenguaje natural - lenguaje formal en la construcción del conocimiento matemático

La reflexión acerca de la relación entre lenguaje natural y lenguaje formal se aborda como uno de los temas que pueden considerarse transversales al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. En el caso particular del desarrollo del pensamiento espacial y geométrico, según se muestra durante el desarrollo de la propuesta didáctica, el acceso al lenguaje simbólico de las matemáticas está mediado por los **acuerdos** del grupo acerca de la notación formal que se va a adoptar para cada situación específica (cómo se nombra una recta, un punto, un segmento, un ángulo, etc.). Sin embargo, la **construcción de significado** para el lenguaje formal adoptado se apoya ineludiblemente en la simbología creada por la ciencia matemática para tal fin; es decir, no puede tratarse de un lenguaje arbitrario o desconectado de lo que proponen las matemáticas como sistema formal.

Por otra parte, la reflexión que aquí se propone se ubica en la perspectiva de lo que la evaluación de competencias básicas en matemáticas denominó **adquisición de códigos**, puesto que se apunta a la comprensión de una parte importante de dicha adquisición: el significado y sentido que dan los alumnos a los códigos de las matemáticas, los cuales dependen de la naturaleza del proceso didáctico desarrollado con ese propósito.

El acceso al lenguaje formal (o simbólico, o numérico) de las matemáticas es otro aspecto importante en la discusión acerca del sentido que tiene su aprendizaje para los alumnos.

Uno de los argumentos que más se escuchan plantea que las **dificultades** y la **apatía** que presentan los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas se deben al hecho de que los niños pequeños son introducidos, de una manera drástica en el manejo de símbolos numéricos y diagramas lógicos, sin desarrollar con anterioridad procesos que permitan construir y dar significado a los símbolos y diagramas que el maestro presenta. Este primer acceso mecánico y no razonado a las formas de simbolización del conocimiento matemático se mantiene a lo largo de la educación básica y media y aun en la educación superior.

La reflexión que se propone en el presente módulo se refiere a dos ámbitos de la problemática del lenguaje de las matemáticas:

- Negociación de significados del lenguaje matemático.
- Relación entre lenguaje y pensamiento.

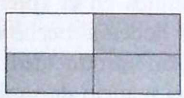
Negociación de significados en el lenguaje matemático

La negociación de significados de las palabras desconocidas y de los símbolos que se emplean en matemáticas se refiere a la aceptación, por parte del grupo, de lo **que quiere** decir cada palabra o cada símbolo nuevo, lo cual requiere de la elaboración de **acuerdos** que permitan construir sentido a las nuevas expresiones.

Una de las formas de lograr acuerdos en el aprendizaje del lenguaje de las matemáticas es ubicar el momento inicial en el **lenguaje natural** (apoyado en formas de representación gráfica) y, a través de un proceso de transformación de términos, cuyo significado se va haciendo explícito, acceder gradualmente al **lenguaje formal** o artificial–simbólico.

Algunos ejemplos:

a. Para el concepto de fracción en su acepción más común:



En la gráfica, se han sombreado tres de las cuatro partes iguales en que está dividida el área del rectángulo.

Se han tomado 3 partes de 4 partes.

Se han tomado 3 cuartos (porque cada parte se llama cuarto).

Se han tomado 3 de 4.

Se han tomado $\frac{3}{4}$

Es decir, en la gráfica está representada la fracción $\frac{3}{4}$

El camino recorrido en el ejemplo está atravesado por la negociación de los significados de situaciones y expresiones como:

- El número de partes en que se divide la unidad se llama **denominador**, porque es el que denomina o pone nombre a cada parte; es decir, el nombre de cada parte depende del total de partes. Si el total de partes es 6, cada una **se llama** sexto; si el total de partes es 3, cada una **se llama** tercio, si el total de partes es 4, cada una **se llama** cuarto, etc.
- El número de partes que se toman se llama **numerador** porque es el que **cuenta** o **numera** las partes que se toman.
- En **matemáticas**, esa situación se expresa colocando el numerador sobre el denominador separados por una línea, que en algunos casos se dibuja horizontal y en otros casos oblicua.

Una situación similar se podría describir para los casos en que la fracción se considera como operador, como relación, como cociente o como porcentaje.

b. Cuando se enuncian o se definen las propiedades de la adición de números naturales (en 5° grado):

De la serie de ejemplos,

$8 + 0 = 8$

$13 + 0 = 13$

$0 + 28 = 28$ ...

los alumnos generalizan la situación como: *Si a un número se le suma el cero, el resultado es el mismo número.* (Se trata de una expresión en lenguaje natural que es comprendida por todos los alumnos, si estuvo antecedida de una buena cantidad de ejemplos que permitieran la generalización).

Primer acuerdo:

¿De qué clase de números estamos hablando? (de números naturales).

¿De todos o de algunos? (de todos).

Para expresar lo anterior, **en matemáticas** se dice: para todo número que pertenece al conjunto de los números naturales, se cumple que al sumarle 0, da como resultado el mismo número. (Expresión en lenguaje natural que incluye palabras o términos propios del lenguaje de las matemáticas: **para todo, se cumple que, pertenece).**

Segundo acuerdo:

Las palabras que aparecen en el enunciado anterior pueden reemplazarse por algunos símbolos de la siguiente manera:

Para todo: $\forall$

Un número natural: **a** (o cualquier letra minúscula)

Pertenece: $\in$

Conjunto de números naturales: **N**

Se cumple que:

Por lo tanto, la expresión "*Para todo número que pertenece al conjunto de números naturales (o para todo número natural) se cumple que al sumarle el 0, el resultado es el mismo natural*, se convierte en:

$\forall a \in N: a + 0 = a$

Según se muestra en los dos ejemplos, sí es posible, por lo menos en algunos casos, propiciar la construcción de sentido para el lenguaje simbólico que se emplea en las matemáticas, evitando introducir a los alumnos, sin fórmula de juicio, en el ámbito puramente formal, lo cual les representa un sin sentido que es rechazado por la mayoría, por inoperante e inútil.

La propuesta didáctica que se desarrolla en el presente módulo está relacionada con el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico, y muestra también situaciones en las que el manejo de símbolos está precedido de acuerdos y construcción conjunta de significados.

Relación entre lenguaje y pensamiento matemático

La relación entre lenguaje y pensamiento, dos pilares del conocimiento humano, adquiere importancia fundamental en la gestación de procesos que permiten construcción de conocimiento matemático. Tal relación debe abordarse desde la necesidad de facilitar al interior de la clase de matemáticas el cumplimiento natural y espontáneo del proceso que permite la actividad intelectual en los alumnos, lo cual los conduce a la formación de conceptos y al desarrollo de un pensamiento verbal lógico-abstracto.

Por ejemplo, cuando se quiere trabajar con los alumnos en el concepto de área y la manera más fácil de calcular valores, en lugar de partir de una fórmula generalizada como $b \times h$, para el caso del rectángulo, sería conveniente partir de la actividad de recubrimiento de éste con unidades cuadradas. Una vez han realizado suficientes actividades, los mismos alumnos llegan a deducir que hay un determinado número de unidades cuadradas (ubicadas sobre uno de los lados que acuerdan llamar base); que se repite otro número determinado de veces que dependerá de la magnitud del otro lado (que acuerdan llamar altura).

El planteamiento de Alexander Luria en su obra "Lenguaje y pensamiento", según el cual a partir de los 8 años el niño supera el marcado carácter externo de su lenguaje y lo reemplaza por un "quedo lenguaje interior que constituye la base de su acto intelectual", permite reconocer la importancia de propiciar en las clases el accionar espontáneo y libre sobre objetos y hechos reales, a fin de que los alumnos tengan oportunidad de orientarse en la situación visoespacial de que se trate y, empleando lógica y lenguaje propios, logren la orientación mental previa que los conduzca a una solución requerida. Aceptando que **pensar** es una forma de orientación en el mundo, cabe la pregunta: ¿Qué es lo característico del pensamiento humano? La respuesta inmediata es: su carácter **conceptual** inseparablemente ligado al lenguaje como sistema de símbolos; dicho de otra manera, el desarrollo de conceptos está íntimamente relacionado con el desarrollo del lenguaje tal como se vio en el ejemplo del área del rectángulo.

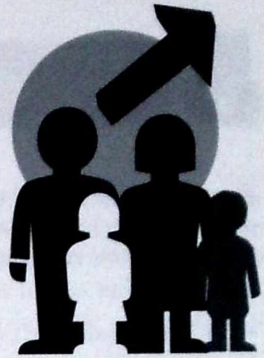
En un desarrollo intelectual armónico se presenta primero una actuación o comportamiento concreto basado en la percepción de realidades a nivel situacional: en este contexto, las posibilidades de conocimiento del sujeto se ubican también allí, es decir, no se producen acciones de tipo mental. La actuación o modo de comportamiento intelectual que se presenta posteriormente, supera esta inmediatez y permite las generalizaciones. Si al interior de la clase se facilitan estos procesos, se irá logrando poco a poco la superación de la acción directa y por lo tanto, relaciones del esquema mental ya no con situaciones concretas, sino con elaboraciones y abstracciones. Además, se vivenciará cotidianamente el diálogo consigo mismo que significa **pensar** y el uso del lenguaje en su acción recíproca con la elaboración de ideas o conceptos.

Por lo tanto es necesario, **también en la clase de matemáticas**, estimular constantemente el desarrollo del lenguaje como posibilidad de expresión y de comunicación. Después de desarrollar un ejercicio, resolver un problema, observar un gráfico, observar las características de una figura geométrica o leer un texto, es necesario propiciar en forma paulatina la expresión oral y escrita de pensamientos elementales a través de enunciados simples, para alcanzar luego niveles discursivos cada vez más elevados, que permitan la formulación de cualquier reflexión o punto de vista.

Todo ello dirigido tanto al ejercicio de la argumentación discursiva como a la necesaria práctica de la escritura, única forma de objetivar, de colocar en el "afuera" aquello que se piensa, aquello en lo que se cree. Lo anterior debe constituirse en una de las prácticas escolares fundamentales en lo que se refiere a la aceptación o rechazo de soluciones, sin que por ello se afirme que no tenga validez la solución presentada por quien no defiende discursivamente sus propuestas.

Una herramienta didáctica de gran poder, y que favorece el desarrollo de los procesos que hasta aquí se han descrito, es la **realización verbal**, a través de la cual los alumnos ponen en las palabras, en forma oral o escrita, todos las acciones de orden físico o mental que cumplieron para resolver un problema, para realizar un gráfico, para resolver un ejercicio, para cumplir una tarea o evento determinado. La **realización verbal de las acciones de aprendizaje** forma parte de la propuesta de la psicología soviética (Talizina, 1988) según la cual su práctica permanente permite la interiorizacion de la acción, logrando que la acción cambie su carácter externo por el carácter interno o mental.

APORTE CONCEPTUAL



IMPORTANCIA DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL

El pensamiento espacial, que constituye un componente esencial del pensamiento matemático, está referido a la percepción, intuitiva o racional, del entorno propio y de los objetos que hay en él. El desarrollo del pensamiento espacial, asociado a la interpretación y comprensión del mundo físico, permite desarrollar interés matemático y mejorar estructuras conceptuales y destrezas numéricas.

Varios de los analistas de la problemática relacionada con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas coinciden en afirmar que las personas enfrentan, en la vida diaria, muchos más problemas relacionados con el manejo de relaciones espaciales, geométricas y métricas, que los que tienen que ver con las competencias numéricas.

En efecto, en la vida cotidiana fecuentemente es necesario, tomar decisiones acerca de situaciones como:

- Tamaño de unos muebles, de modo que resulten acordes con el tamaño de una habitación.
- Cálculo o estimación de la distancia entre dos puntos.
- Cantidad de cada uno de los ingredientes de un alimento, según sea el número de porciones que se desean preparar.
- Cantidad de papel, de cartulina, de cartón paja o de cualquier otro material, necesaria para realizar un determinado trabajo.
- Si el espacio disponible en un parqueadero es suficiente para estacionar un vehículo.

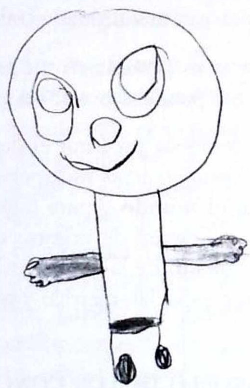
Se trata entonces de procurar el desarrollo de un tipo de competencias indispensables para **moverse en el mundo** y para lograr la comprensión y valoración de nuestro entorno, lo cual será resultado de la aprehensión de relaciones de tipo espacial, métrico y geométrico.

DESARROLLO DE LOS CONCEPTOS ESPACIALES

En el ámbito del desarrollo del pensamiento espacial, Piaget hizo aportes importantes en relación con la forma como los niños desarrollan conceptos espaciales.

Según las investigaciones de Piaget, la construcción del espacio se inicia a los 11 o 12 meses de edad, siendo las primeras intuiciones espaciales de tipo topológico, es decir, las que tienen que ver con propiedades globales independientes de la forma y el tamaño. Estas propiedades son, para el investigador, las siguientes (explicadas con el ejemplo del dibujo de un hombre):

- Cercanía (proximidad); dibujar los ojos juntos.
- Separación; no dibujar la cabeza y el tronco traslapados.
- Ordenación; dibujar la nariz entre los ojos y la boca.
- Cerramiento; dibujar los ojos dentro de la cabeza.
- Continuidad; los brazos se dibujan a continuación del tronco y no de la cabeza.



Dibujo de un hombre realizado por un niño de cuatro años.

Después de las propiedades topológicas los niños distinguen, según Piaget, las propiedades **proyectivas,** con lo cual desarrollan la capacidad para predecir el aspecto que tendrá un objeto según el lado por el que se le mire. Por ejemplo, un lápiz visto desde un extremo se verá como un círculo, mientras que una mesa vista desde arriba se puede ver como un rectángulo.

En tercer lugar, los niños acceden a la comprensión de las propiedades de tipo **euclídeo** que son las relativas a tamaños, formas y direcciones, que conducen a la formación de conceptos de perímetro, área, volumen, ángulo, polígono, etc. (Dickson Linda y otros, *El aprendizaje de las matemáticas,* pág. 23 y 24).

De todas maneras, algunas investigaciones han mostrado que la secuencia topológica– proyectiva – euclídea, propuesta por Piaget, no siempre se da en esa forma sino que, aunque es probable que algunos conceptos topológicos se desarrollen al principio, otros como el de equivalencia topológica sólo se desarrollan más tarde, después de haber sido comprendidas otras ideas de tipo euclídeo.

El siguiente es un ejemplo de figuras con equivalencia topológica:

Tomado de SPM, libro B, 1971.

El escarabajo, el árbol de Navidad y el burrito son equivalentes topológicamente, porque aunque tienen formas diferentes, las relaciones entre uniones, líneas y regiones son las mismas: los tres están formados por dos regiones cerradas, contigua una de la otra, y tienen ocho líneas o trazos que sobrepasan el contorno de las regiones.

Niveles de Van Hiele

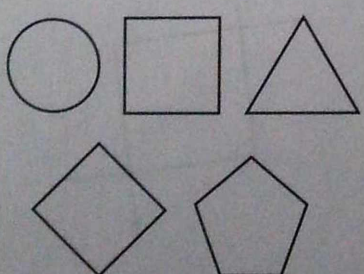
Otra propuesta de comprensión de las etapas de desarrollo de pensamiento espacial es la que se conoce como los Niveles de Van Hiele que, en forma resumida, plantea lo siguiente:

Nivel 1

Cuando los niños están en este nivel, distinguen las figuras como un todo por sus formas; no detectan relaciones entre las diferentes formas, ni entre las partes o componentes de las formas individuales. Este nivel corresponde más o menos a la edad de 6 años. Los niños pueden **reconocer** y **reproducir** cuadrados, paralelogramos, rectángulos, rombos y pueden memorizar sus nombres; sin embargo, no relacionan un cuadrado con un rombo o éste con un paralelogramo, es decir, el reconocimiento de las figuras es puramente visual.

Por ello, las actividades que algunos estudiosos de la obra de Van Hiele proponen para este nivel son del siguiente tipo: (citadas por Dickson L. y otros, en: *El aprendizaje de las matemáticas*, pág. 30 y ss.)

- Identificar figuras geométricas al tacto.
- Dibujar las figuras o representarlas con palillos.
- Construir, en diferentes tamaños, objetos sólidos en tres dimensiones y mantenerlos a mano (cubos, conos, cilindros, esferas, cajas rectangulares, prismas, pirámides, ...).
- Clasificar figuras por su forma.
- Coleccionar polígonos regulares.



Weinzweig (1978) señala que las primeras experiencias de carácter espacial del niño tienen lugar con objetos sólidos tridimensionales y que, inicialmente, las figuras bidimensionales aparecen como superficies de objetos sólidos como cubos, conos, cilindros, esferas, cajas rectangulares, prismas, pirámides, etc.

Igualmente sugiere que al utilizar los cuerpos sólidos tridimensionales conviene hacer impresiones de sus superficies planas o ver la huella que dejan cuando reposan una de sus caras sobre una superficie.

Esta actividad contribuye a llamar la atención sobre las diferentes formas bidimensionales, así como ciertas propiedades fundamentales de los sólidos.

Además de descubrir que hay sólidos que pueden rodar como las esferas y los cilindros, los niños llegan a descubrir las diferentes formas que tienen las caras sobre las que pueden reposar los sólidos que no poseen la propiedad de rodar.

Nivel 2

Se comienza a desarrollar el **conocimiento de la forma,** lo mismo que la conciencia de que las figuras constan de partes; ello a partir de observaciones logradas en la realización de trabajos prácticos como mediciones, dibujos, construcción de modelos, etc. En estas actividades, por ejemplo, el niño observa que un rectángulo tiene 4 ángulos rectos, que las diagonales y los pares de lados opuestos tienen la misma longitud; sin embargo, aún no capta el hecho de que un rectángulo es un caso particular de paralelogramo. (Este nivel se presenta alrededor de los 10 años).

Algunas actividades sugeridas por Van Hiele para este nivel son:

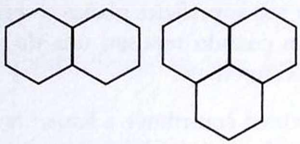
Aporte conceptual

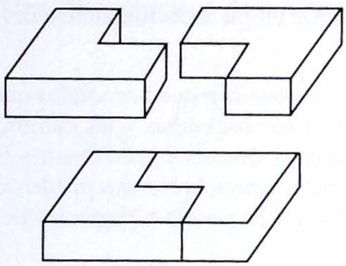
1. Encaje y acoplamiento de figuras

a. Adosar y acoplar sólidos sin dejar huecos.

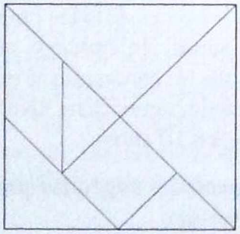
b. Teselaciones: "pavimentar"superficies con formas geométricas que encajen sin dejar huecos.

c. Superponer formas y encontrar posibles relaciones entre ellas.





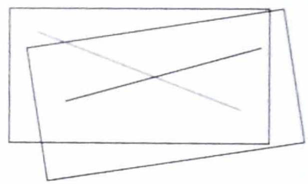
Otra fuente de actividades útiles para la exploración de las propiedades de la forma surge de la división de piezas en otras menores, como en el Tangram chino, que redispuestas y ensambladas de otros modos dan lugar a una variedad de formas nuevas como lo podemos constatar en los ejemplos presentados en la página 30 del taller para maestros.



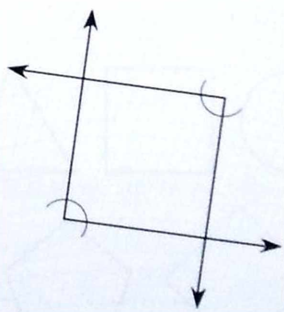
Tales actividades no son simples pasatiempos , detrás de ellas se hace una aporte al aprendizaje de las matemáticas. A través de ellas se puede llegar a desarrollar las nociones de ángulo recto y de paralelismo. Además, retan a los niños, dan pie a situaciones problemáticas y desempeñan un papel importante para fomentar, desarrollar y ejercitar el pensamiento espacial.

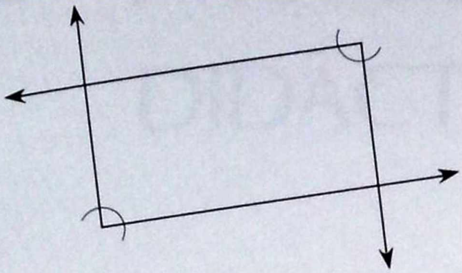
2. Rectas y ángulos

a. Superposición de dos rectas dibujadas en dos hojas distintas, que se hacen girar. De esta manera los niños descubren el cambio de relación entre las rectas, es decir, los ángulos; descubren también los casos particulares de perpendicularidad y paralelismo y su relación con las propiedades de los ángulos.



b. Relaciones entre ángulos rectos al formar, por ejemplo, un rectángulo cuadrado o un rectángulo no cuadrado.





Nota aclaratoria:

Se reconocen como rectángulos a los polígonos que tienen cuatro ángulos rectos. Así, dentro de la categoría de rectángulos tenemos a los rectángulos cuadrados cuando sus cuatro lados tienen la misma longitud y rectángulos no cuadrados cuando las longitudes de sus lados hacen igualdad en parejas.

Nivel 3

Las **relaciones** encontradas hasta este momento empiezan a elaborarse a medida que se incluyen en las primeras definiciones generales, en las cuales se pueden comenzar a establecer conexiones lógicas; se hacen deducciones a partir de ejercicios prácticos y de razonamiento, y se reconocen las inclusiones de clase (todo cuadrado es rectángulo y todo rectángulo es paralelogramo).

Nivel 4

En este nivel se desarrolla el **razonamiento deductivo,** se comprende el papel de los axiomas y de los teoremas y se pueden construir demostraciones originales.

Nivel 5

Se pueden hacer comparaciones entre diferentes sistemas axiomáticos: por ejemplo, los de las geometrías euclidianas y las no euclidianas.

En nuestras instituciones educativas, cuando se le dedica suficiente tiempo al estudio de la geometría, se alcanza generalmente sólo hasta el nivel 3, ya que el proceso didáctico habitual no permite la apropiación consciente y racional de las herramientas necesarias para el razonamiento deductivo.

En la propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico que se presenta a continuación se plasman algunos de los elementos geométricos que se pueden identificar en el arte del Origami (basado en el plegado de papel), y cuya riqueza como opción didáctica ha sido reconocida por diversos investigadores.

La propuesta se presenta en detalle, por lo menos en sus primeros desarrollos, ya que se trata de compartir con los docentes una forma de **poner en escena** el enfoque didáctico que la sustenta.

Propuesta didáctica

El presente módulo desarrollará dos alternativas para el desarrollo del pensamiento geométrico: el plegado y los palitos.

I. El plegado

La experimentación de esta propuesta con diferentes grupos de docentes y estudiantes ha permitido configurar algunas características de la forma como puede ser llevada a la práctica. Con el fin de compartir con otros docentes esa experiencia, se va a presentar de la siguiente manera: en los renglones señalados con el símbolo • aparecen las formas de intervención del docente que se sugieren; en los paréntesis se transcriben algunas de las respuestas que dan los alumnos y que permiten el avance en el desarrollo de la actividad.

Materiales:

Papel bond o más delgado tamaño oficio o carta, colores, escuadra, transportador y compás.

La actividad de plegado se realiza con hojas pequeñas (las cuales se obtienen al dividir la hoja original en dos o en cuatro partes iguales).

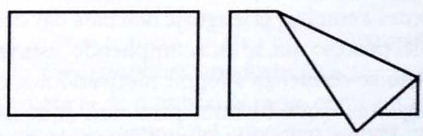
1. Noción o idea de línea recta

El plegado básico que se realiza para trabajar la noción o idea de recta consiste en doblar o plegar la hoja de papel una sola vez; de cualquier forma, (sin que necesariamente coincidan entre sí los bordes de la hoja).

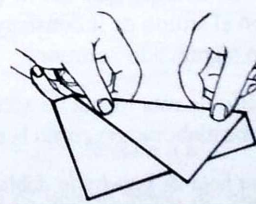
Lo anterior se logra cuando el maestro pliega su propia hoja de papel, al tiempo que da la orientación correspondiente. Algo importante para tener en cuenta, además, son las recomendaciones sobre el cuidado al manejar la hoja, la pulcritud al presentar el trabajo que se haya realizado y la necesidad de dejar el aula y el pupitre limpios, sin residuos de papel esparcidos.

1.1 Acciones iniciales

- Tomemos una hoja de papel y hagamos con ella un pliegue.



- Reafirmemos ese pliegue o doblez empleando el índice y el pulgar de las dos manos.



- Despleguemos la hoja.
- ¿Qué se observa en ellas? (una marca, una señal, una raya, ...)
- ¿Cómo es esa marca? (delgada, fina, derecha,...)

- ¿A qué se parece?
- ¿Si la hoja fuera más grande podríamos hacer un pliegue más largo?
- ¿Y si fuera más, más grande?
- ¿Qué tan largo podría ser ese pliegue?

Con esta serie de preguntas se busca llegar a acuerdos sobre la nominación de los diferentes elementos que aparecen, y proponer las palabras que recogen la idea o concepto que se está trabajando.

- Vamos entonces a decir (a ponernos de acuerdo en ...) que la marca que queda en el papel al hacer un pliegue nos da la idea o representa una línea recta.

1.2 Realización verbal

Al mismo tiempo que se realiza la acción de plegar la hoja de papel, se anima a los estudiantes a emplear el lenguaje oral para dar cuenta del proceso que se está cumpliendo; este propósito se comienza a lograr motivándolos con preguntas (¿qué hicimos primero?, ¿qué hicimos luego?, ...) y permitiendo la explicitación de los diferentes esquemas perceptuales, y de la diversidad de códigos que hacen presencia en el aula, con el ánimo de ir construyendo un lenguaje y un significado comunes.

Como resultado de esta forma de acción, puede aparecer una elaboración como la siguiente:

"Tomamos una hoja de papel y la doblamos para obtener un pliegue; reforzamos el pliegue con la yema de los dedos para que la marca quedara más nítida; la raya que obtuvimos nos representa una línea recta".

No sobra insistir aquí que la realización verbal que los niños logren debe ser resultado del nivel de comprensión que hasta el momento hayan logrado; la interacción con el maestro y con sus compañeros permite ir modificando el propio lenguaje, acordar formas de expresión válidas para todo el grupo y ante todo crear un nexo entre la forma externa de la acción –plegar el papel– y su forma mental –acceder al concepto de recta–.

1.3 Representación gráfica

Una problematización necesaria en este proceso es la que se origina cuando se les plantean a los estudiantes preguntas como las siguientes:

- ¿Es posible representar de otras maneras una línea recta? (Aquí aparecen propuestas como: con un hilo tirante, un cabello, el borde del pupitre, ...).
- ¿Cómo es posible, sobre el papel, una representación gráfica de línea recta? (Algunos niños sugieren el uso de la misma hoja plegada para obtener el trazo de una línea recta; otros hablan de la regla o la escuadra; en ambos casos aparecen instrumentos que obran como mediadores de la apropiación conceptual).

Tanto en el caso del pliegue en la hoja de papel, como en el trazo empleando lápiz y regla, es conveniente insistir en que la marca sea muy delgada; tanto que podamos suponer que esa línea no tiene ningún ancho; sólo largo o sólo longitud (lo que se corresponde con la definición euclídea de recta).

Se trata, de esta manera, de un proceso reflexivo sobre la recta como una idea, una construcción mental, la prolongación de la acción material. La reflexión sobre lo indefinido de esa representación es una acción puramente mental.

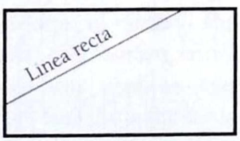
1.4 Registro de la actividad

La forma como los alumnos organicen en sus cuadernos el **registro** de la actividad de plegado, junto con la **realización verbal** y la **representación gráfica**, adquiere gran importancia para la interiorización de los conceptos, pues se facilita la confrontación entre las reglas de juego de cada uno de los niveles (plegado y gráfica) y la aparición de elementos explicativos.

Un tipo de registro puede ser el siguiente (es una propuesta, como lo es todo el contenido del presente módulo).

Concepto de recta

a. Acciones iniciales

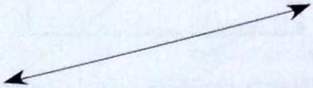


(El papel con el correspondiente plegado se fija o se pega en el cuaderno. El trozo de papel que se emplea en esta oportunidad debe ser acorde con el tamaño de la página del cuaderno).

b. Realización verbal de la acción del plegado

(similar a la que aparece entre comillas en el numeral 1.2)

c. Representación gráfica de una línea recta



d. Realización verbal de la acción de trazo

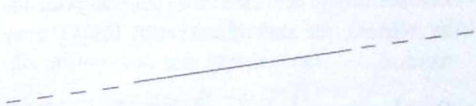
(Por ejemplo: *Tomé el lápiz y lo apoyé en el borde de la regla; luego deslicé el lápiz siguiendo ese borde y obtuve una línea recta*).

Tanto la **realización verbal** como la **representación gráfica** posibilitan la aparición de otros códigos, de otros esquemas que pertenecen a la gramática formal del conocimiento matemático; en este caso, pueden surgir, de manera natural, cuestiones como las siguientes:

- ¿Qué tan largo puede ser el trazo para representar una línea recta?
- ¿Cómo podremos expresar que se trata de un trazo que se refiere a una línea que es muy, muy larga (tan larga como seamos capaces de imaginarla)?

Es posible que se dé la sugerencia de las flechas en los dos sentidos, o de las líneas interrumpidas, o cualquiera otra.

De la misma manera, se crea un contexto adecuado para proponer una formalización tanto en la manera de nombrar la recta, como en una posible explicitación del concepto a nivel más formal (o matemático). Por ejemplo:



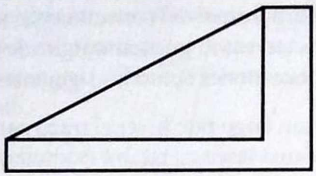
Recta **a** ó $\overleftrightarrow{\mathbf{a}}$

La recta a es una sucesión de puntos que siguen la misma dirección y se prolongan indefinidamente en los dos sentidos.

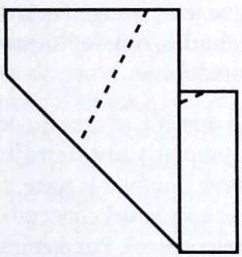
2. Concepto de punto

2.1 Acciones iniciales

- Pleguemos otra hoja de papel para obtener una línea recta (es necesario recordar que lo que se obtiene realmente es la **representación** de una línea recta).



- Hagamos ahora otro pliegue, de modo que la segunda línea recta cruce o corte a la primera.



- Reforcemos (o reafirmemos) los dos pliegues de manera que ambos sean muy finos y muy nítidos.

- Despleguemos la hoja: ¿qué se observa?; ¿es posible ubicar el sitio donde las dos rectas se encuentran?; ¿en dónde se encuentran las dos rectas? (en un punto).

Cuando los niños hablan de un "puntico muy pequeñito" es porque le adjudican a este concepto propiedades de sustancialidad, en este caso **tamaño**, que es una de las dificultades que la estrategia didáctica pretende superar.

*"Vamos a suponer que el lugar donde las rectas se encuentran es tan, tan pequeño que lo podemos imaginar sin largo ni ancho, y por eso se llama **punto**".*

2.2 Realización verbal

El proceso se simplifica un poco en la primera parte, pues no es necesario repetir la realización verbal que se hizo anteriormente; el resultado de esta parte del trabajo, en relación con el concepto de punto puede ser (en forma oral) como el siguiente:

*"Tomamos una hoja de papel y la plegamos para obtener una línea recta; volvemos a plegar la hoja y obtenemos otra recta, pero de modo que se corte con la primera.El lugar donde las dos rectas se encuentran nos da la idea de un **punto**".*

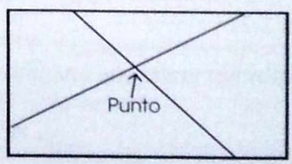
2.3 Representación gráfica

¿Cómo se puede obtener la representación de un punto en forma gráfica? (Trazando dos rectas concurrentes, es decir, dos rectas que se corten). La sugerencia que debe surgir en este momento es la de representar un punto como una intersección de dos líneas y no como una mancha o un pequeño círculo.

2.4 Registro de la actividad

Concepto de punto

a. Acciones iniciales

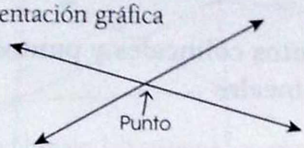


(Porción de papel pegada al cuaderno)

b. Realización verbal escrita

(Coincide con la que se hizo en forma oral en el numeral 2.2)

c. Representación gráfica



d. Realización verbal de la representación gráfica.

e. Formalización del concepto.

Ejemplos:

Un punto es el lugar de intersección de dos rectas.

Un punto se representa dibujando una porción de las dos rectas que lo originan y se nombra con una letra mayúscula.

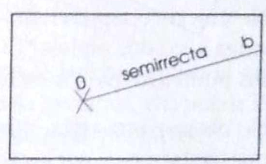
Nota:

A partir de este momento de desarrollo del módulo, se presentarán algunos de los contenidos que consideramos posibles de trabajar en la Educación Básica; a ellos deben agregársele los que el grupo de docentes y estudiantes de cada institución considere, a su vez, válidos o pertinentes.

En cada uno de los apartados que siguen, se sugieren solamente las **acciones iniciales**, pues el proceso subsiguiente debe adelantarse en forma análoga a lo que se esbozó en los numerales anteriores, lo cual implica que cada acción que cumplan los estudiantes debe realizarse verbalmente, traducirse a la correspondiente representación gráfica (empleando lápiz, regla, escuadra, compás,...) y hacerse el correspondiente registro. Eventualmente, cuando ello sea posible, se sugerirán formas de reversibilidad del proceso.

3. Concepto de semirrecta

- Localicemos un punto en la hoja de papel.
- A partir de ese punto, doblemos en un solo sentido la hoja de papel para obtener un pliegue.
- Despleguemos la hoja. ¿En dónde comienza el pliegue? (En el punto que habíamos marcado).
- ¿Hasta dónde llega el pliegue? (Hasta el borde de la hoja).
- Si la hoja fuera más grande, ¿sería posible obtener, a partir de un punto dado, un pliegue de mayor longitud?



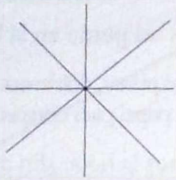
Semirrecta ob – $\overrightarrow{ob}$

El pliegue que comienza en un punto dado y se extiende indefinidamente en un solo sentido, representa una **semirrecta.**

4. Rectas que pasan por un punto

- Ubiquemos, utilizando el plegado, un punto en la hoja de papel.
- ¿Será necesario marcar los dos pliegues completos? (Aparece aquí la sugerencia de algunos niños de hacer dos pliegues cortos, que se crucen, empleando sólo las yemas de los dedos: algo así como hacer dos "pellizquitos").

- ¿Ubicado ya el punto, es posible obtener una recta que lo contenga?, ¿o que lo incluya, lo tome, o pase por ese punto? (Sí es posible).
- ¿Es posible obtener otra recta?, ¿ y otra?, ¿y otra?, ¿cuántas? (Tantas como el papel permita o hasta que nos cansemos o muchísimas).



Por un punto pueden pasar infinidad de rectas.

5. Rectas que pasan por dos puntos. Segmento de recta.

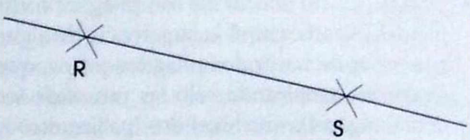
- Ubiquemos, con ayuda del plegado, dos puntos cualesquiera en una hoja de papel.
- ¿Es posible ubicar (o representar) una recta que contenga a los dos puntos? (o que pase por los dos puntos, o que los incluya?)
- ¿Es posible obtener otra recta, diferente a la anterior que también pase por los dos puntos?

Dados dos puntos, solamente hay una recta que los contiene.

Dados dos puntos, siempre es posible encontrar (o trazar) la recta que los contiene.

Dos puntos siempre son colineales o siempre están alineados.

Reversa: Dada una recta, siempre es posible ubicar en ella, por lo menos dos puntos.



La porción (o la parte) de recta que queda entre los dos puntos dados se llama

Segmento de Recta → $\overline{RS}$

6. Puntos colineales y puntos no colineales

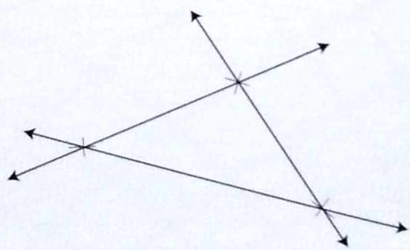
- Ubiquemos (a través del plegado o por medio de trazos) tres puntos en la hoja de papel.
- ¿Es posible ubicar una sola recta que contenga a los tres puntos? (En algunos casos, depende, a veces, …)

Si es posible trazar una única recta, los puntos se llaman **puntos colineales.**

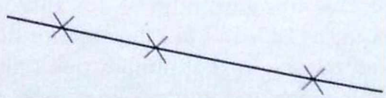
Si no es posible trazar una única recta, los puntos se llaman **puntos no colineales.**

Problemas:

a. Dados tres puntos no colineales (que no pertenecen a la misma recta), ¿cuántas rectas se pueden trazar, de modo que cada recta pase por dos de esos puntos?

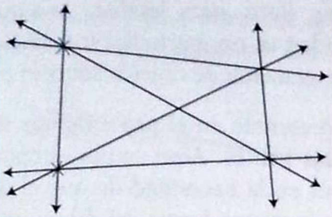


Tres puntos no colineales: tres rectas



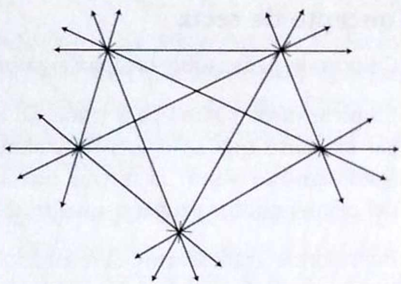
Tres puntos colineales: una recta

b. Dados cuatro puntos no colineales, ¿cuántas rectas se pueden trazar?



Cuatro puntos no colineales: seis rectas

c. Dados cinco puntos no colineales, ¿cuántas rectas se pueden trazar?



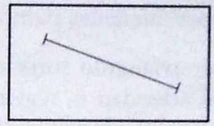
Cinco puntos no colineales: diez rectas

La misma pregunta se puede plantear para seis, siete, … puntos no colineales, de lo cual se puede seguir una generalización: *el número de rectas va creciendo según la serie de números naturales, a partir del 3:*

Puntos no colineales	Rectas
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
…	…

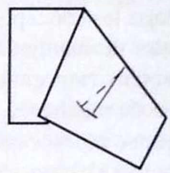
7. Punto medio de un segmento

- Ubiquemos dos puntos en la hoja de papel.
- Tracemos el segmento de recta correspondiente.

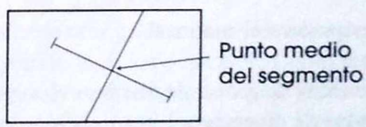


- ¿Es posible, plegando la hoja, ubicar el punto medio de ese segmento?

Si se dobla el papel de modo que un extremo del segmento se superponga sobre el otro extremo, el punto medio queda ubicado en el pliegue.



Para el caso de la representación gráfica en los cuadernos de los niños, ella puede lograrse con el método de regla y compás:



Las acciones presentadas hasta este momento se pueden tomar como acciones básicas para el desarrollo posterior de otros conceptos de la geometría euclideana.

Los conceptos de **ángulo y región angular** se pueden trabajar a partir de la actividad 2, concepto de punto.

El concepto de **rectas perpendiculares** surge de la actividad 7, punto medio de un segmento, aunque en esta oportunidad la recta o el segmento pueden doblarse sobre sí mismos en cualquier punto.

El concepto de **rectas paralelas** se trabaja a partir del trazo de dos perpendiculares a una misma recta, por diferentes puntos.

El concepto de **triángulo** surge de lo que se deduzca de la actividad 6, región delimitada por las rectas que se pueden trazar cuando se tienen 3 puntos no colineales.

La estrategia didáctica del plegado ofrece muchas posibilidades que pueden ser exploradas por los grupos de docentes de acuerdo con el nivel de avance que vayan mostrando los estudiantes; lo más importante, en este caso, es asegurarse de trabajar los conceptos de la geometría en los niveles de manipulación del papel (plegado), representación gráfica (manejando los instrumentos de medición), representación simbólica (la que se acuerde con el grupo) y la aproximación a una descripción del concepto o definición.

II. Los palitos

Descripción del material

Palitos muy delgados, de diferentes longitudes, pintados de diversos colores y elaborados preferiblemente en balso o utilizando material de desecho (palos de colombina, de los que se utilizan para los pinchos, pitillos, palillos, ...).

1. Juegos libres

1.1 Se manipulan los palitos y se representan con ellos toda clase de objetos escogidos por los alumnos y/o sugeridos por el maestro. Además de la tendencia natural a construir objetos sobre la tapa del pupitre (en dos dimensiones) se deben permitir y estimular las construcciones en tres dimensiones. Pero, para facilitar la siguiente actividad es necesario hacer énfasis en la representación de objetos sobre el plano.

1.2 Se representan en el papel figuras hechas con los palitos. Aquí es muy importante insistir en la necesidad de que el gráfico tenga la misma forma del diseño original (el que se hizo con los palitos) lo cual significa el manejo intuitivo de elementos de proporcionalidad.

2. Concepto de recta

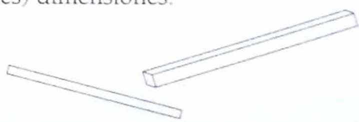
2.1 Colocar un palito sobre la tapa del pupitre.

2.2 Emplear otros palitos para tratar de alargar el palito que se colocó inicialmente (esto significa seguir la misma dirección del primer palito; sin hacer quiebres).

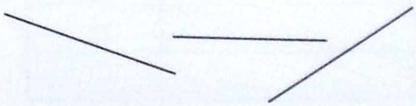
2.3 Representar gráficamente el resultado.

En esta actividad pueden presentarse varias situaciones:

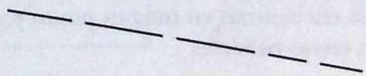
- Algunos niños representan los palitos en dos (o tres) dimensiones.



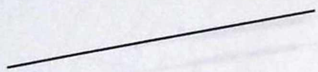
- Otros niños optan desde el comienzo por trazar solamente líneas (la mayoría de las veces por pura comodidad); esta forma de representación se logra si se les dice "supongamos que los palitos con los que estamos jugando son muy delgados".



- Cuando se propone alargar el palito que se ubica primero sobre la tapa del pupitre, la representación gráfica puede ser del tipo **analítico**, pues se dibujan uno por uno los palitos;



o de tipo **sintético**, porque aparece el resultado final como un solo trazo continuo.



En este caso es muy conveniente lograr los dos tipos de representaciones, pues cada una de ellas permite acceso a conceptos diferentes: segmento, longitud de un segmento, suma de segmentos, recta, etc.

En las dos formas de la actividad (con los palitos y gráficamente), se anima a los niños para que realicen verbalmente la acción cumplida, tanto al manipular los palitos como al representarlos gráficamente, primero en forma oral y luego en forma escrita.

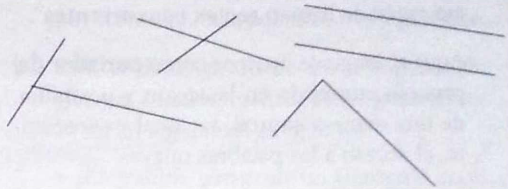
Ejemplo:

"Primero coloqué un palito sobre el pupitre; luego fui colocando otros palitos siguiendo la misma dirección del primer palito y resultó una línea más larga formada por varios palitos de diferentes longitudes". (Es necesario además que los niños accedan a la palabra **segmento** cuando se refieran a la representación gráfica de un palito).

En este caso las palabras **línea, dirección** y **segmento** aparecen como expresión de la apropiación conceptual lograda a través de la acción, y permiten ubicar los dos conceptos en el nivel del lenguaje.

3. Posiciones de dos rectas sobre un plano

3.1 Tomar una pareja de palitos y colocarlos sobre la tapa del pupitre.



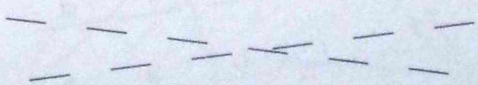
3.2 Alargar cada uno de los palitos como se hizo en la actividad anterior.

3.3 Observar y describir la situación que se presentó: si al hacer el alargue de los palitos éstos se encuentran o no.

3.4 Realizar verbalmente la acción en cada uno de los casos. Esta actividad debe ser cuidadosamente orientada con el fin de permitir que aparezcan las palabras **rectas concurrentes** (porque se encuentran, llegan o concurren a un mismo sitio, a un mismo punto); y rectas paralelas (porque van a la par, avanzan simultáneamente pero no se encuentran).

3.5 Representar gráficamente las acciones con los palitos en los dos casos. Como resultado de la realización verbal ya se accedió a las palabras que representan los conceptos: por lo tanto en los cuadernos de los niños pueden aparecer registros como los siguientes:

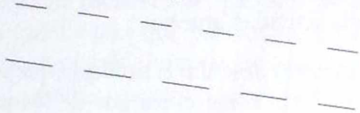
Rectas concurrentes



"Primero dibujé dos segmentos en cualquier dirección, después tracé otros segmentos para alargar o prolongar los segmentos iniciales conservándoles su dirección y resultaron dos rectas que se encuentran en un punto y por esa razón se llaman **rectas concurrentes**".

Aquí el lenguaje aparece como portador del proceso cumplido en la acción y posibilita, de una manera natural, racional y consciente, el acceso a las palabras nuevas.

Rectas paralelas

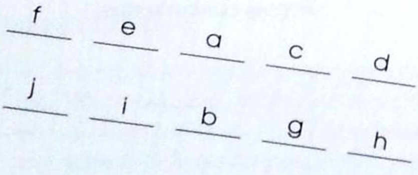


"Primero dibujé dos segmentos que tuvieran la misma dirección y los alargué trazando otros segmentos; resultaron dos rectas que no se encuentran en ningún lugar porque están siempre a la misma distancia; por esa razón se llaman rectas **paralelas**".

Durante los procesos de representación gráfica y realización verbal aparecen elementos referidos a:

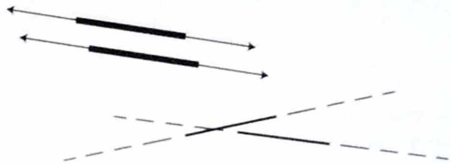
- Necesidad de adoptar una nomenclatura que permita hacer referencia a los palitos (o los segmentos) en una forma más precisa, por ejemplo empleando letras. En este caso, el ejemplo anterior se podría convertir en lo siguiente:

Rectas paralelas



"Primero dibujé los segmentos a y b los cuales tienen la misma dirección; después tracé los segmentos c, d, e y f para alargar el segmento a y tracé los segmentos g, h, i, j para alargar el segmento b; obtuve dos rectas que no se encuentran en ningún punto y se llaman rectas paralelas".

- Representación del alargamiento de los palitos por medio de líneas interrumpidas, o de una flecha, o de otra notación que se acuerde.

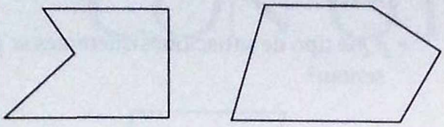


Nota: En las actividades que se proponen a continuación se sugiere atender, de la misma manera como se ha presentado hasta aquí, lo relativo a representación gráfica, realización verbal de las acciones y explicitación con palabras del concepto correspondiente.

4. Líneas poligonales

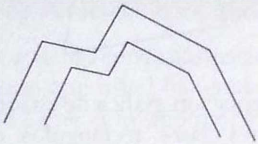
4.1 Colocar sobre el pupitre una *cadena* de palitos, de modo que en el extremo donde termina uno, se coloque el comienzo de otro; se observa aquí que es posible que se dé una de dos situaciones: el origen de primer palito y el extremo final del último palito se encuentran, caso en el cual se trata de una línea poligonal **cerrada**; en caso contrario, se trataría de una línea poligonal **abierta.**

4.2 Construir una línea poligonal cerrada y prolongar (en su misma dirección) cada uno de los palitos que la forman: si las prolongaciones se encuentran con alguno de los palitos iniciales la línea poligonal se llamará **cóncava**; en caso contrario se llamará **convexa**.



cóncava convexa

4.3 Comparar la longitud de una línea poligonal (abierta o cerrada) con otra que sea "envolvente" respecto a la primera.



4.4 Construir líneas poligonales (abiertas o cerradas) únicamente con ángulos agudos, únicamente con ángulos rectos, únicamente con ángulos obtusos, etc.

4.5 ¿Es posible construir una línea poligonal cerrada, en la que solamente se formen 3 ángulos rectos (es decir, ningún ángulo agudo y ningún ángulo obtuso adicionales)?

- ¿Con solamente 4 ángulos rectos?
- ¿Con 5 ángulos rectos?
- ¿Con un recto y 2 agudos?
- ¿Con 1 recto, 1 agudo, 1 obtuso?, etc.

5. De las líneas triangulares a los triángulos

5.1 Construir una línea poligonal cerrada con 3 segmentos. ¿Es posible que esa línea sea cóncava? A partir de esta actividad se abordan la representación gráfica del triángulo, sus elementos, la correspondiente notación y unos primeros acuerdos sobre el concepto o definición.

Vale la pena aclarar la diferencia entre línea triangular y triángulo. La línea triangular es el borde, contorno o frontera de una superficie limitada por tres segmentos de recta. El triángulo está formado además por el área limitada por estos tres segmentos.

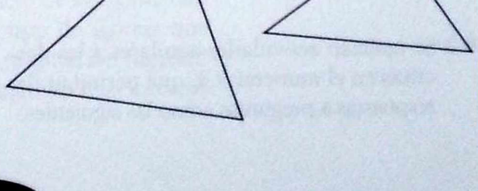
5.2 Para la clasificación de los triángulos según sus ángulos, realizar actividades a partir de las siguientes preguntas:

- ¿Es posible construir un triángulo en el que los 3 ángulos sean agudos?, ¿en que los 3 sean rectos?, ¿en que los 3 sean obtusos?
- ¿Con cuántos ángulos rectos se puede construir un triángulo? ¿con cuántos ángulos obtusos? etc.

5.3 La clasificación de triángulos según sus lados se orienta con preguntas parecidas a las anteriores:

- ¿Siempre es posible construir un triángulo, con 3 segmentos iguales entre sí?
- ¿De qué clase son los ángulos que se forman?
- ¿Siempre es posible construir un triángulo, con 2 segmentos iguales y otro de diferente longitud?
- ¿Siempre es posible construir un triángulo con 3 segmentos diferentes entre sí?

Miremos dos posibilidades:

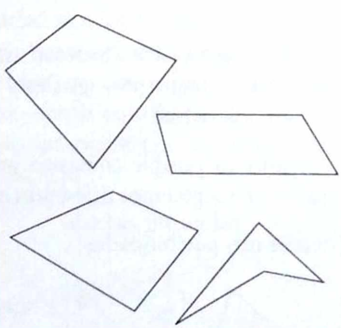


5.4 Con el fin de lograr una **apreciación** de las realizaciones entre lados y ángulos de un triángulo, las actividades que se propongan con los palitos deben permitir dar respuestas a preguntas del siguiente tipo:

- ¿Cómo son, entre sí, los ángulos de los triángulos equiláteros diferentes?
- ¿Qué sucede cuando en un triángulo isósceles, el lado diferente aumenta de longitud?, ¿o cuando disminuye?
- ¿Qué sucede en un triángulo rectángulo con el lado opuesto (hipotenusa) al ángulo recto? ¿Es siempre el mayor? ¿Puede ser igual o menor que uno de los catetos? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el lado mayor de un triángulo obtusángulo?, etc.

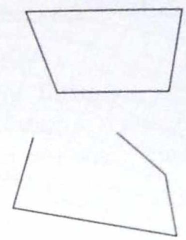
6. De las líneas cuadrangulares a los cuadriláteros

6.1 Construir líneas poligonales cerradas formadas por 4 segmentos.

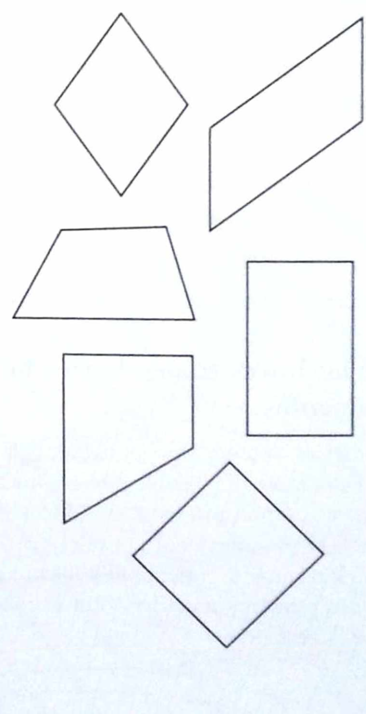


6.2 Se realizan actividades similares a las descritas en el numeral 5.3, que permitan dar respuestas a preguntas como las siguientes:

- ¿Siempre es posible, con 4 segmentos de cualquier longitud construir un cuadrilátero?
- ¿Qué tipo de situaciones diferentes se presentan?



6.3 Representación gráfica de cuadriláteros de diferentes clases: rectángulos, cuadrados, trapecios, rombos, etc.; notación de sus elementos y primeros acuerdos sobre concepto o definición de cada uno, atendiendo a la relación entre sus lados y entre sus ángulos.



PENSANDO CON OTROS

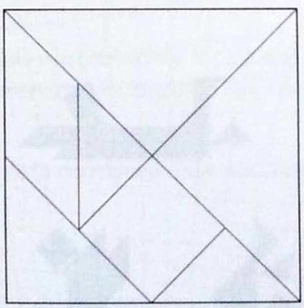
- Dialogue con sus compañeros acerca de la siguiente afirmación:

> *El aprendizaje de las matemáticas puede favorecer el desarrollo de elementos de educación estética y artística.*

- Si está de acuerdo con la afirmación, comparta con sus compañeros las experiencias que usted ha tenido en ese sentido y propóngales otras formas de lograr el mismo propósito.

La siguiente es una propuesta de taller para que sea asumida y estudiada en grupo. No se trata, por lo tanto, de dar respuestas sino de buscar en forma conjunta posibilidades de nuevos aprendizajes, lo cual puede convertirse en un espacio para llegar a acuerdos en torno a lo que significa *enseñar y aprender matemáticas*:

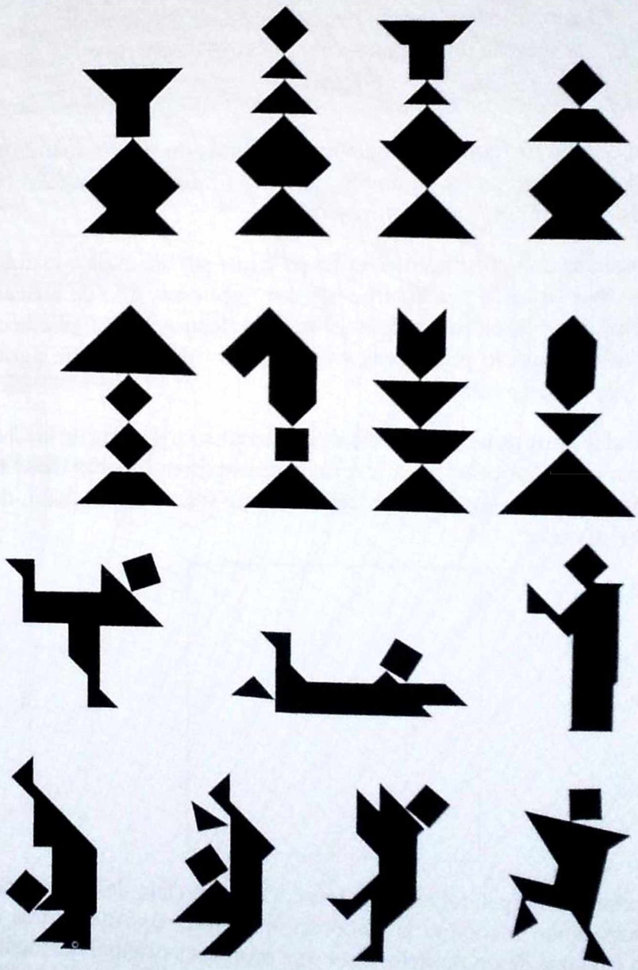
El **juego del Tangram** es una actividad milenaria, originaria de la China; su versión más conocida (porque actualmente existen muchas más) es la que parte de un cuadrado, repartido en siete secciones (fichas), de la siguiente manera:



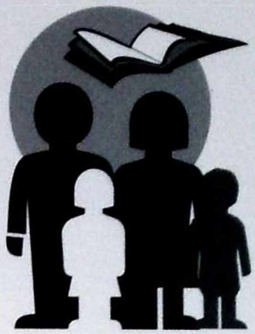
El propósito principal del juego es fomentar el ejercicio de la creatividad y la imaginación mediante la elaboración de todo tipo de figuras que pueden copiarse de un modelo, o ser una propuesta original del jugador. El juego del Tangram también puede emplearse en objetivos relacionados con el espacio y la Geometría.

A través del trabajo conjunto intente establecer un procedimiento para obtener las fichas del Tangram por medio del **plegado** y luego **midiendo** y **trazando**; explore las posibilidades didácticas que puede ofrecer, fundamentalmente para la educación artística.

Modelos posibles de armar:



PARA SABER MÁS



Asociación Anillo de Matemáticas. Ama. *Estrategias didácticas para el desarrollo del pensamiento espacial.* Santa Fe de Bogotá. 1997.

Clifford, William K. *Postulados de la ciencia del espacio en Colección Sigma. El mundo de las matemáticas. Tomo IV.* Grijalbo. México.1979.

Dickson, Linda y otros. *El aprendizaje de las matemáticas.* Labor. Madrid. 1991.

Gutiérrez, A.y Jaime, A. *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica. México. 1995.

Lovell, K. *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños.* Morata. Madrid. 1986.

Orton, A. *Didáctica de las matemáticas.* Morata. Madrid. 1990.

Pérez, Jesús Hernando. *Geometría euclideana y construcción de conocimiento.* Preimpreso. Santa Fe de Bogotá. 1990.

Piaget, Jean. *La construcción de lo real en el niño.* Editorial Crítica. Barcelona. 1989.

Rincón, Luis F. *El plegado y la Geometría.* V Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Universidad Pedagógica Nacional. Santa Fe de Bogotá. 1988.

Talizina, N. *Psicología de la enseñanza.* Editorial Progreso. Moscú. 1988.

En esta serie se han publicado los siguientes títulos:

Área del lenguaje

1. Producción de textos
2. Comprensión de lectura
3. La escritura y la escuela
4. La lectura y la escuela
5. La comunicación

Matemáticas

1. Manejo de códigos matemáticos
2. Sistemas de numeración con valor posicional
3. Solución de problemas con estructuras aditiva y multiplicativa
4. Solución de problemas que requieren inferencias lógicas
5. Desarrollo del pensamiento espacial y geométrico