

**PRUEBAS COMPRENDER MATEMÁTICAS:  
Pensamiento aleatorio y sistemas de datos. Grados 5 y 9**

**Coordinador**

*JAIME PARRA RODRIGUEZ*

**Asesoría psicométrica y estadística:**

*Carlos Pardo Adames*

**Equipo de apoyo académico y técnico:**

*John Jairo Rivera Trujillo*

*Darcy Milena Barrios Martínez*

**Noviembre, 2007**

## Introducción

### 1. SENTIDO DE LA EVALUACIÓN DESDE LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

- 1.1 La Comprensión Matemática
- 1.2 Dimensiones del Pensamiento Matemático
- 1.3 Evaluación del Pensamiento Aleatorio

### 2. PENSAMIENTO ALEATORIO GRADO 5

#### 2.1 Muestra

#### 2.2 Análisis de ítems según Teoría de Respuesta al Item. Aplicaciones del Modelo Rasch

#### 2.3 Análisis de Desempeños

##### 2.3.1 Colegios Ciudad: Sector oficial y privado

##### 2.3.1.1 Rendimiento General: Prueba Pensamiento Aleatorio

##### 2.3.1.2 Categorías: Azar, combinatoria, estimación probabilística, distribución de puntajes

##### 2.3.1.3 Desempeños según categorías

##### 2.3.2 Colegios Nuevos

##### 2.3.2.1 Rendimiento General: Prueba Pensamiento Aleatorio

##### 2.3.2.2 Categorías: Azar, combinatoria, estimación probabilística, distribución de puntajes

##### 2.3.2.3 Desempeños según categorías

### 3. PENSAMIENTO ALEATORIO GRADO 9

#### 3.1 Muestra

#### 3.2 Análisis de ítems según Teoría de Respuesta al Item. Aplicaciones del Modelo Rasch

#### 3.3 Análisis de Desempeños

##### 3.3.1 Colegios Ciudad: Sector oficial y privado

##### 3.3.1.1 Rendimiento General: Pensamiento Aleatorio

##### 3.3.1.2 Categorías: Azar, combinatoria, estimación probabilística, distribución de puntajes

##### 3.3.1.3 Desempeños según categorías

##### 3.3.2 Colegios Nuevos

##### 3.3.2.1 Rendimiento General: Pensamiento Aleatorio

##### 3.3.2.2 Categorías: Azar, combinatoria, estimación probabilística, distribución de puntajes

##### 3.3.2.3 Desempeños según categorías

### 4. ANALISIS DE SESGOS Y ERRORES EN LOS PROCESOS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN PENSAMIENTO ALEATORIO

### 5. CONCLUSIONES PEDAGÓGICAS

### 6. DISCUSIÓN. ORIENTACIONES CURRICULARES Y DIDÁCTICAS

## BIBLIOGRAFIA

## ANEXO

**PRUEBAS COMPRENDER MATEMÁTICAS.**  
*Pensamiento aleatorio y sistemas de datos. Grados 5 Y 9*

## INTRODUCCION

La Secretaria Distrital de Educación, a través de la aplicación de las pruebas “comprender matemáticas”, busca recoger información acerca de la comprensión conceptual matemática que tienen los estudiantes de quinto y noveno grado y, así, poder orientar nuevas y pertinentes formas de enseñanza y contribuir en el mejoramiento de la educación pública de la ciudad de Bogotá. Particularmente la prueba de pensamiento aleatorio busca ser una alternativa de valoración de habilidades y contenidos matemáticos, relacionados con el pensamiento aleatorio de tal manera que los resultados que se deriven de su aplicación sean útiles para organizar los currículos y sistemas de enseñanza en la educación primaria y secundaria. La evaluación de pensamiento aleatorio y sistemas de datos se propone indagar sistemáticamente por las capacidades y dominios temáticos de los niños y jóvenes en diferentes categorías del pensamiento aleatorio (azar, combinatoria, estimación probabilística y distribución de puntuaciones) mediante una serie de tareas de carácter cognitivo matemático presentadas en una prueba que cumple parámetros de confiabilidad y validez. La prueba se construye fundamentalmente con *referencia a normas*, sin embargo al ser de carácter educativo, y no exclusivamente psicométrica, se tienen en cuenta parámetros de pruebas con *referencia a criterios*, especialmente para satisfacer expectativas de desempeño escolar.

En este documento, se presentan:

- a) los referentes teóricos que originan las categorías, indicadores e ítems de la prueba, los cuales también fueron referentes para las pruebas comprender de pensamiento aleatorio aplicadas en el 2005,
- b) un análisis de los ítems, utilizando la “teoría de respuesta al ítem” (TRI/ modelo de Rasch) en relación con diferentes parámetros especialmente de dificultad y discriminación,
- c) un análisis de los resultados en términos de los desempeños generales y por categoría – azar, combinatoria, estimación probabilística, distribución de puntajes- teniendo en cuenta:
  - criterios pedagógicos de expectativas de desempeño (prueba por referencia a criterios)
  - rendimiento general de la población en la prueba (prueba por referencia a norma)
  - ponderaciones y eliminación de ítems según los resultados del análisis de ítems hecho con el modelo de Rasch,
- d) un análisis de sesgos y errores según las diferentes opciones de respuesta por ítem, los procedimientos usados por los estudiantes en la solución de problemas, y el análisis según modelo TRI y,
- e) unas orientaciones de carácter curricular y didáctico para la formación, desde la educación matemática, del pensamiento aleatorio en niños y jóvenes.

# 1. SENTIDO DE LA EVALUACIÓN DESDE LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

## 1.1 La Comprensión Matemática<sup>1</sup>

Desde el punto de vista de la educación matemática, según el énfasis que se le haga a los contenidos disciplinares, a lo cultural o a lo cognitivo, se define una u otra concepción de lo que significa comprender el conocimiento matemático escolar. Si se enfatizan los contenidos disciplinares, comprender significa saber o *dominar temáticamente contenidos matemáticos*; si se prioriza lo cultural, comprender es *atribuir significado a los objetos matemáticos o al conjunto de símbolos que constituyen el lenguaje matemático*, y si se resalta lo cognitivo, la comprensión hace alusión al *dominio conceptual y a los procesos cognitivos* subyacentes a la actividad matemática.

### *La Comprensión como dominio de contenidos disciplinares*

La comprensión como dominio de contenidos disciplinares significa “saber contenidos matemáticos”, en tanto el énfasis se coloca en el uso de información. Se le da más importancia al qué, que al cómo, al contenido más que al proceso. Comprender matemáticas significa poseer información. Lo importante es mostrar que se tiene un saber matemático, no la habilidad obtenida a través de la matemática y transferible a otros espacios de razonamiento sobre la realidad.

### *La comprensión como significación*

La comprensión como significación se entiende como captar el significado del objeto matemático en relación con contextos de actuación y del uso del lenguaje. Sierpínska (1994) y Godino (2006), consideran fundamental para la didáctica de la matemática la idea de la comprensión como significado. Para ellos comprender se concibe como el acto de captar el significado del concepto.

Dentro de esta perspectiva comprender significa la conexión entre redes internas (representaciones mentales) y representaciones simbólicas externas (lenguaje); no hay representaciones mentales al margen del lenguaje. Godino (1998) propone que la comprensión como 'conexión a redes internas de representación de información' debería ser complementada con la faceta antropológica como “correspondencia entre los significados personales e institucionales”. Significados personales que están estrechamente vinculados con el sentido, un para qué: una intencionalidad de la actuación matemática en el contexto escolar.

En síntesis, la comprensión matemática es la significación que un individuo le atribuye a un objeto matemático (conocimiento matemático) mediante representaciones internas (conceptos o redes de conceptos) y representaciones externas (lenguaje, conjunto de símbolos culturales que manifiestan el concepto) en una situación contextual.

---

<sup>1</sup> Ver la Serie Cuadernos de Evaluación. Pruebas Comprender de Matemáticas. Evaluación de la comprensión y el aprendizaje. Grados 5º y 9º. Guía de orientación para profesores. Alcaldía Mayor de Bogotá. 2005, y La serie Cuadernos de evaluación. Resultados de la prueba comprender. Bogotá. 2007. También se puede consultar la Guía

### *La comprensión como dominio conceptual*

La comprensión, en este enfoque, se entiende como la actividad cognitiva de transformación o ampliación de un campo conceptual. Piaget, dentro de la psicología del desarrollo, hace uso del concepto de esquema, caracterizándolo como una totalidad dinámica organizadora de la acción, que posee plasticidad y es capaz de cambiar en función de nuevas situaciones. En este sentido, la formación de conceptos matemáticos se refleja en la manera como se modifican los esquemas cognitivos.

Para Vergnaud (1.995), la comprensión matemática implica el concurso de los tres componentes: a) situaciones en que se exige el concurso del concepto, b) invariantes operatorias que hace relación a las funciones cognitivas, tales como inferencias, apropiaciones de acciones organizadas, generalizaciones, y c) significantes con las que la apropiación del concepto se relaciona con un conjunto variado de representaciones simbólicas que sirven como representación y como instrumentos de comunicación y apoyo al pensamiento.

En la psicología cognitiva, no de corte desarrollista como la piagetiana, sino basada en los sistemas de procesamiento de información, se ha enfatizado la distinción entre los contenidos y los procesos cognitivos. Los primeros corresponden a los conceptos y los segundos a los diferentes procedimientos o heurísticas que los estudiantes siguen para constituir un concepto, aplicarlo o solucionar un problema. Dentro de este enfoque los contenidos disciplinares se presentan cognitivamente como redes de conceptos que conforman un conocimiento estable pero susceptible de transformación, y los procesos como un conjunto de acciones organizadas de carácter cognitivo que llevan a un fin, que puede ser la constitución de un nuevo sistema conceptual.

En síntesis, la comprensión matemática está vinculada a la manera como se constituyen conceptos o redes conceptuales, vinculados a una serie de procesos cognitivos (conocimientos declarativos y procedimentales /representaciones mentales y procesos cognitivos que actúan sobre esas representaciones), en relación con representaciones simbólicas externas y en diferentes situaciones contextuales.

*Dentro del contexto de la prueba la comprensión matemática se concibe como el acto cognitivo de significación mediante la constitución de redes conceptuales, que representan internamente un objeto matemático, y representaciones simbólicas externas en situaciones contextuales específicas. La prueba se ubica en un enfoque cultural y cognitivo de la educación matemática*

## **1.2 Dimensiones del Pensamiento Matemático**

Dentro de los lineamientos curriculares se han propuesto cinco dimensiones del pensamiento matemático: 1. el numérico, 2. el variacional y los sistemas algebraicos, 3. el geométrico-espacial, 4. el métrico, y 5. el aleatorio y los sistemas de datos. Dentro de todos ellos, el pensamiento aleatorio es uno de los que menos atención curricular y didáctica se la ha prestado, sin embargo los niños y jóvenes cada día se enfrentan a diferentes situaciones naturales y sociales que requieren de su concurso. Por ello, el pensamiento aleatorio se escogió como uno de los campos prioritarios para su evaluación y desarrollo pedagógico.

### 1.3 Evaluación del Pensamiento Aleatorio

#### *Pensamiento aleatorio y sistemas de datos<sup>2</sup>*

Los niños, desde muy pequeños, están inmersos en experiencias relacionadas con cantidades, distancias y operaciones aritméticas y se manifiestan, en general, en acciones sobre los objetos físicos que tienen la propiedad de ser reversibles. Sin embargo, aunque las experiencias vinculadas a lo aleatorio son frecuentes en la vida cotidiana, una rifa, el día que lloverá, la posibilidad de encontrar puesto en un cine, etc., el dominio conceptual no llega tempranamente, ya que no podemos manipular estos fenómenos para producir un resultado seguro, ni devolver los objetos a su estado inicial deshaciendo la operación. Según Piaget, esta falta de reversibilidad de los experimentos aleatorios influye en el desarrollo tardío de los conceptos matemáticos relacionados con aleatoriedad.

Piaget e Inhelder (1975) argumentan que la comprensión del azar por parte del niño es complementaria a la de la relación causa-efecto. Los niños conciben el azar como resultado de la actuación conjunta de una serie de causas, que actuando independientemente producirían un resultado inesperado. En este sentido, hasta que el niño no comprende la idea de causa, no tiene base conceptual para identificar los fenómenos aleatorios. El azar habría que considerarlo como complementario a la composición lógica de operaciones reversibles y requiere como elemento necesario pero no suficiente un razonamiento combinatorio, para poder concebir distintas posibilidades de ocurrencia de un suceso.

En el periodo de las operaciones concretas, con la adquisición de esquemas operacionales espacio-temporales y lógico-matemáticos, el niño alcanza la capacidad de distinguir entre el azar y lo deducible, aunque esta comprensión no es completa, puesto que el pensamiento está todavía muy ligado al nivel concreto, y no a las condiciones de razonamiento abstracto y combinatorio. No obstante, el niño comienza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles, y la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. En el *periodo de las operaciones formales* el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. Así aparece la idea de probabilidad expresada por la razón entre las posibilidades de un caso particular y del conjunto de posibilidades. Por tanto, la idea de probabilidad, no puede ser totalmente adquirida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio y se generan las condiciones lógico formales que permiten el ejercicio de la probabilidad lógica y objetiva, en la etapa de las operaciones formales.

Fischbein, en un enfoque diferente al de Piaget, se preocupó por demostrar que los niños tienen intuiciones sobre fenómenos aleatorios y analizó el efecto de la enseñanza para mejorar estas intuiciones. Las intuiciones son procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales, inmediatas, globales, autoevidentes, se relacionan entre sí estructuralmente y tiene capacidad extrapolatoria. Fischbein diferencia entre intuiciones primarias y secundarias: Las intuiciones primarias se adquieren directamente con la experiencia, sin necesidad de ninguna enseñanza sistemática, por ejemplo admitir que al lanzar un dado todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.

---

<sup>2</sup> Se transcribe el texto presentado en la Serie Cuadernos de Evaluación. Pruebas Comprender de Matemáticas. Evaluación de la comprensión y el aprendizaje. Grados 5° y 9°. Guía de orientación para profesores. Alcaldía Mayor de Bogotá. 2005

Las intuiciones secundarias se forman como consecuencia de la enseñanza, principalmente en la escuela, tales como trazar diagramas de árboles para resolver combinatorias.

### *Evaluación del pensamiento aleatorio*

El pensamiento aleatorio y sistemas de datos, dentro del contexto de la prueba, hace alusión a la capacidad de niños y jóvenes de construir significados mediante la generación de conceptos y procesos cognitivos, en relación con un conjunto de símbolos que representan los objetos matemáticos, y frente a una serie de sucesos posibles dentro diferentes contextos, que les permita:

- diferenciar entre sucesos deterministas y aleatorios,
- realizar combinatorias entre diferentes elementos para definir sucesos de un espacio muestral,
- estimar la probabilidad de ocurrencia de sucesos e
- interpretar sistemas de datos<sup>3</sup> que describen diferentes fenómenos naturales o sociales

Cuando evaluamos el pensamiento aleatorio, de acuerdo al enfoque acogido como guía para el diseño de la prueba, debemos hacernos preguntas sobre ¿qué conceptos o redes de conceptos evaluamos?, ¿qué procesos cognitivos subyacen a la constitución de estos conceptos?, ¿en qué situaciones problema se generan? y ¿en qué formato textual o lingüístico se presenta la situación problema? De acuerdo a esto se organiza una estructura que origina una serie de ítems de prueba que se presenta en el cuadro:

*Grado quinto:*

Conceptos	Procesos Cognitivos	Situaciones	Representaciones simbólicas
<b>Azar</b>	Reversibilidad Causalidad (múltiples factores combinados) Proporcionalidad Heurísticas	Diferenciar entre sucesos deterministas y aleatorios en diferentes hechos de la vida cotidiana	Textos, notación matemática sin alta formalización y gráficas
<b>Combinatoria</b>	Asociaciones Análogos Categorización	Relacionar objetos mediante asociaciones para formar combinatorias de elementos que cumplan una condición definida	Textos, notación matemática sin alta formalización y gráficas
<b>Estimación</b>	Asociaciones Proporcionalidad	Estimar cualitativamente la ocurrencia de sucesos	Textos, notación matemática sin alta formalización y gráficas
<b>Distribución</b>	Inferencias Clasificación Interpretación Modelizaciones sencillas	Interpretación de datos presentados textual y gráficamente	Textos, notación matemática sin alta formalización y gráficas

<sup>3</sup> La interpretación de sistemas de datos tiene mayor relación con la estadística descriptiva o inferencial que con la probabilidad, sin embargo la estimación probabilística de un suceso o la probabilidad de ocurrencia de una hipótesis es fundamental para realizar análisis de datos estadísticos. El procesamiento de datos, en gran parte, se sustenta en modelos probabilísticos debido a la imposibilidad de estructurar lógicamente (determinación causal) y con información suficiente y necesaria la información que surge y es posible captar de un fenómeno. La estadística, en general, trabaja con evidencia cuantitativa no con información completa y por ello la probabilidad es un instrumento matemático fundamental.

*Grado noveno*

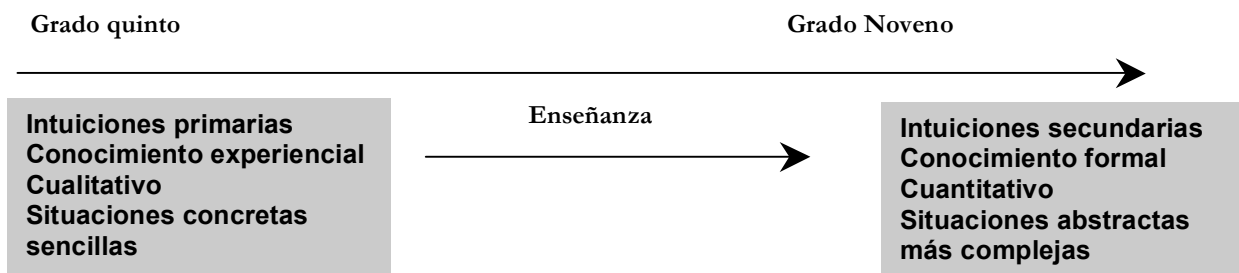
Conceptos	Procesos Cognitivos	Situaciones	Representaciones simbólicas
<b>Azar</b>	Deducción Planteamiento de hipótesis Proporcionalidad Heurísticas	Diferenciar entre sucesos deterministas y aleatorios en diferentes fenómenos naturales y sociales	Textos, notación matemática y gráficas
<b>Combinatoria</b>	Asociaciones Análogos	Relacionar objetos mediante asociaciones, diagramas de árbol y categorizaciones	Textos, notación matemática y gráficas
<b>Estimación</b>	Asociaciones Proporcionalidad Deducción	Estimar cuantitativamente la ocurrencia de sucesos cuyo espacio muestral surja de procesos combinatorios	Textos, notación matemática y gráficas
<b>Distribución</b>	Inferencias Clasificación Interpretación Modelización	Interpretación de datos presentados numérica y gráficamente	Textos, notación matemática y gráficas

*Niveles de complejidad de la prueba*

La diferencia entre los grados quinto y noveno está dada por la complejidad de los problemas, de acuerdo a:

- niveles desarrollo cognitivo especialmente en relación con los tipos de procesos cognitivos involucrados y los niveles de abstracción conceptual (complejidad estructural)
- exigencia de la tarea o problema en relación con un uso cuantitativo o cualitativo de los datos, con los niveles de formalización matemática de las condiciones del problema y los tipos de situaciones planteadas cotidianas contextualizadas culturalmente (complejidad funcional).
- contenidos matemáticos de acuerdo a los currículos escolares

En el grado quinto las habilidades matemáticas están ligadas a lo intuitivo primario y en el grado noveno a intuiciones secundarias y conceptualizaciones más elaboradas. Mientras que en el grado quinto los problemas podrían ser resueltos principalmente con un conocimiento que surge de la experiencia cotidiana y cultural de los niños, en el grado noveno hay mayores exigencias de un conocimiento que surge de la formalización de lo matemático a través de la enseñanza.



## 2. PENSAMIENTO ALEATORIO GRADO 5

Las pruebas comprender de pensamiento aleatorio se proponen identificar y describir los grados de comprensión que tienen los niños de grado quinto de fenómenos aleatorios en relación con cuatro conceptos fundamentales: azar, combinatoria, estimación probabilística y distribución de datos.

Para cada uno de los conceptos se propone un criterio<sup>4</sup> o finalidad que sería deseable que los estudiantes estuvieran en capacidad de alcanzar. Los resultados de la prueba nos proporciona información con respecto a:

1. las capacidades que tienen los niños para distinguir eventos azarosos de eventos deterministas o deducibles (azar),
2. la capacidad que tienen los niños para generar procedimientos combinatorios como condición para la definición de espacios muestrales y la realización de estimaciones probabilísticas (combinatoria),
3. la capacidad que tienen los niños de realizar estimaciones probabilísticas fundamentadas en la probabilidad subjetiva y empírica (estimación probabilística),  
y
4. la capacidad que tienen los niños para interpretar datos representados gráficamente en términos de distribución de poblaciones según alguna variable (distribución)

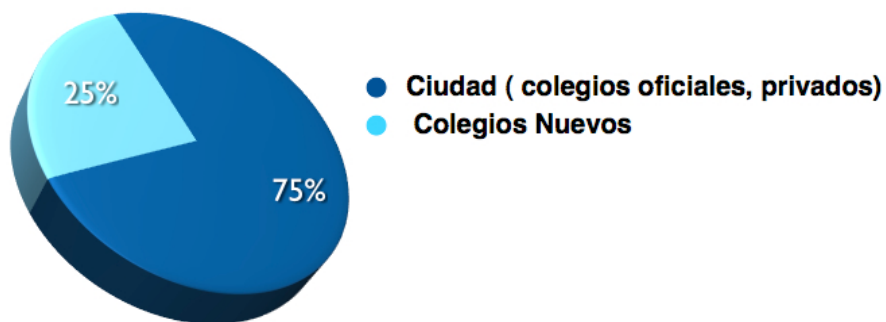
### 2. 1. Muestra

En la presentación de la prueba participaron 7124 niños de quinto grado de diferentes tipos de colegios: colegios nuevos y ciudad (oficiales y privados). Para el análisis se consideran separadamente los dos grupos.

	TIPO			TOTAL
	NUEVOS	CIUDAD		
		OFICIAL	PRIVADO	
Número de Estudiantes	1798	3896	1430	7124
% de Estudiantes	25,2%	54,7%	20,1%	100.00%
Número de Colegios	19	62	37	118
% de Colegios	16.10%	52.54%	31.36%	100.00%
Número de Colegios	19	99		118
% de Colegios	16.10%	83.90%		100%

<sup>4</sup> La prueba al ser de carácter educativo se diseña con referencia a criterios, es decir con referencia a unas posibles metas que serían deseables lograr en los estudiantes, sin embargo se realizaron una serie de pruebas pilotos para analizar su complejidad en términos de que la prueba fuera adecuada al nivel de respuesta de la población. En el mismo sentido, se analizaron los ítems de la prueba, utilizando la Teoría de Respuesta al Ítem – TRI- y el comportamiento de los resultados para definir niveles de ejecución

## Distribución de la población por sectores



## 2.2 Análisis de ítems según Teoría de respuesta al ítem -TRI. Aplicaciones del Modelo Rasch

Se realizó un análisis por cada uno de los ítems de la prueba (TRI), siguiendo el modelo Rasch, para determinar su pertinencia en el análisis de la habilidad cognitiva según parámetros de dificultad, discriminación, ajuste y correlación. También se analizó la pertinencia de las claves en relación con los diferentes distractores en cada ítem.

### *Parámetros de ajuste, dificultad y discriminación*

Para analizar los parámetros en cada uno de los ítems de una manera más ajustada, se excluyeron de la población aquellos sujetos que presentaban opciones con respuestas omitidas o con multimarca. De esta manera, la observación del comportamiento de cada ítem era más justo, en especial, en relación con los índices de dificultad. El total de la población para la aplicación del modelo de Rasch, se realizó para los primeros 3 ítems con 7114 estudiantes y para los otros con 7115.

ITEM	DIFICULTAD	N	N CORRECTO	AJUSTE PRÓXIMO	AJUSTE LEJANO	CORRELACIÓN	DISCRIMINACIÓN	%
1	-0.268	7114	2982	0.92	0.9	0.46	1.27	0.42
2	-1.18	7114	4353	1.06	1.15	0.3	0.78	0.61
3	-0.205	7114	2890	0.99	0.98	0.39	1.05	0.4
4	0.19	7115	2333	0.95	0.93	0.42	1.12	0.33
5	0.129	7115	2415	1.05	1.08	0.32	0.88	0.34
6	-0.567	7115	3431	0.91	0.88	0.47	1.36	0.48
7	0.311	7115	2173	0.89	0.89	0.47	1.21	0.3
8	0.318	7115	2164	0.99	1.02	0.37	1.01	0.3
9	-2.186	7115	5634	0.93	0.87	0.4	1.1	0.79
10	0.092	7115	2466	0.98	0.99	0.39	1.04	0.35
11	0.898	7115	1490	0.97	1.02	0.36	1.03	0.21
12	-0.583	7115	3456	1.06	1.06	0.32	0.78	0.48
13	0.124	7115	2422	0.94	0.94	0.42	1.13	0.34
14	0.448	7115	2000	1.1	1.19	0.25	0.8	0.28
15	-1.436	7115	4718	0.99	1.01	0.36	1	0.66
16	0.349	7115	2125	1.03	1.06	0.33	0.94	0.3
17	0.924	7115	1464	1.13	1.33	0.19	0.81	0.21
18	-1.918	7115	5336	0.94	0.9	0.4	1.1	0.75

19	0.346	7115	2128	0.94	0.93	0.42	1.12	0.3
20	0.154	7115	2382	0.94	0.92	0.43	1.14	0.33
21	0.724	7115	1676	0.99	1.08	0.34	0.98	0.23
22	1.791	7115	766	1.07	1.38	0.18	0.92	0.11
23	1.368	7115	1063	1.18	1.52	0.11	0.8	0.15
24	-0.848	7115	3859	0.94	0.92	0.43	1.23	0.54
25	1.024	7115	1365	1.06	1.2	0.26	0.91	0.19

Las columnas indican:

*Item:* posición del ítem en el cuadernillo.

*Dificultad:* dificultad del ítem; a mayor valor, mayor dificultad

*N:* número de estudiantes que abordan el ítem.

*N correcto:* número de estudiantes que responden correctamente el ítem.

*Ajustes próximo y lejano:* grado de ajuste de los datos al modelo de rasch para cada ítem. Se espera que los valores fluctúen entre 0.5 y 1.5. Valores inferiores o más altos, indican desajuste serio.

*Correlación:* correlación entre responder bien el ítem y el puntaje en la prueba. Se espera que sea positiva y alta.

*Discriminación:* indica qué tan bien discrimina la pregunta a la población evaluada. se espera que el valor sea 1, pero son aceptables valores entre 0.6 y 1.4.

*%:* porcentaje de la población que responde correctamente el ítem.

De acuerdo a los parámetros de la teoría de respuesta al ítem la prueba es adecuada para la medición de las habilidades relacionadas con pensamiento aleatorio. Sin embargo, el ítem 9 por considerarse el de menor dificultad fue excluido en el análisis de los resultados, sin embargo se considera para el análisis cualitativo final. Por otro lado los ítems 22, 23 y 25 se consideran de mayor dificultad, la cual podría ser ocasionada no por la ausencia de habilidad para responderlos sino por fatiga de los niños. Estos ítems tuvieron una consideración especial, en términos de las ponderaciones de la definición de niveles. No obstante no se excluyeron porque cumplen los parámetros básicos del modelo.

### *Claves y Opciones*

Para cada ítem se realizó un análisis de claves (respuesta correcta) y opciones (todas las alternativas de respuesta) para determinar si el ítem era adecuado para medir la habilidad en términos de la respuesta correcta y su relación con los distractores (alternativas incorrectas). Se esperaba que las respuestas correctas o claves obtuvieran un mayor valor en el promedio de habilidad que las demás opciones (ver análisis de sesgos y errores y anexo). En todos los ítems, exceptuando el 23, el promedio de habilidad es mayor para la clave, esto indica, en general, que las claves, y los distractores eran adecuados para medir la habilidad en la población. El ítem 23 se analiza en la sección sobre sesgos y errores.

## 2.3 Análisis de Desempeños

La prueba de quinto grado estaba compuesta por 25 ítems que intentaban valorar los desempeños de los estudiantes en diferentes problemas relacionados con el pensamiento aleatorio. La distribución de los ítems por cada una de las categorías se realizó así:

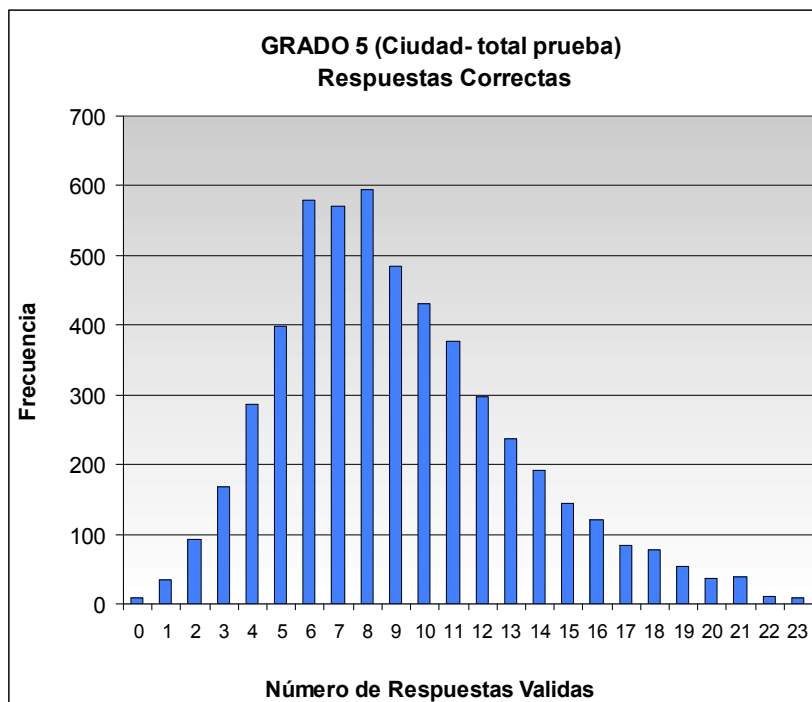
	Conceptos	Descripción	Ítems (Grado 5)	Número de ítems
Pensamiento Aleatorio	Azar	Sucesos aleatorios y deterministas	1, 2, 3, 4, 5, 6	6
	Combinatoria	Combinatorias y permutaciones	7, 8, 9, 10	4
	Estimación probabilística	Probabilidad de ocurrencia de un suceso	11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18	8
	Distribución de puntajes	Sistemas de representación externa de puntuaciones	19, 20 21, 22, 23, 24, 25	7

### 2.3.1 Colegios Ciudad: Sector oficial y privado

#### 2.3.1.1 Rendimiento General: Prueba pensamiento Aleatorio

Frecuencia de respuestas correctas y porcentajes Grado 5 (Ciudad-Total prueba)			
Respuestas Validas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	9	0,17%	0,17%
1	35	0,66%	0,83%
2	92	1,73%	2,55%
3	168	3,15%	5,71%
4	287	5,39%	11,10%
5	399	7,49%	18,59%
6	580	10,89%	29,48%
7	570	10,70%	40,18%
8	594	11,15%	51,33%
9	484	9,09%	60,42%
10	431	8,09%	68,51%
11	378	7,10%	75,61%
12	297	5,58%	81,19%
13	236	4,43%	85,62%
14	192	3,60%	89,22%
15	145	2,72%	91,95%
16	120	2,25%	94,20%
17	85	1,60%	95,79%
18	77	1,45%	97,24%
19	53	1,00%	98,24%
20	37	0,69%	98,93%
21	39	0,73%	99,66%
22	10	0,19%	99,85%
23	8	0,15%	100,00%

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Grado 5 (Ciudad-Total prueba)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
9,04	8,00	4,11	23	0

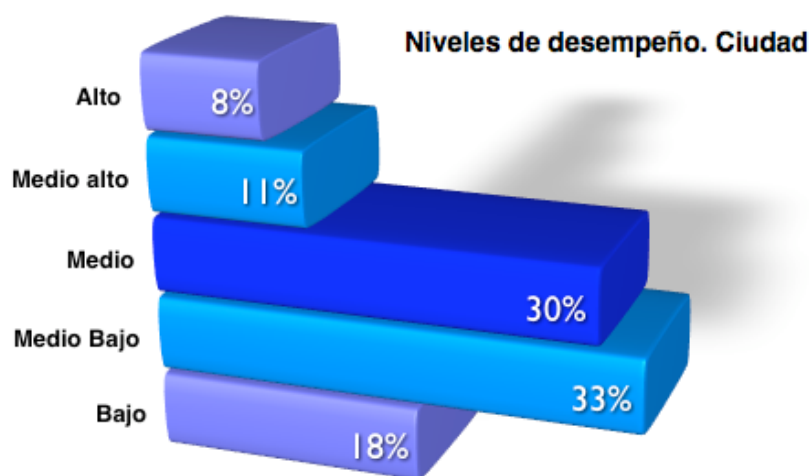


El número máximo de respuestas correctas fueron 23, obtenido por 8 estudiantes, y el mínimo 0 obtenido por 9 estudiantes. Ocho fue el número de respuestas correctas con mayor frecuencia (594 estudiantes). La media obtenida por los participantes es 9.04 con una desviación estándar relativamente alta de 4,11 que indica que existe una variabilidad alta en las respuestas de los estudiantes. La distribución de datos es asimétrica hacia la izquierda, lo cual indica que una considerable parte de la población se ubica en rendimientos medios bajos.

Desde el punto de vista de las expectativas de respuesta (criterios educativos de rendimiento en la prueba) se define un conjunto de niveles de acuerdo a:

- los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem (eliminación del ítem 9 por mínima dificultad (-2.186) y consideraciones a las altas dificultades en los ítems 22 (1.791), 23 (1.368) y 25 (1.024)) (ver sección 2.2.1);
- el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- criterios pedagógicos, aunque la media para la población fue de 9.04 no se estandariza o normaliza los resultados con respecto a ella. Teniendo en cuenta el ítem eliminado y las consideraciones de dificultad para contestar los últimos ítems se crea un rango de ejecución media en la prueba entre 9 y 12.

Niveles de desempeño general (Ciudad-Grado 5)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-5	990	19%
Medio Bajo	6-8	1744	33%
Medio	9-12	1590	30%
Medio Alto	13-15	573	11%
Alto	16-23	429	8%



Según criterio de rendimiento pedagógico (definición de niveles) en la prueba la mayoría de la población se ubica en niveles medios (30%) y medios bajos (33%). De acuerdo a ello se hace indispensable mejorar los rendimientos en pensamiento aleatorio mediante mejoras en los sistemas curriculares y de enseñanza.

### 2.3.1.2 Categorías: Azar, combinatoria, estimación probabilística, distribución de puntajes

#### *Azar*

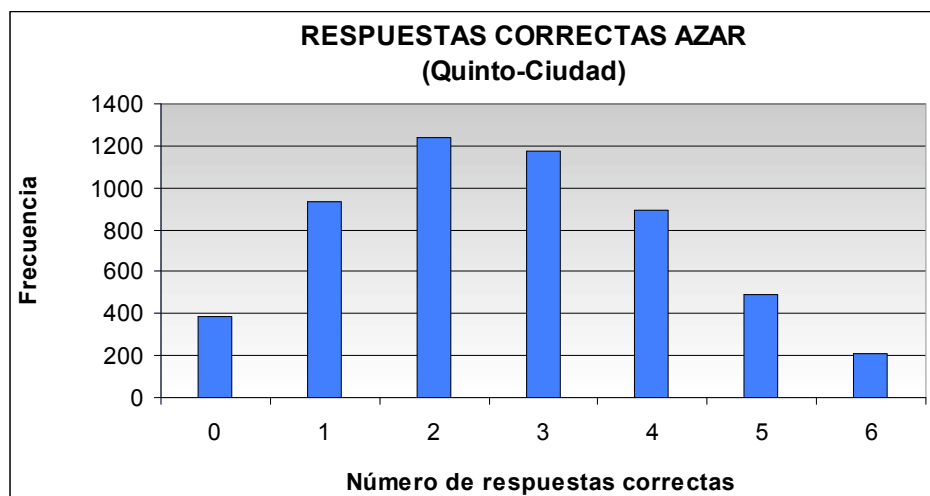
A la categoría de azar le correspondían 6 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para distinguir situaciones azarosas de situaciones deterministas. El puntaje máximo fue 6 y mínimo 0.

Azar. Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas (Ciudad- Grado 5)			
Respuestas Validas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	388	7,29%	7,29%

1	936	17,57%	24,86%
2	1237	23,23%	48,08%
3	1171	21,99%	70,07%
4	895	16,80%	86,88%
5	489	9,18%	96,06%
6	210	3,94%	100,00%

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas AZAR (Quinto-Ciudad)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
2,67	2	1,54	6	0

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 388 estudiantes y el máximo 6 obtenido por 210 estudiantes. Dos respuestas correctas obtienen 1237 estudiantes que constituye la mayor frecuencia de respuesta (moda). El promedio obtenido fue de 2.67 que corresponde a un desempeño medio con respecto a esta habilidad, y una desviación de 1.54 que indica una dispersión relativamente alta de puntajes.

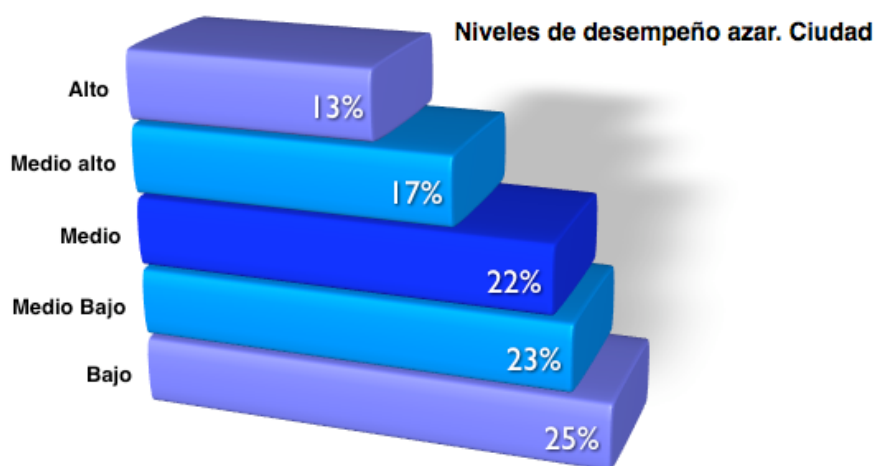


La distribución de los resultados es asimétrica ligeramente hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtienen resultados alrededor de la media.

Se definen niveles de rendimiento educativo de acuerdo a:

- los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem que considera que los ítems en general cumplen los parámetros de ajuste
- el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- criterios pedagógicos de expectativas de desempeño; se esperaría que de 6 preguntas posibles 3 es un número medio de respuestas dada la importancia de esta categoría en relación con pensamiento aleatorio. Aunque la media hubiera sido 2.63 no se estandariza ni normaliza los resultados a ese valor.

Niveles de desempeño AZAR criterios pedagógicos de rendimiento (Ciudad-Grado 5)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-1	1324	25%
Medio Bajo	2	1237	23%
Medio	3	1171	22%
Medio Alto	4	895	17%
Alto	5-6	699	13%



Según criterio de rendimiento pedagógico (definición de niveles) en la prueba, en la categoría AZAR, la población se ubica en niveles medios (22%) medios bajos (23%). Sin embargo un 30% obtienen puntajes medios altos y altos, lo que indica buenos rendimientos.

### *Combinatoria*

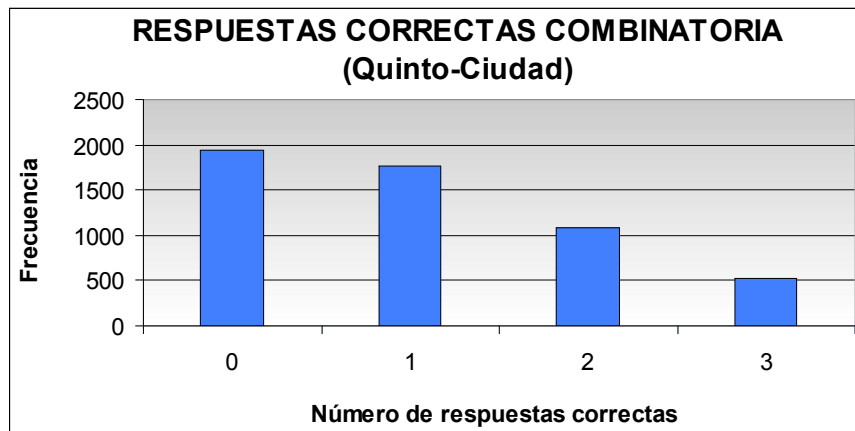
A la categoría de combinatoria le correspondían 4 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para generar procesos sistemáticos de combinación entre elementos. Como se mencionó en el apartado 2.2.1., el ítem número 9, correspondiente a esta categoría fue excluido.

Combinatoria (Quinto-Ciudad)			
Respuestas Validas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	1949	36,59%	36,59%
1	1760	33,05%	69,64%
2	1089	20,45%	90,09%
3	528	9,91%	100,00%

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 1949 estudiantes y el máximo 3 obtenido por 528 estudiantes.

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Combinatoria (Quinto-Ciudad)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
1,04	0	0,98	3	0

La media obtenida fue de 1.04 que corresponde a un desempeño medio con respecto a esta habilidad y una desviación de 0.98 que es relativamente alta indicando algunos puntajes atípicos.

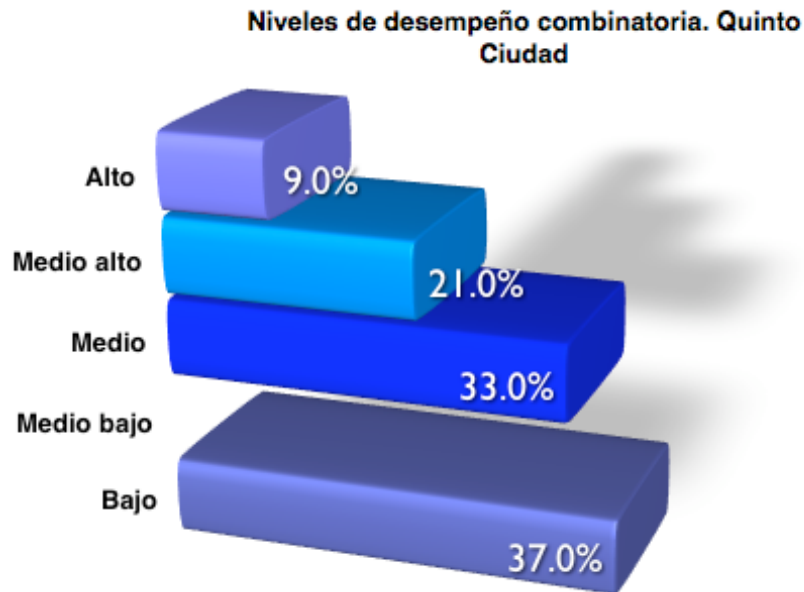


La distribución de los resultados es asimétrica con sesgo hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtiene resultados medios y bajos en esta categoría.

Se definen para esta categoría tres niveles dado el número reducido de preguntas. Los niveles se definen de acuerdo a:

- a) los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem (se excluye el ítem 9)
- c) el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- b) criterios pedagógicos de expectativa de desempeño, teniendo en cuenta el número reducido de preguntas.

Niveles de desempeño AZAR criterios pedagógicos de rendimiento (Ciudad-Grado 5)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0	1949	37%
Medio bajo		0	0%
Medio	1	1760	33%
Medio alto	2	1089	21%
Alto	3	528	9%



Según criterio de rendimiento pedagógico (expectativas de desempeño) en la prueba, en la categoría COMBINATORIA, la población se distribuye en los diferentes niveles. Dado el número de preguntas (4) no se considera con población el nivel medio bajo. Un 37% (puntaje 0) está en nivel bajo. Esto indica la necesidad de trabajar pedagógicamente este concepto, que no está esencialmente relacionado con el azar, pero es requisito necesario para la estimación probabilística, en especial para la definición de espacios muestrales o posibles ocurrencias

### *Estimación probabilística*

A la categoría de estimación probabilística le correspondían 8 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para estimar la probabilidad de un suceso. El puntaje máximo fue 8 y el mínimo 0

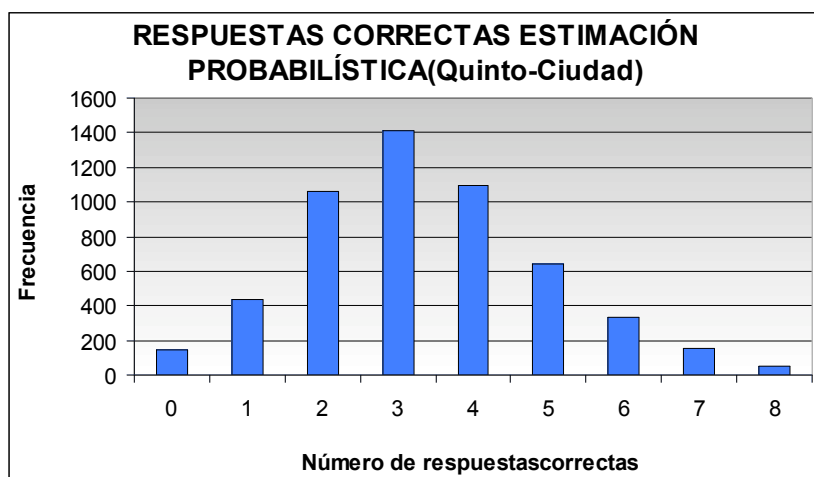
Estimación Probabilística (Quinto-Ciudad)			
Respuestas Validas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	147	2,76%	2,76%
1	434	8,15%	10,91%
2	1060	19,90%	30,81%
3	1413	26,53%	57,34%
4	1093	20,52%	77,86%
5	641	12,04%	89,90%
6	334	6,27%	96,17%
7	153	2,87%	99,04%
8	51	0,96%	100,00%

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 147 estudiantes y el máximo 8 obtenido por 51 estudiantes. Tres respuestas correctas obtienen 1413 estudiantes que

constituyen la mayor frecuencia de respuesta.

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Est. probabilística (Quinto-Ciudad)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
3,35	3	1,61	8	0

El promedio obtenido fue de 3.35 que corresponde a un desempeño medio con respecto a esta habilidad. La desviación estándar es relativamente alta indicando algunos puntajes atípicos.



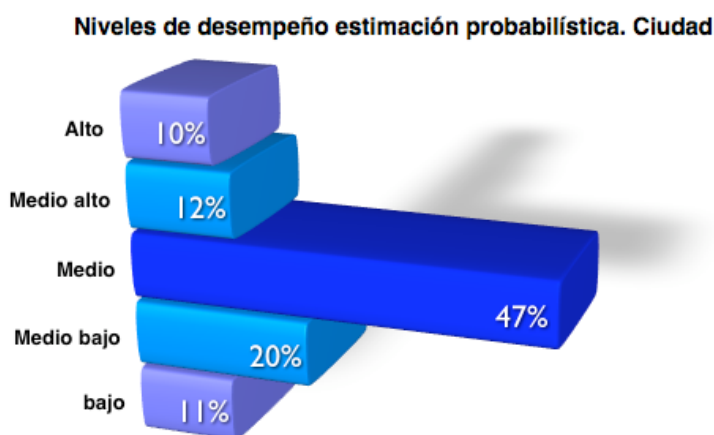
La distribución de los resultados es asimétrica hacia la izquierda, lo que indica que una parte de la población obtienen resultados medios bajos. De la misma manera se observa que un porcentaje relativamente alto de estudiantes obtienen buenos desempeños.

Se definen diferentes niveles de acuerdo a:

- a) los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem que considera que los ítems en general cumplen los parámetros de ajuste
- c) el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- b) criterios pedagógicos que definen que de 8 preguntas posibles un desempeño medio es adecuado es entre 3 y 4 preguntas acertadas:

Niveles de desempeño ESTIMACION PROBABILISTICA (Ciudad-Grado 5)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-1	1324	25%
Medio Bajo	2	1237	23%
Medio	3 -4	1171	22%

Medio Alto	5	895	17%
Alto	6-8	699	13%



Según criterio de rendimiento pedagógico (expectativas de desempeño) en la prueba, en la categoría de ESTIMACION PROBABILISTICA, gran parte de la población se ubica en niveles medios (47%). Sin embargo existe un 31% de la población en niveles medios bajos y bajos, que sugieren la necesidad de apoyo pedagógico para desarrollar este concepto, que es uno de los más importante en el pensamiento aleatorio a nivel matemático formal.

### *Distribución de puntajes*

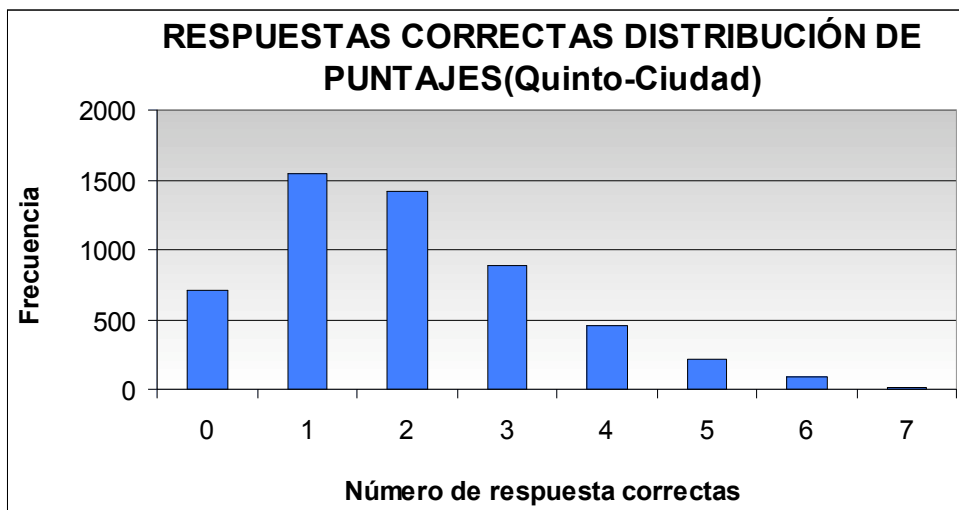
A la categoría de distribución le correspondían 7 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para interpretar sistemas de datos numéricos y gráficos que presentan distribución de poblaciones. El puntaje máximo era 7 y el mínimo 0.

Distribución de Puntajes (Quinto-Ciudad)			
Respuestas Validas	FRECUENCIA	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	711	13,35%	13,35%
1	1546	29,03%	42,38%
2	1415	26,57%	68,94%
3	885	16,62%	85,56%
4	454	8,52%	94,09%
5	209	3,92%	98,01%
6	89	1,67%	99,68%
7	17	0,32%	100,00%

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 711 estudiantes y el máximo 7 obtenido por 17 estudiantes. Una respuesta correcta es obtenida por 1546 estudiantes que constituyen la mayor frecuencia de respuesta.

Promedio y desviación estándar Estimación probabilística (Quinto-Ciudad)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
1,98	1	1,43	7	0

El promedio obtenido fue de 1.98 que corresponde a un desempeño bajo con respecto a esta habilidad y una desviación de 1.43 que indica que no hay muchos puntajes atípicos pronunciados.



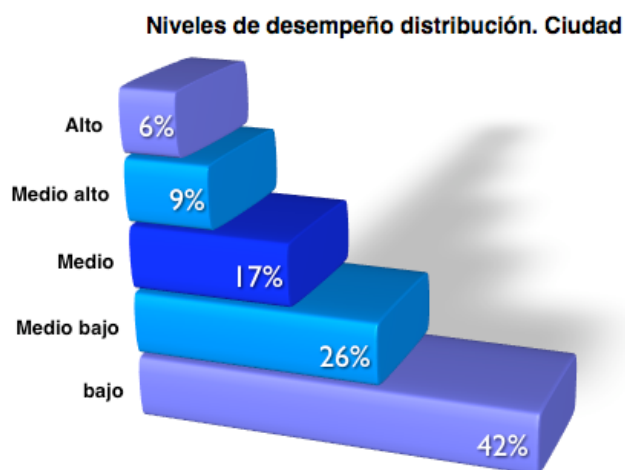
La distribución de los resultados es asimétrico hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtiene resultados relativamente bajos. Lo que coloca esta categoría en un lugar prioritario de trabajo pedagógico, pues es la que obtiene el desempeño más bajo, en relación con las demás categorías. La desviación estándar no muy alta, indica que buena parte de la población es la que obtiene puntajes bajos.

Se definen los niveles de acuerdo a:

- a) los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem (consideraciones a las altas dificultades en los ítems 22, 23 y 25;
- c) el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- b) criterios pedagógicos, de 7 preguntas posibles se definen 3 preguntas como desempeño medio; aunque la media fuera de 1.98 no se estandariza o normaliza a este valor.

Niveles de desempeño DISTRIBUCION DE PUNTAJES (Ciudad-Grado 5)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-1	2257	42%
Medio Bajo	2	1415	26%
Medio	3	885	17%

Medio Alto	4	454	9%
Alto	5-7	315	6%



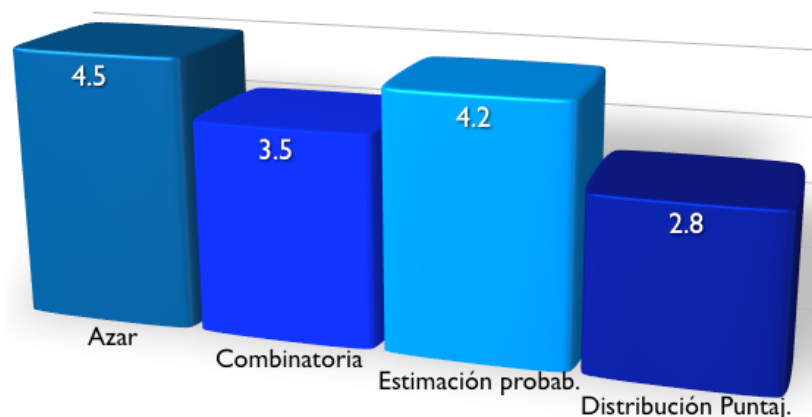
Según criterio de rendimiento pedagógico (expectativa de desempeño) en la prueba, en la categoría DISTRIBUCION DE PUNTAJES, la mayoría de la población se ubica en niveles bajos (42%) y medios bajos (26%). De acuerdo a ello se hace indispensable mejorar los rendimientos en este concepto mediante mejoras en los sistemas curriculares y de enseñanza, en especial en la interpretación de datos, gráficas y tablas, y uso de notación matemática.

### 2.3.1.3 Desempeños según categorías

Los puntajes (sobre 10) en las diferentes categorías se dieron diferenciados encontrándose mejores resultados en cuanto a azar y estimación probabilística que en las categorías de distribución y combinatoria.

CIUDAD 5	AZAR	COMBINATORIA	EST. PROBABILISTICA	DIST. PUNTAJES
Promedio punteado en porcentaje	4.5	3.5	4.2	2.8

### Puntuación comparativa por categorías



Las categorías más críticas en sus rendimientos son distribución de puntajes y combinatoria lo cual implica que los sistemas de enseñanza deben favorecer el desarrollo de estas habilidades. Sin embargo es posible que un factor de fatiga hay influido en los desempeños en los últimos ítems, en la categoría de distribución. Aunque los rendimientos en las otras dos categorías se comportan acercándose a un nivel de realización medio (5 de una puntuación posible de 10) es muy importante, desde el punto de vista educativo, también favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con azar y estimación probabilística.

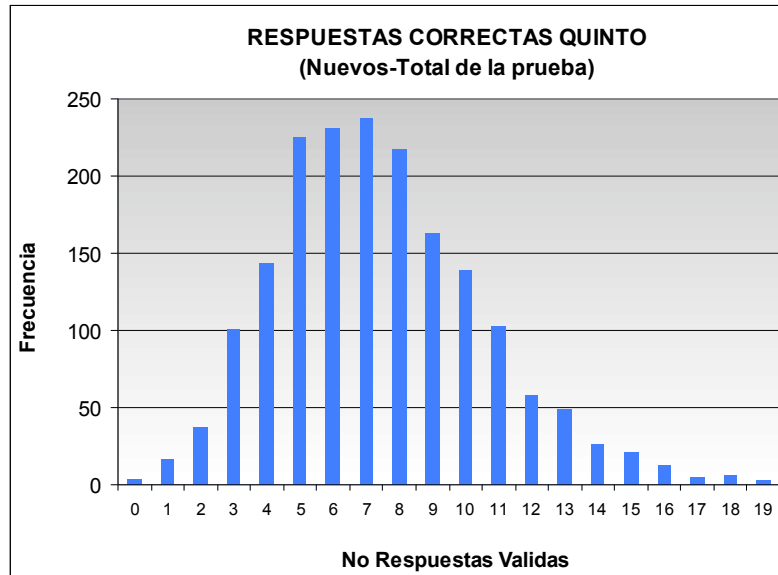
### 2.3.2 Colegios NUEVOS

#### 2.3.2.1 Rendimiento General: Prueba Pensamiento Aleatorio

Frecuencia de respuestas correctas y porcentajes Grado 5 (NUEVOS-Total prueba)			
Respuestas Validas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	4	0,22%	0,22%
1	16	0,89%	1,11%
2	37	2,06%	3,17%
3	101	5,62%	8,79%
4	144	8,01%	16,80%
5	225	12,51%	29,31%
6	231	12,85%	42,16%
7	237	13,18%	55,34%
8	217	12,07%	67,41%
9	163	9,07%	76,47%
10	139	7,73%	84,20%
11	103	5,73%	89,93%
12	58	3,23%	93,16%
13	49	2,73%	95,88%
14	26	1,45%	97,33%
15	21	1,17%	98,50%

16	13	0,72%	99,22%
17	5	0,28%	99,50%
18	6	0,33%	99,83%
19	3	0,17%	100,00%

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Grado 5 (Nuevos-Total prueba)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
7,42	7	3,14	19	0

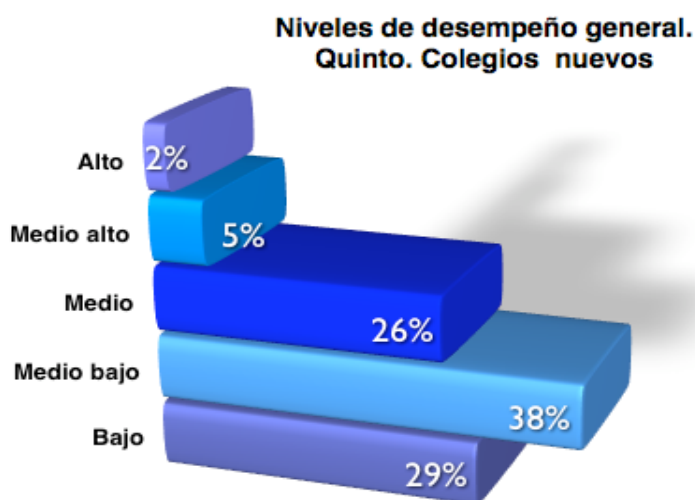


El número máximo de respuestas correctas fueron 19, obtenido por 3 estudiantes, 4 estudiantes no contestaron ninguna correcta. Ocho fue el número de respuestas correctas con mayor frecuencia (217 estudiantes). El promedio obtenido por los participantes es de 7,42 con una desviación estándar relativamente alta de 3.14 que indica que existe una variabilidad alta en las capacidades de respuesta. La distribución de la población es asimétrica con sesgo a la izquierda, lo cual indica que una considerable parte de la población se ubica en rendimientos medio bajos y bajos, y una pequeña parte obtiene puntajes máximos,

Se definen niveles de acuerdo a:

- los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem (eliminación del ítem 9 y consideraciones a las altas dificultades en los ítems 22, 23 y 25);
- el comportamiento de los resultados en la población denominada CIUDAD como punto de comparación (media, desviación y mínimos y máximos);
- criterios pedagógicos, en los cuales se define como rendimiento medio esperado para cualquier población o subgrupo puntajes medios entre 9 y 12. No se estandariza o normalizan los resultados según la media de 7.42 sino se define el rango medio según criterios educativos. También se consideró que el ítem 9, se excluyó, ya que sólo evalúa una combinatoria basada en una suma (dificultad mínima) y los ítems 22, 23 y 25 que pudieron no haber sido resueltos por fatiga de los niños.

Niveles de desempeño según criterios pedagógicos de rendimiento (Ciudad-Grado 5)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-5	527	29%
Medio Bajo	6-8	685	38%
Medio	9-12	463	26%
Medio Alto	13-15	96	5%
Alto	16-19	27	2%



Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba (expectativas de desempeño), la mayoría de la población de los colegios nuevos se ubica en niveles medios bajos (38%) y bajos (29%). De acuerdo a ello se hace urgente mejorar los rendimientos en pensamiento aleatorio mediante mejoras en los sistemas de enseñanza.

### 2.3.1.2 Categorías: Azar, combinatoria, estimación probabilística, distribución de puntajes

#### *Azar*

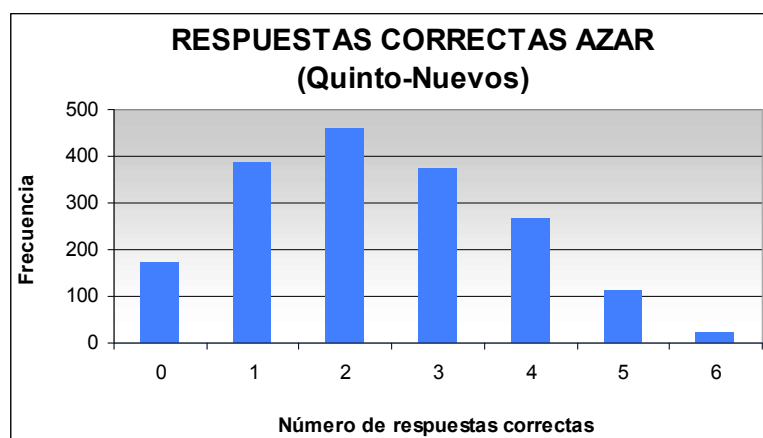
A la categoría de azar le correspondían 6 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para distinguir situaciones azarosas de situaciones deterministas. El puntaje máximo fue 6 y el mínimo 0.

Azar (Quinto-Nuevos)			
Respuestas Validas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	175	9,73%	9,73%

1	387	21,52%	31,26%
2	459	25,53%	56,79%
3	374	20,80%	77,59%
4	266	14,79%	92,38%
5	114	6,34%	98,72%
6	23	1,28%	100,00%

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas AZAR (Quinto-Nuevos)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
2,34	2	1,44	6	0

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 175 estudiantes y el máximo 6 obtenido por 23 estudiantes. Dos respuestas correctas obtienen 459 estudiantes que constituye la mayor frecuencia de respuesta. El promedio obtenido fue de 2.34 que corresponde a un desempeño medio bajo con respecto a esta habilidad.



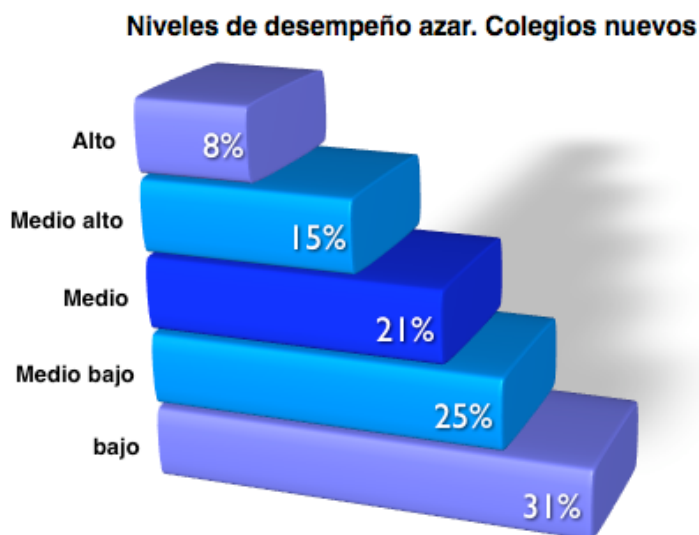
La distribución de los resultados es asimétrico hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtienen resultados relativamente medios bajos en esta categoría.

Se definen niveles de acuerdo a:

- a) los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem que considera que los ítems en general cumplen los parámetros de ajuste
- c) el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población CIUDAD (media, desviación y mínimos y máximos);
- b) criterios pedagógico que definen un desempeño medio de 3 respuestas correctas, considerando la importancia de esta categoría para el desarrollo del pensamiento aleatorio. No se estandariza o normalizan los resultados según la media de 2.34.

Niveles de desempeño AZAR (Colegios Nuevos -Grado 5)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-1	562	31%

Medio Bajo	2	459	25%
Medio	3	374	21%
Medio Alto	4	266	15%
Alto	5-6	137	8%



Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba (expectativas de desempeño, en la categoría AZAR, la mayoría de la población se ubica en niveles medios bajos (25%) y bajos (31%). Se requiere mejorar los sistemas curriculares y de enseñanza con respecto al aprendizaje de esta categoría.

### *Combinatoria*

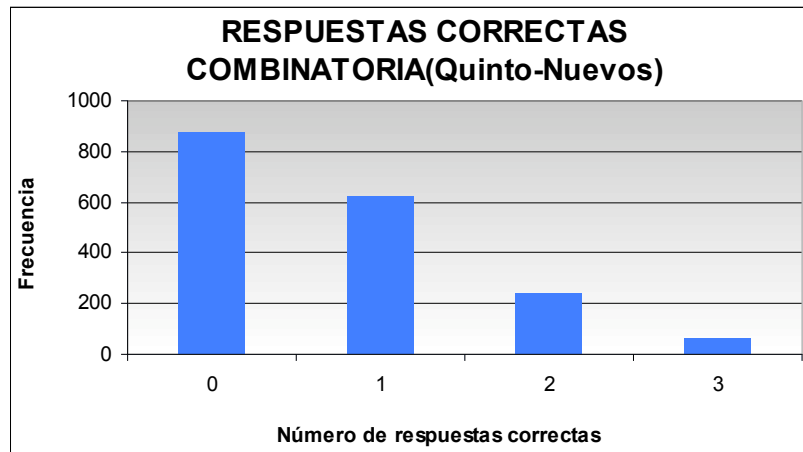
A la categoría de combinatoria le correspondían 4 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para generar procesos sistemáticos de combinación entre elementos. Como se mencionó en el apartado 2.2.1., el ítem número 9, correspondiente a esta categoría fue excluido, por lo que los análisis que se presentan a continuación parten del resultado sobre 3 preguntas.

Combinatoria (Quinto-Nuevos)			
Respuestas Validas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	877	48,78%	48,78%
1	623	34,65%	83,43%
2	236	13,13%	96,55%
3	62	3,45%	100,00%

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 877 estudiantes y el máximo 3 obtenido por 62 estudiantes. El 48.78% de los estudiantes no obtienen ninguna respuesta correcta, que se constituye en la mayor frecuencia de respuesta.

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Combinatoria (Quinto-Nuevos)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
0,71	0	0,82	3	0

El promedio obtenido fue de 0,71 que corresponde a un desempeño medio bajo con respecto a esta habilidad.



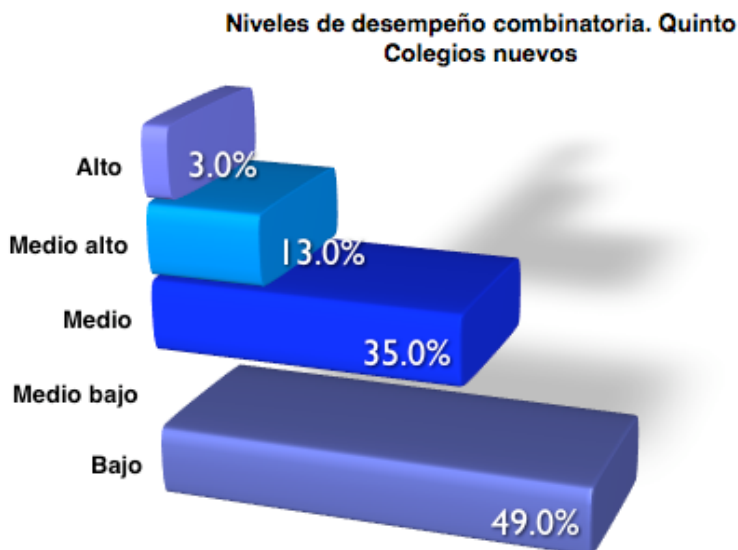
La distribución de los resultados es asimétrico hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtienen resultados bajos en esta categoría. Es importante proporcionar a los estudiantes experiencias de aprendizaje que les permita mejorar sus desempeños con respecto al uso de procedimientos sistemáticos de combinación o asociación de elementos. Esta categoría es una condición necesaria para muchos problemas de estimación probabilística.

Se definen niveles de acuerdo a:

- a) los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem (se excluye el ítem 9)
- c) el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población Ciudad (media, desviación y mínimos y máximos);
- b) criterios pedagógicos en especial referidos al número reducido de preguntas y una expectativa de desempeño medio de 1 pregunta de tres posibles

Niveles de desempeño COMBINATORIA (Colegios Nuevos-Grado 5)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0	877	49%
Medio bajo		0	0%

Medio	1	623	35%
Medio alto	2	236	13%
Alto	3	62	3%



Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba (expectativas de desempeño), en la categoría COMBINATORIA, la población se distribuye mayormente en los niveles medio y bajo. Un 49% (puntaje 0) está en nivel bajo. Esto indica la necesidad de trabajar pedagógicamente este concepto que no está esencialmente relacionado con el azar, pero es requisito necesario para la estimación probabilística, en especial para la definición de espacios muestrales o posibles ocurrencias

### *Estimación probabilística*

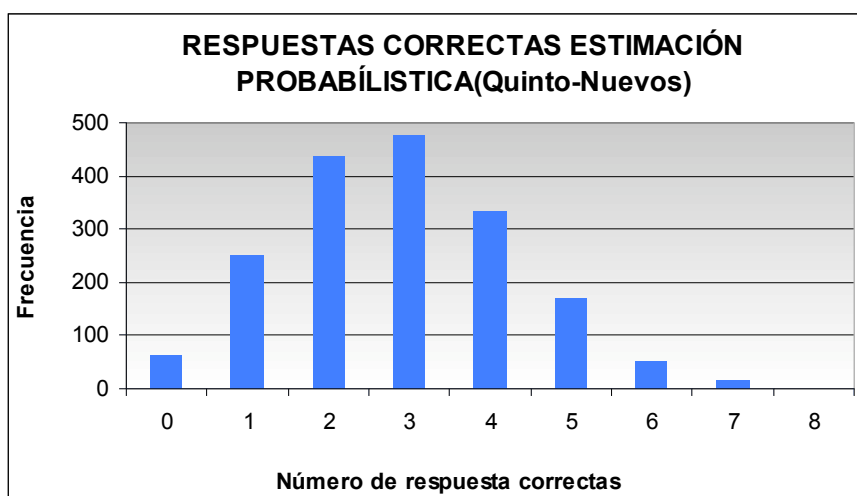
A la categoría de estimación probabilística le correspondían 8 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para estimar la probabilidad de un suceso. El puntaje máximo era 8 y el mínimo 0. El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 61 estudiantes y el máximo 8 obtenido por 1 estudiante. Tres respuestas correctas obtenidas por 476 estudiantes constituyen la mayor frecuencia de respuesta.

Estimación probabilística (Quinto-Nuevos)			
Respuestas Validas	FRECUENCIA	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	61	3,39%	3,39%
1	253	14,07%	17,46%
2	438	24,36%	41,82%
3	476	26,47%	68,30%
4	333	18,52%	86,82%

5	170	9,45%	96,27%
6	51	2,84%	99,11%
7	15	0,83%	99,94%
8	1	0,06%	100,00%

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Estimación Probabilística (Quinto-Nuevos)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
2,87	3	1,44	8	0

El promedio obtenido fue de 2.87 que corresponde a un desempeño bajo con respecto a esta habilidad.



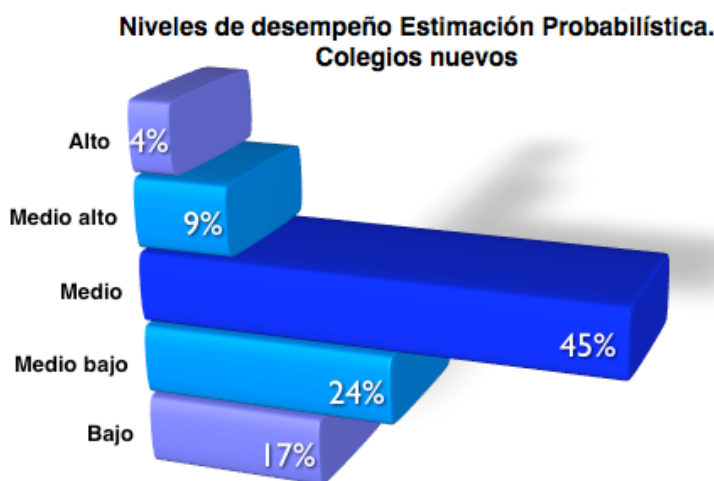
La distribución de los resultados se sesga hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtienen resultados relativamente bajos en esta categoría. De la misma manera se observa que un porcentaje relativamente bajo de estudiante obtienen buenos desempeños.

Se definen niveles de acuerdo a:

- los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem que considera que los ítems en general cumplen los parámetros de ajuste
- el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población Ciudad (media, desviación y mínimos y máximos);
- criterios pedagógicos, que definen 3 y 4 respuestas correctas como nivel medio de desempeño, dada la importancia de la categoría.

Niveles de desempeño ESTIMACION PROBABILISTICA (Colegios nuevos-Grado 5)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-1	314	17%
Medio Bajo	2	438	24%

Medio	3 -4	809	45%
Medio Alto	5	170	9%
Alto	6-8	67	4%



Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba, en la categoría ESTIMACION PROBABILISTICA, la población se ubica en niveles medios (45%), medios bajos (24)% y bajos (17%). Se requiere apoyos pedagógicos para desarrollar este concepto, que es el más importante en el pensamiento aleatorio a nivel matemático formal.

### *Distribución de puntajes*

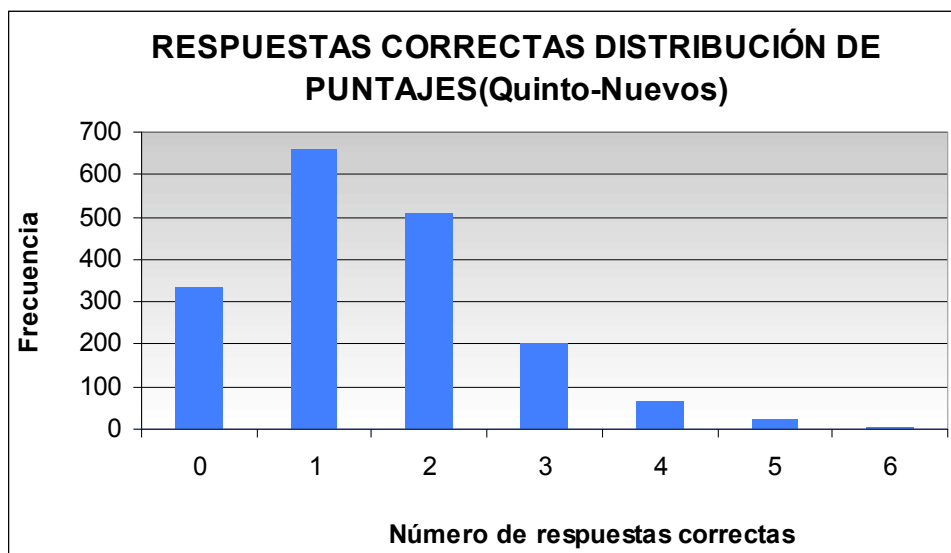
A la categoría de distribución le correspondían 7 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para interpretar textos, sistemas de datos numéricos y gráficos que presentan distribución de puntuaciones. El puntaje máximo fue 6 y el mínimo 0.

Distribución de puntajes (Quinto-Nuevos)			
Respuestas Validas	FRECUENCIA	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	334	18,58%	18,58%
1	659	36,65%	55,23%
2	506	28,14%	83,37%
3	204	11,35%	94,72%
4	66	3,67%	98,39%
5	24	1,33%	99,72%
6	5	0,28%	100,00%

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 334 estudiantes y el máximo 6 obtenido por 5 estudiantes. Una respuesta correctas obtienen 659 estudiantes que constituyen la mayor frecuencia de respuesta.

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Distribución de Puntajes(Quinto-Nuevos)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
1,50	1	1,13	6	0

El promedio obtenido fue de 1.50 que corresponde a un desempeño bajo con respecto a esta habilidad.



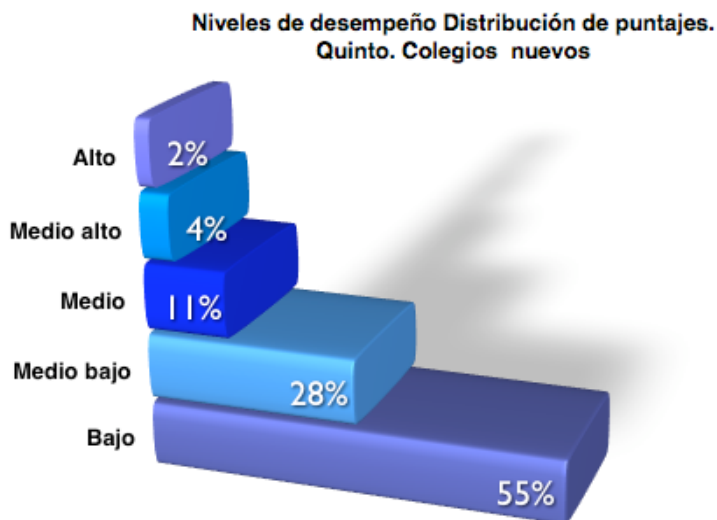
La distribución de los resultados es asimétrica marcadamente hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtiene resultados bajos, lo que coloca esta categoría en un lugar prioritario de trabajo pedagógico, pues es la que obtiene el desempeño más bajo en relación con las demás categorías. Adicionalmente, se observa que la desviación estándar es pequeña, indicando que buena parte de la población obtiene puntajes bajos.

Se definen niveles de acuerdo a:

- a) los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem (consideraciones a las altas dificultades en los ítems 22 , 23 y 25;
- c) el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población Ciudad (media, desviación y mínimos y máximos);
- b) criterios pedagógicos, que define rendimientos medios en la obtención de 3 preguntas correctas de 7 posibles

Niveles de desempeño según criterios pedagógicos de rendimiento distribución (Ciudad-Grado 5)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-1	993	55%
Medio Bajo	2	506	28%

Medio	3	204	11%
Medio Alto	4	66	4%
Alto	5-7	315	2%



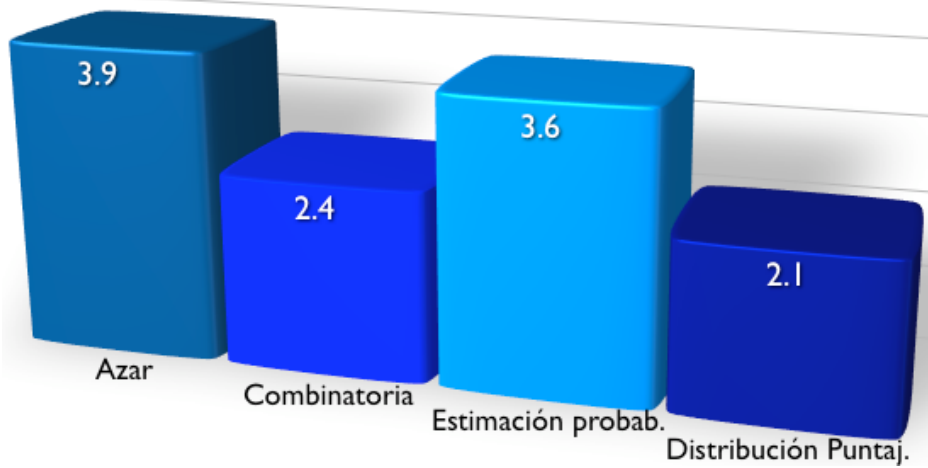
Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba (expectativas de desempeño), en la categoría **DISTRIBUCION DE PUNTAJES**, la mayoría de la población se ubica en niveles bajos (55%) y medios bajos (28%). De acuerdo a ello se hace indispensable mejorar los rendimientos en este concepto mediante mejoras en los sistemas de enseñanza, en especial en la interpretación de datos, gráficas y tablas.

### 2.3.2.3 Desempeños según categorías

Los desempeños en las diferentes categorías, en una escala sobre 10, se dieron diferenciados encontrándose mejores resultados en cuanto a azar y estimación probabilística que en las categorías de distribución y combinatoria.

NUEVOS 5	azar	Combinatoria	Estimación probabilística	Distribución de puntajes
Promedio puntuado en porcentaje	3.9	2.4	3.6	2.1

### Puntuación comparada por categorías



Las categorías más críticas en sus rendimientos son distribución de puntajes y combinatoria lo cual implica que los sistemas de enseñanza deben favorecer el desarrollo de estas habilidades. Sin embargo es posible que un factor de fatiga hay influido en los desempeños en distribución en los últimos ítems. Aunque los rendimientos en las otras dos categorías son más altos es muy importante, desde el punto de vista educativo, favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con azar y estimación probabilística.

### 3 . PRUEBA PENSAMIENTO ALEATORIO GRADO 9

Las pruebas comprender de pensamiento aleatorio se proponen identificar y describir los grados de comprensión que tienen los jóvenes de grado noveno de fenómenos aleatorios en relación con cuatro conceptos fundamentales: azar, combinatoria, estimación probabilística y distribución.

Para cada uno de los conceptos se propone un criterio o finalidad, como se estableció en el grado quinto, que sería deseable que los estudiantes estuvieran en capacidad de alcanzar. Los resultados de la prueba nos proporciona información con respecto a:

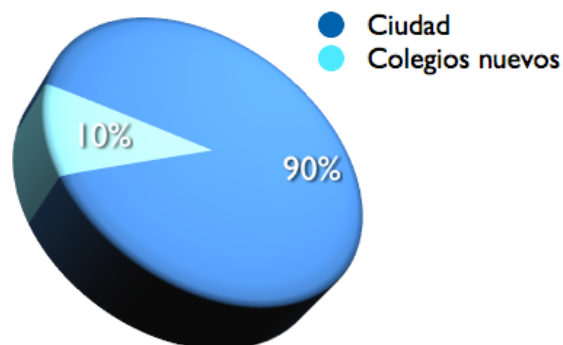
1. las capacidades que tienen los jóvenes para distinguir eventos azarosos de eventos deterministas o deducibles (azar),
2. la capacidad que tienen los jóvenes para generar procedimientos combinatorios como condición para la definición de espacios muestrales y la realización de estimaciones probabilísticas (combinatoria),
3. la capacidad que tienen los jóvenes de realizar estimaciones probabilísticas fundamentadas en la probabilidad empírica y formal, a partir de algunos espacios muestrales que surgen de combinatorias (estimación probabilística)
4. la capacidad que tienen los jóvenes para interpretar datos representados textualmente, gráficamente y numéricamente en términos de distribución de poblaciones según alguna variable (distribución)

#### 3.1. Muestra

En la presentación de la prueba participaron 4674 jóvenes de noveno grado de diferentes tipos de colegios, BID, oficiales y privados. Para el análisis se consideran separadamente dos grupos: la ciudad total y los colegios BID.

	TIPO			TOTAL
	NUEVOS	CIUDAD		
		OFICIAL	PRIVADO	
Número de Estudiantes	487	3008	1179	4674
% de Estudiantes	10,41%	64,4%	25,2%	100%
Número de Estudiantes	487	4187		4674
% de Estudiantes	10,41%	89,59		100%
Número de Colegios	11	61	38	110
% de Colegios	10%	55,45%	34,55%	100%
Número de Colegios	11	99		110
% de Colegios	10%	90%		100%

### Distribución de la población por sectores



### 3.2 Análisis de ítems según Teoría de Respuesta al Ítem. Aplicaciones del Modelo Rasch

Se realizó un análisis por cada uno de los ítems de la prueba, siguiendo el modelo Rasch, para determinar su pertinencia en el análisis de la habilidad según parámetros de dificultad, discriminación, ajuste y correlación. También se analizó la pertinencia de las claves en relación con los diferentes distractores en cada ítem.

#### *Parámetros de ajuste, dificultad y discriminación*

Para analizar los parámetros en cada uno de los ítems de una manera más ajustada, se excluyeron de la población aquellos sujetos que presentaban opciones con respuestas omitidas o con multimarca. Es así como el total de la población para la aplicación del modelo de Rasch, se realizó para los primeros 3 ítems con 4674 estudiantes y para los otros con 4675.

ÍTEM	DIFICULTAD	N ABORDAN	N CORRECTO	AJUSTE PRÓXIMO	AJUSTE LEJANO	CORRELACIÓN	DISCRIMINACIÓN	PORCENTAJE
1	-0,376	4674	1748	1,03	1,03	0,33	0,91	0,37
2	0,947	4674	736	1,21	1,43	0,06	0,78	0,16
3	0,098	4674	1325	0,94	0,92	0,41	1,11	0,28
4	-0,001	4675	1409	1,03	1,02	0,32	0,95	0,3
5	0,514	4675	1007	0,95	0,92	0,39	1,07	0,22
6	-0,968	4675	2336	0,97	0,96	0,39	1,13	0,5
7	0,168	4675	1268	0,95	0,93	0,4	1,09	0,27
8	-0,535	4675	1902	1,08	1,1	0,28	0,74	0,41
9	0,033	4675	1380	0,91	0,87	0,44	1,18	0,29
10	-3,649	4675	4291	1,03	1,27	0,17	0,96	0,92
11	1,063	4675	674	1,06	1,15	0,21	0,93	0,14
12	0,805	4675	818	1,02	1,15	0,26	0,95	0,17
13	0,314	4675	1153	1	1,02	0,33	0,99	0,25
14	-1,634	4675	2997	0,95	0,91	0,4	1,15	0,64
15	1,068	4675	671	1,02	1,05	0,27	0,98	0,14
16	0,079	4675	1341	1,1	1,13	0,23	0,8	0,29
17	1,15	4675	630	1,18	1,43	0,07	0,82	0,13
18	-0,539	4675	1906	0,99	0,99	0,37	1,02	0,41
19	0,281	4675	1178	1,01	1	0,33	0,99	0,25

20	0,406	4675	1084	0,96	0,94	0,38	1,06	0,23
21	-0,334	4675	1709	0,83	0,8	0,54	1,46	0,37
22	0,657	4675	911	0,9	0,89	0,42	1,11	0,19
23	0,133	4675	1296	0,98	1,04	0,35	1,01	0,28
24	0,632	4675	927	0,96	1,01	0,35	1,03	0,2
25	-0,311	4675	1687	0,95	0,93	0,42	1,15	0,36

Las columnas indican:

*Item:* indica la posición del ítem en el cuadernillo.

*Dificultad:* dificultad del ítem en valores logit. a mayor valor, mayor dificultad

*n abordan:* número de estudiantes que abordan el ítem.

*n correcto:* número de estudiantes que responden correctamente el ítem.

*Ajustes próximo y lejano:* indica el grado de ajuste de los datos al modelo de rasch para cada ítem. Se espera que los valores fluctúen entre 0.5 y 1.5. Valores inferiores o más altos, indican desajuste serio.

*Correlación:* indica la correlación entre responder bien el ítem y el puntaje en la prueba. Se espera que sea positiva y alta.

*Discriminación:* indica qué tan bien discrimina la pregunta a la población evaluada. Se espera que el valor sea 1, pero son aceptables valores entre 0.6 y 1.4.

El ítem 10 por considerarse el de menor dificultad, fue excluido para el momento de generar los resultados, al igual que el ítem 17, que fue excluido debido a que representaba una dificultad muy alta para la población evaluada, que podría ser ocasionada por la ausencia de habilidad para solucionar o plantear ecuaciones.

### *Claves y Opciones*

Para cada ítem se realizó un análisis de claves y opciones para determinar si este era adecuado para medir la habilidad en términos de la respuesta correcta y su relación con los distractores. Se esperaba que las respuestas correctas o claves obtuvieran un mayor valor en el promedio de habilidad que las demás opciones (ver anexo). En todos los ítems, exceptuando los dos excluidos (10 y 17) y el ítem N° 2, el promedio de habilidad es mayor para la clave, esto indica, en general, que las claves, y los distractores eran adecuados para medir la habilidad en la población. El ítem 2 se analiza en la sección 4 sobre sesgos y errores

### **3.3 Análisis de Desempeños**

La prueba de noveno grado estaba compuesta por 25 ítems que intentaban valorar los desempeños de los estudiantes en diferentes problemas relacionados con el pensamiento aleatorio. La distribución de los ítems por cada una de las categorías se realizó así:

	Conceptos	Descripción	Ítems (Grado 9)	Número de ítems
<b>Pensamiento Aleatorio</b>	Azar	Sucesos aleatorios y deterministas	1, 2, 3, 4, 5, 6	6
	Combinatoria	Combinatorias y permutaciones	7, 8, 9, 10, 11	5
	Estimación probabilística	Probabilidad de ocurrencia de un suceso	12, 13, 14, 15, 16, 17	6
	Distribución de puntajes	Sistemas de representación externa de puntuaciones	18, 19, 20 21, 22, 23, 24, 25	8

### 3.3.1 Colegios Ciudad: Sector oficial y privado

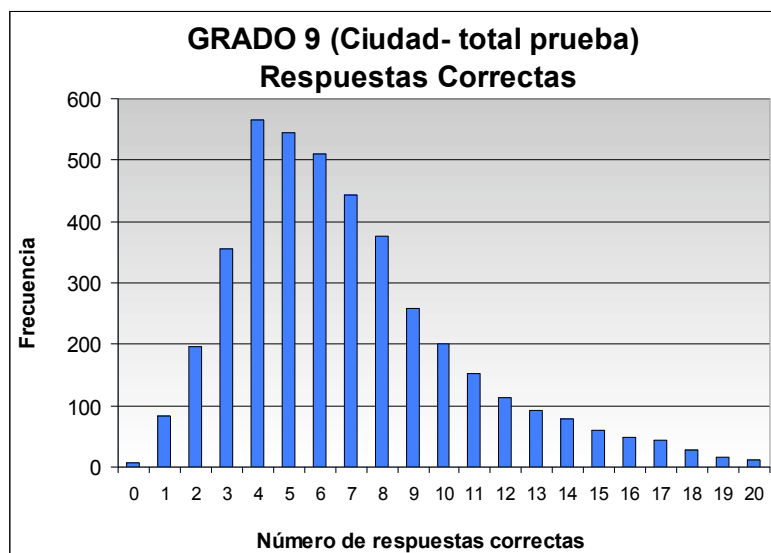
#### 3.3.1.1 Rendimiento General: Prueba Pensamiento Aleatorio

Frecuencia de respuestas correctas y porcentajes Grado 9 (Ciudad-Total prueba)			
Respuestas Válidas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	7	0,17%	0,17%
1	82	1,96%	2,13%
2	196	4,68%	6,81%
3	356	8,50%	15,31%
4	566	13,52%	28,83%
5	544	12,99%	41,82%
6	511	12,20%	54,02%
7	444	10,60%	64,63%
8	376	8,98%	73,61%
9	258	6,16%	79,77%
10	200	4,78%	84,55%
11	152	3,63%	88,18%
12	114	2,72%	90,90%
13	93	2,22%	93,12%
14	79	1,89%	95,01%
15	61	1,46%	96,47%
16	48	1,15%	97,61%
17	45	1,07%	98,69%
18	28	0,67%	99,36%
19	16	0,38%	99,74%
20	11	0,26%	100,00%

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Grado 9(Ciudad-Total prueba)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
6,89	4,00	3,70	20	0

El número máximo de respuestas correctas fueron 20, obtenido por 11 estudiantes, 7 estudiantes no contestaron ninguna respuesta correcta. Cuatro fue el número de respuestas correctas con mayor frecuencia (566 estudiantes). El promedio obtenido por

los participantes es de 6,89 con una desviación estándar relativamente alta de 3,7 que indica que existe una variabilidad alta en las puntuaciones de los estudiantes.



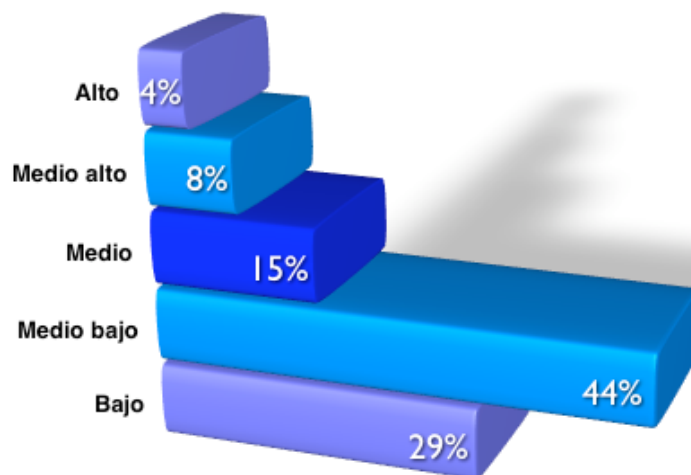
La distribución de la población es asimétrica con un sesgo a la izquierda, lo cual indica que una considerable parte de la población se ubica en rendimientos bajos. La distribución indica que los estudiantes en general poseen una capacidad y conocimiento bajo en pensamiento aleatorio.

Se definen niveles de acuerdo a:

- a) los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem (eliminación del ítem 10 por mínima dificultad (-3.649) y 17 por alta dificultad (1.15) (ver sección 3.2.1);
- c) el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- b) criterios pedagógicos, que define una puntuación media entre 9 y 11, no se estandarizan o normalizan los resultados según la media de 6.89 o según otro comportamiento de algún sector de la población. Se tiene en cuenta que el ítem 10 evalúa una combinatoria sólo basada en una suma, por ello su facilidad y el 17 incluye una modelización de ecuaciones, por ello su dificultad

Niveles de desempeño (Ciudad-Grado 9)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-4	1207	29%
Medio Bajo	5-8	1875	44%
Medio	9-11	610	15%
Medio Alto	12-15	347	8%
Alto	16-20	148	4%

### Niveles de desempeño general Noveno. Ciudad



Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba, la mayoría de la población se ubica en niveles medios bajos (44%) y bajos (29%). De acuerdo a ello se hace indispensable aumentar los rendimientos en pensamiento aleatorio mediante mejoras en los sistemas curriculares y de enseñanza de noveno grado.

#### 3.3.1.2 Categorías: Azar, combinatoria, estimación probabilística, distribución de puntajes

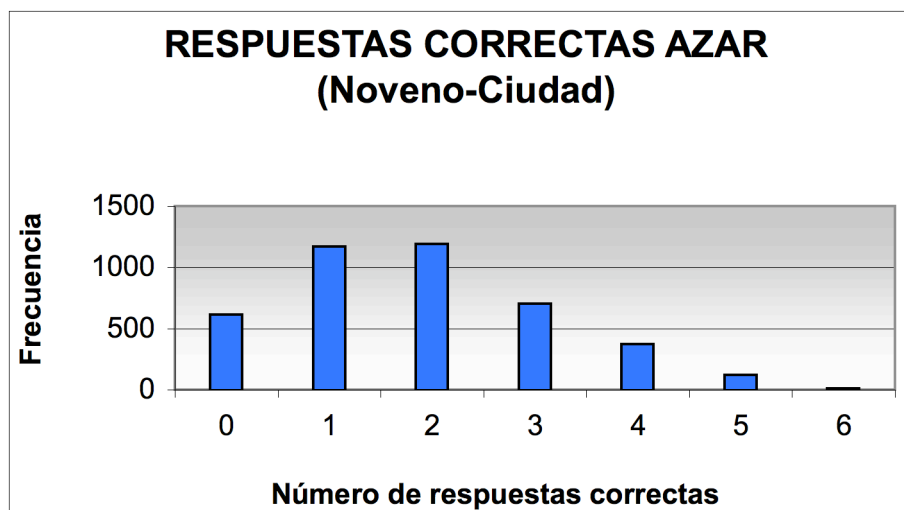
##### *Azar*

A la categoría de azar le correspondían 6 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para distinguir situaciones azarosas de situaciones deterministas. El puntaje máximo era 6 y el mínimo 0.

Azar (Noveno-Ciudad)			
Respuestas Validas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	616	14,71%	14,71%
1	1171	27,97%	42,68%
2	1190	28,42%	71,10%
3	701	16,74%	87,84%
4	374	8,93%	96,78%
5	123	2,94%	99,71%
6	12	0,29%	100,00%

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas AZAR (Noveno-Ciudad)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
1,87	2	1,30	6	0

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 616 estudiantes y el máximo 6 obtenido por 12 estudiantes. Dos respuestas correctas obtienen 1190 estudiantes que constituye la mayor frecuencia de respuesta. El promedio obtenido fue de 1.87 que corresponde a un desempeño bajo con respecto a esta habilidad.



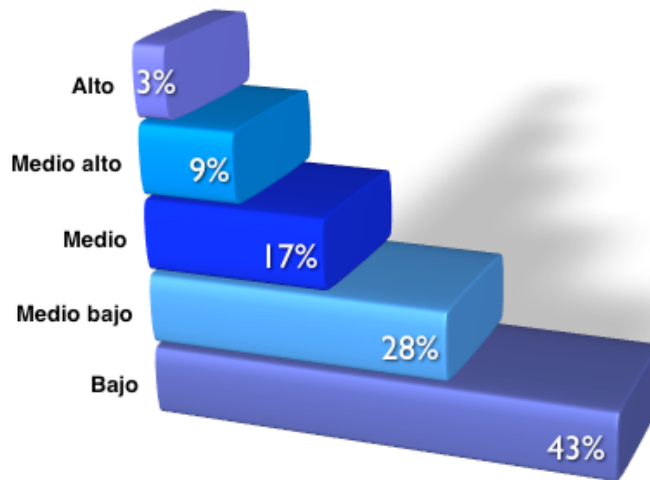
La distribución de los resultados se sesga ligeramente hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtienen resultados relativamente bajos en esta categoría.

Se definen niveles de acuerdo a:

- los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem que considera que los ítems en general cumplen los parámetros de ajuste
- el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- criterios pedagógicos, que establecen un medio de desempeño en 3 preguntas de 6 posibles, en una de las categorías más importantes para el desarrollo del pensamiento aleatorio

Niveles de desempeño AZAR criterios pedagógicos de rendimiento (Ciudad-Grado 9)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-1	1787	43%
Medio Bajo	2	1190	28%
Medio	3	701	17%
Medio Alto	4	374	9%
Alto	5-6	135	3%

### Niveles de desempeño Azar Noveno. Ciudad



Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba (expectativas de desempeño), en la categoría AZAR, la población se ubica en niveles bajos (43%) y medio bajo (28%). Los puntajes esperados pedagógicamente no se alcanzan y se hace necesario mejorar las prácticas de enseñanza con respecto a esta categoría.

### Combinatoria

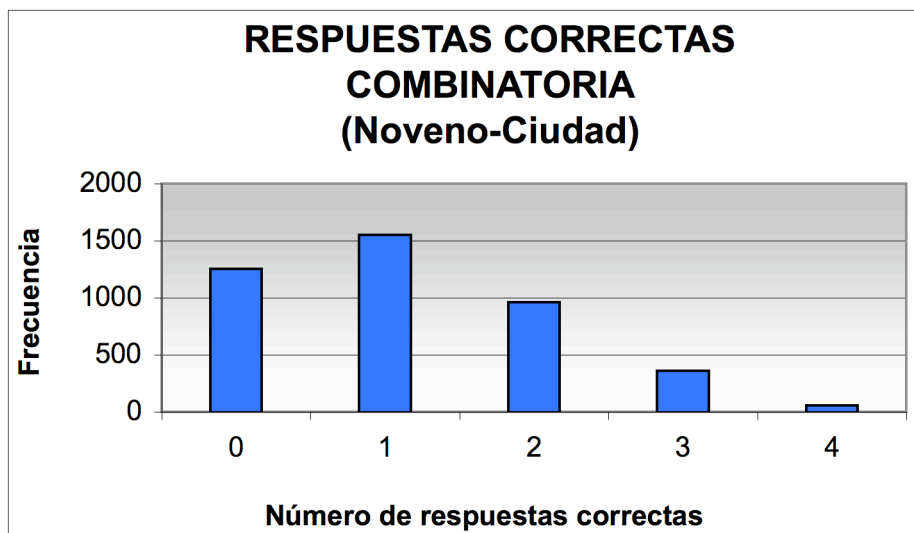
A la categoría de combinatoria le correspondían 5 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para generar procesos sistemáticos de combinación entre elementos para identificar un espacio muestral o de ocurrencias. Como se mencionó en el apartado 2.2.1., el ítem número 10, correspondiente a esta categoría fue excluido, por lo que los análisis que se presentan sobre 4 preguntas.

Combinatoria (Noveno-Ciudad)			
Respuestas Validas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	1254	29,95%	29,95%
1	1553	37,09%	67,04%
2	963	23,00%	90,04%
3	361	8,62%	98,66%
4	56	1,34%	100,00%

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 1254 estudiantes y el máximo 4 obtenido por 56 estudiantes; 1.553 estudiantes respondieron correctamente una de las preguntas, constituyéndose éste en el dato con más frecuencia de respuestas.

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas COMBINATORIA (Noveno-Ciudad)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
1,14	1	0,99	4	0

El promedio obtenido fue de 1.14 que corresponde a un desempeño bajo con respecto a esta habilidad y una desviación alta de 1.14 que señala grupos de puntajes atípicos. Seguramente se presenta altas diferencias en los desempeños de los estudiantes.

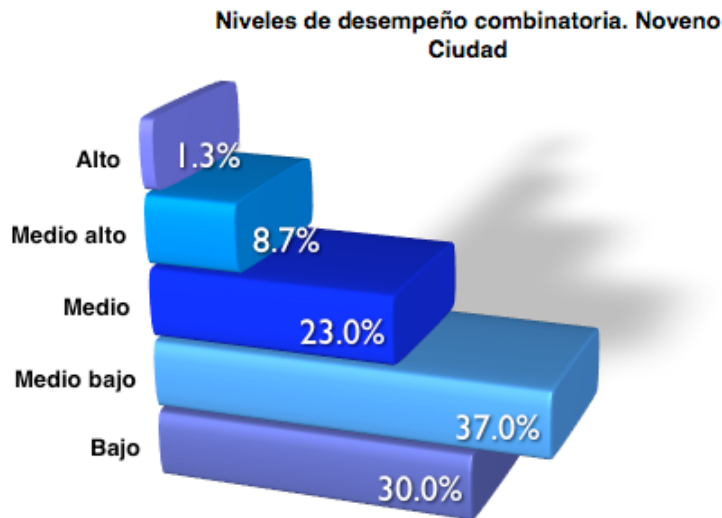


La distribución de los resultados se sesga hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtiene resultados bajos en esta categoría, lo que la coloca en un lugar prioritario de trabajo pedagógico, pues es la que obtiene el desempeño más bajo en relación con las demás categorías evaluadas.

Se definen niveles de acuerdo a:

- los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem (se excluye el ítem 10)
- el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- criterios pedagógicos en especial referidos al número reducido de preguntas y a una expectativa de respuesta media de 2 preguntas

Niveles de desempeño COMBINATORIA (Ciudad - Grado 9)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0	1254	30%
Medio bajo	1	1553	37%
Medio	2	963	23%
Medio alto	3	361	8.7%
Alto	4	56	1.3%



Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba (expectativas de desempeño) en la categoría **COMBINATORIA**, la población se concentra en nivel medio bajo y bajo (67%). Esto indica la necesidad de trabajar pedagógicamente este concepto que no está relacionado necesariamente con el azar, pero es requisito para calcular la estimación probabilística, en especial para la definición de espacios muestrales o posibles ocurrencias

### *Estimación probabilística*

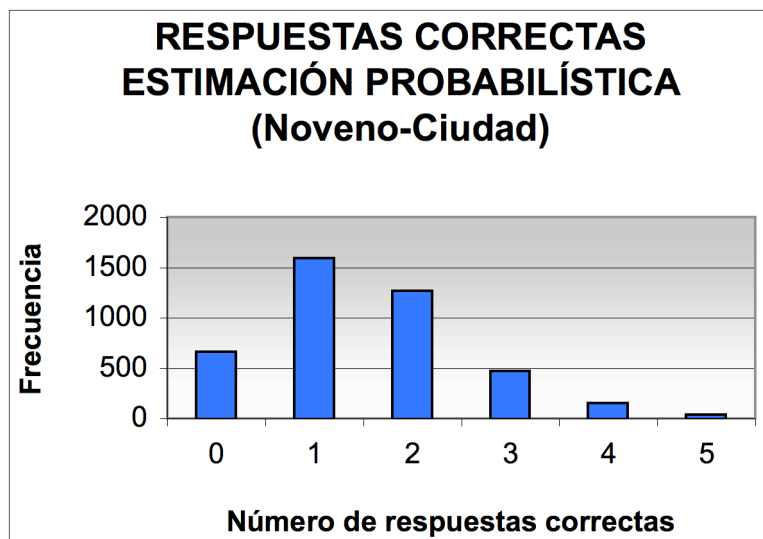
A la categoría de estimación probabilística le correspondían 6 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para estimar la probabilidad de un suceso. Como se mencionó en el apartado 2.2.1., el ítem número 17, correspondiente a esta categoría fue excluido, por lo que el análisis que se presenta a continuación parte del resultado sobre 5 preguntas.

Estimación Probabilística (Noveno-Ciudad)			
Respuestas Validas	FRECUENCIA	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	660	15,76%	15,76%
1	1594	38,07%	53,83%
2	1268	30,28%	84,12%
3	473	11,30%	95,41%
4	155	3,70%	99,12%
5	37	0,88%	100,00%

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 660 estudiantes y el máximo 5 obtenido por 37 estudiantes. Una respuesta correcta obtienen 1594 estudiantes que constituyen la mayor frecuencia de respuesta.

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Estimación probabilística (Noveno-Ciudad)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
1,52	1	1,06	5	0

El promedio obtenido fue de 1.52 que corresponde a un desempeño medio bajo con respecto a esta habilidad.



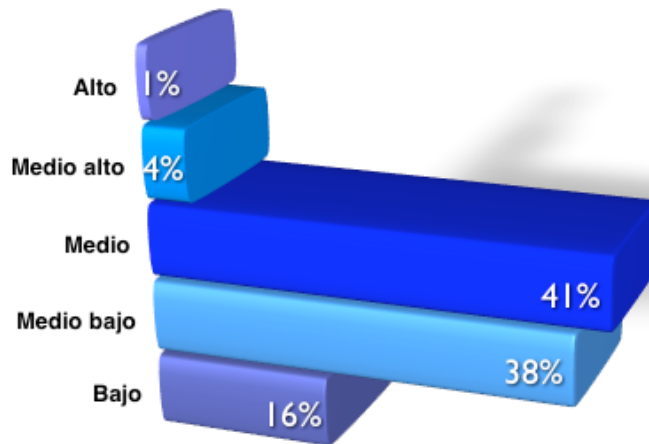
La distribución de los resultados se sesga ligeramente hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtienen resultados relativamente bajos en esta categoría. De la misma manera se observa que un porcentaje de estudiantes (4,58 %) obtienen buenos desempeños.

Se definen niveles de acuerdo a:

- a) los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem que excluye el ítem 17
- c) el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- b) criterios pedagógicos, que definen una respuesta media de desempeño en 2 y 3 preguntas contestadas correctamente

Niveles de desempeño ESTIMACION PROBABILISTICA (Ciudad-Grado 9)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0	660	16%
Medio Bajo	1	1594	38%
Medio	2-3	1741	41%
Medio Alto	4	155	4%
Alto	5	37	1%

### Niveles de desempeño Estimación Noveno. Ciudad



Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba, en la categoría **ESTIMACION PROBABILISTICA**, la población se ubica en niveles medios (41%). Sin embargo existe un 54% de la población en niveles medios bajos y bajos, que exige apoyo pedagógico para desarrollar este concepto, que es uno de los más importantes en cuanto a pensamiento aleatorio a nivel matemático formal.

#### *Distribución de puntajes*

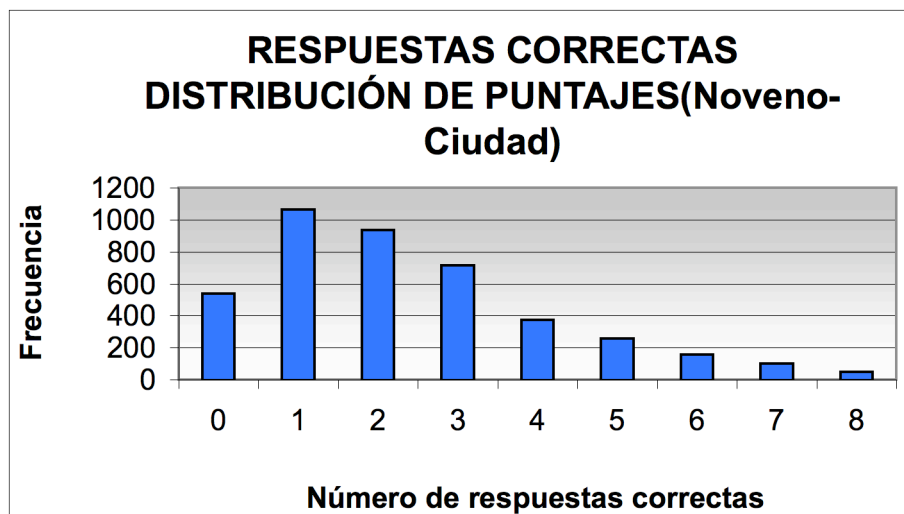
A la categoría de distribución le correspondían 8 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para interpretar textos y sistemas de datos numéricos y gráficos que presentan distribución de poblaciones. El puntaje máximo fue 8 y el mínimo 0.

Distribución de Puntajes (Noveno-Ciudad)			
Respuestas Validas	FRECUENCIA	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	538	12,85%	12,85%
1	1063	25,39%	38,24%
2	936	22,35%	60,59%
3	716	17,10%	77,69%
4	373	8,91%	86,60%
5	256	6,11%	92,72%
6	155	3,70%	96,42%
7	101	2,41%	98,83%
8	49	1,17%	100,00%

El número mínimo de respuesta de 0 fue obtenido por 538 estudiantes y el máximo 8 obtenido por 49 estudiantes. Una respuesta correcta es obtenida por 1063 estudiantes que constituyen la mayor frecuencia de respuesta.

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Distribución de puntajes (Noveno-Ciudad)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
2,36	1	1,83	8	0

El promedio obtenido fue de 2.36 que corresponde a un desempeño bajo con respecto a esta habilidad.



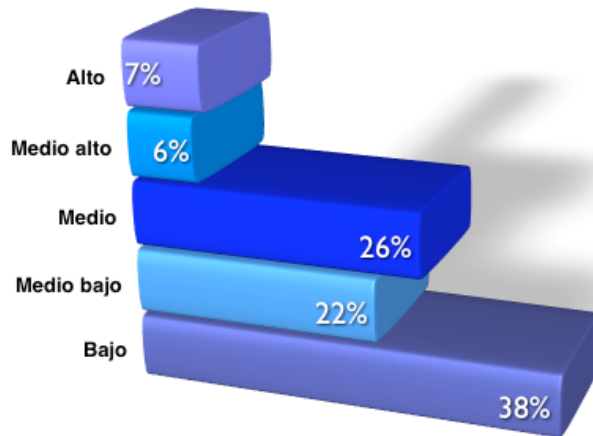
La distribución de los resultados es asimétrica hacia la izquierda, lo que indica que una parte de la población obtiene resultados relativamente bajos. Adicionalmente, se observa que la desviación estándar es de 1,83 lo que indica cierta dispersión en las puntuaciones pero una concentración relativa en puntajes bajos.

Se definen niveles de acuerdo a:

- a) los parámetros de ajuste de las funciones de respuesta al ítem;
- c) el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- b) criterios pedagógicos, que definen una expectativa de desempeño medio de 3 y 4 preguntas correctas de 8 posibles. No se estandariza ni normaliza a partir de la media de 1.83.

Niveles de desempeño distribución (Ciudad-Grado 9)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-1	1601	38%
Medio Bajo	2	936	22%
Medio	3-4	1089	26%
Medio Alto	5	256	6%
Alto	6-8	305	7 %

**Niveles de desempeño Distribución Noveno. Ciudad**



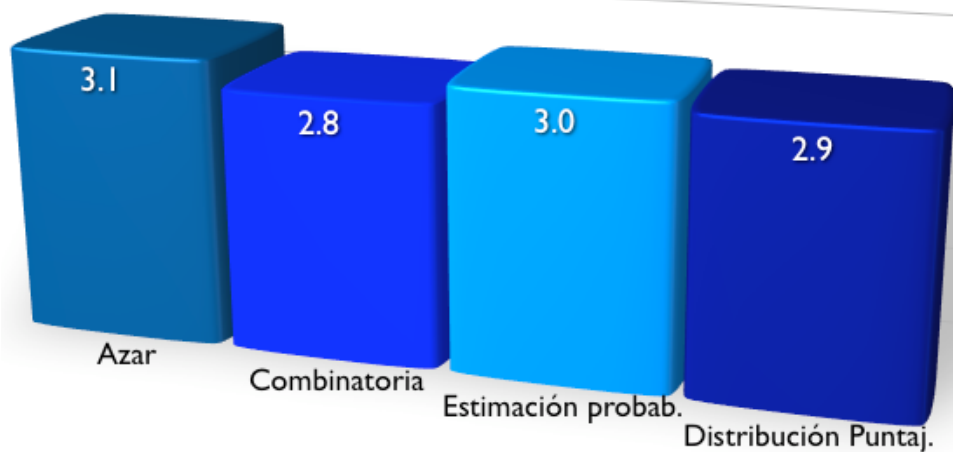
Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba, en la categoría **DISTRIBUCION DE PUNTAJES**, la mayoría de la población se ubica en niveles bajos (38%) y medios bajos (22%). De acuerdo a ello se hace indispensable mejorar los rendimientos en este concepto mediante mejoras en los sistemas curriculares y de enseñanza, en especial en la interpretación de datos presentados en gráficas y tablas.

### 3.3.1.3 Desempeños según categorías

Los desempeños en las diferentes categorías se dieron diferenciados encontrándose mejores resultados en cuanto a azar y estimación probabilística que en las categorías de distribución y combinatoria.

CIUDAD 9	AZAR	COMBINATORIA	EST. PROBABILISTICA	DIST. PUNTAJES
Promedio puntuado en porcentaje	3.1	2.8	3	2.9

### Puntuación comparada por categorías



La categoría más crítica en su rendimiento es combinatoria lo cual implica que los sistemas de enseñanza deben favorecer el desarrollo de esta habilidad. Los rendimientos promedio en las otras tres categorías se comportan acercándose a un nivel de realización del 30%, por ello es muy importante, desde el punto de vista educativo, favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con azar, estimación probabilística y distribución.

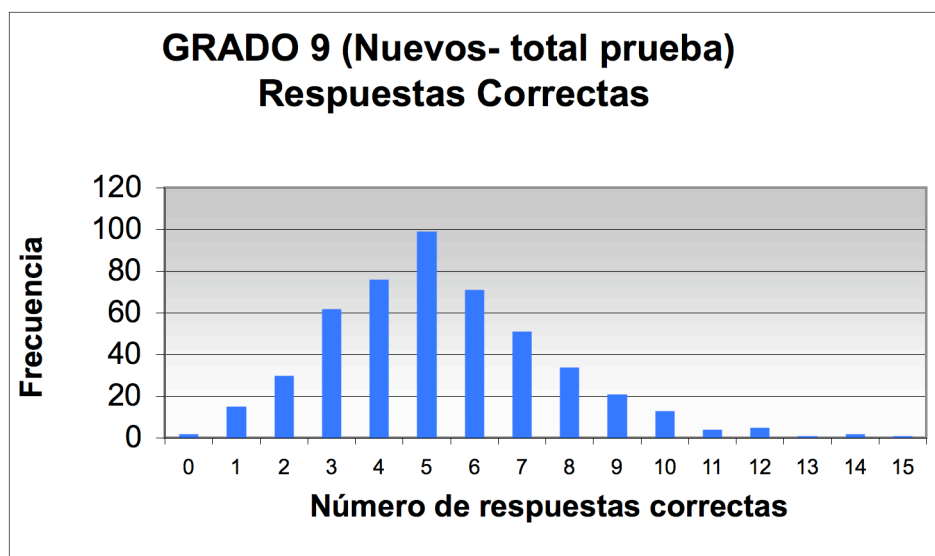
### 3.3.2 Colegios Nuevos

#### 3.3.2.1 Rendimiento General: Prueba Pensamiento Aleatorio

Frecuencia de respuestas correctas y porcentajes Grado 9 (Nuevos-Total prueba)			
Respuestas Validas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	2	0,41%	0,41%
1	15	3,08%	3,49%
2	30	6,16%	9,65%
3	62	12,73%	22,38%
4	76	15,61%	37,99%
5	99	20,33%	58,32%
6	71	14,58%	72,90%
7	51	10,47%	83,37%
8	34	6,98%	90,35%
9	21	4,31%	94,66%
10	13	2,67%	97,33%
11	4	0,82%	98,15%
12	5	1,03%	99,18%
13	1	0,21%	99,38%
14	2	0,41%	99,79%
15	1	0,21%	100,00%

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Grado 9(Nuevos-Total prueba)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
5,33	5	2,40	15	0

El número máximo de respuestas correctas fueron 15, obtenido por 1 estudiante, 2 estudiantes no contestaron ninguna respuesta correcta. Cinco fue el número de respuestas correctas con mayor frecuencia (99 estudiantes). El promedio obtenido por los participantes es de 5.33 con una desviación estándar relativamente alta de 2.40 que indica que existe una variabilidad alta en las capacidades de respuesta de los estudiantes.



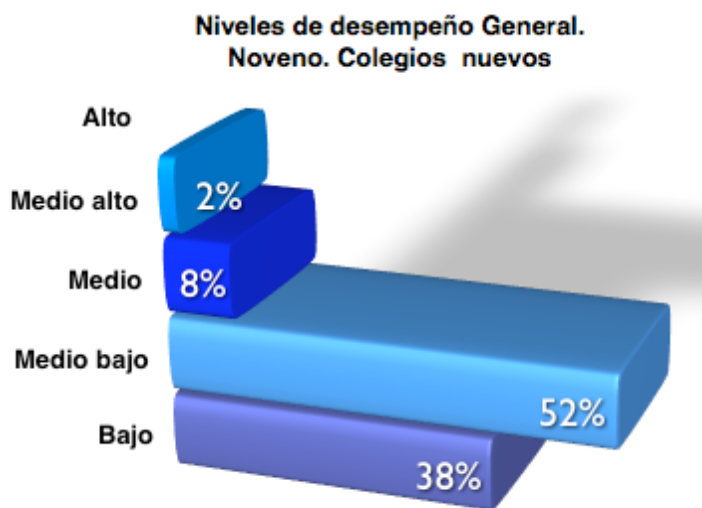
La distribución de la población es asimétrica con sesgo a la izquierda, lo cual indica que una considerable parte de la población se ubica en rendimientos bajos. La distribución aproximadamente indica que los estudiantes, en general, poseen una capacidad y conocimiento bajo en pensamiento aleatorio.

Se definen niveles de acuerdo a:

- a) los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem (eliminación del ítem 10 por mínima dificultad (-3.649) y 17 por alta dificultad (1.15) (ver sección 3.2.1);
- c) el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- b) criterios pedagógicos, que define una expectativa de desempeño medio igual que para la Ciudad de 9-11.

Niveles de desempeño general (Colegios Nuevos-Grado 9)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-4	185	38%

Medio Bajo	5-8	255	52%
Medio	9-11	38	7.8%
Medio Alto	12-15	8	1.7%
Alto	16-20	0	0%



Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba, la mayoría de la población se ubica en niveles medios bajos (52%) y bajos (38%). Ninguna persona se ubica en niveles altos. De acuerdo a ello se hace indispensable aumentar los rendimientos en pensamiento aleatorio mediante mejoras en los sistemas curriculares y de enseñanza de noveno grado.

### 3.3.2.2 Categorías: Azar, combinatoria, estimación probabilística, distribución de puntajes

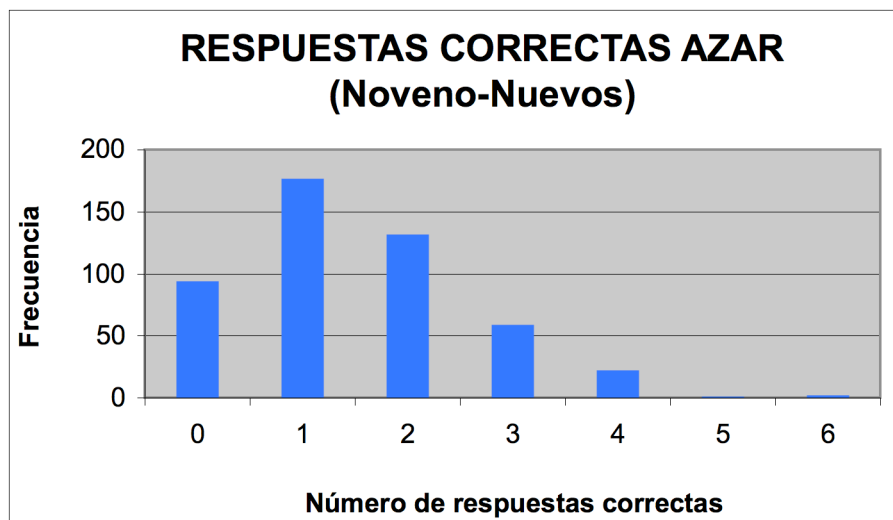
#### *Azar*

A la categoría de azar le correspondían 6 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para distinguir situaciones azarosas de situaciones deterministas. El puntaje máximo fue 6 y el mínimo 0.

Azar (Noveno-Nuevos)			
Respuestas Validas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	94	19,30%	19,30%
1	177	36,34%	55,65%
2	132	27,10%	82,75%
3	59	12,11%	94,87%
4	22	4,52%	99,38%
5	1	0,21%	99,59%
6	2	0,41%	100,00%

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas AZAR (Noveno-Nuevos)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
1,48	1	1,12	6	0

El número mínimo de respuesta de 0 fue obtenido por 94 estudiantes y el máximo 6 obtenido por 2 estudiantes. Una respuesta correcta obtienen 177 estudiantes que constituye la mayor frecuencia de respuesta. El promedio obtenido fue de 1.48 que corresponde a un desempeño bajo con respecto a esta habilidad.



La distribución de los resultados es asimétrica hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtienen resultados relativamente bajos en esta categoría.

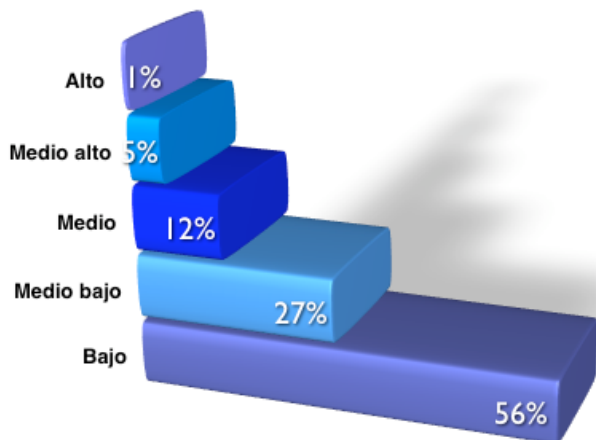
Se definen niveles de acuerdo a:

- a) los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem que considera que los ítems en general cumplen los parámetros de ajuste
- c) el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- b) criterios pedagógicos, que define niveles medios de desempeño igual que para la Ciudad de 3 respuestas correctas

Niveles de desempeño AZAR (Colegios Nuevos-Grado 9)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-1	271	56%
Medio Bajo	2	132	27%
Medio	3	59	12%

Medio Alto	4	22	4.5%
Alto	5-6	3	0.6%

**Niveles de desempeño Azar Noveno.Colegios nuevos**



Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba, en la categoría AZAR, la población se ubica en niveles bajos (56%) y medios bajos (27%). Esta categoría es de las más importantes para el desarrollo del pensamiento aleatorio, luego se hace indispensable en estos colegios realizar transformaciones a nivel curricular y en los sistemas de enseñanza para mejorar el rendimiento .

### *Combinatoria*

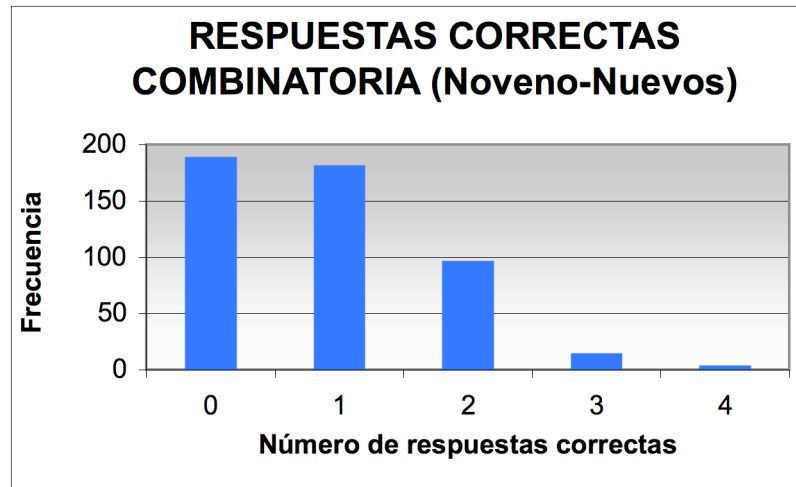
A la categoría de combinatoria le correspondían 5 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para generar procesos sistemáticos de combinación entre elementos para identificar espacio muestrales o de ocurrencias. Como se mencionó en el apartado 3.2.1., el ítem número 10, correspondiente a esta categoría fue excluido, por lo que los análisis que se presentan a continuación parten del resultado sobre 4 preguntas.

Combinatoria (Noveno-Nuevos)			
Respuestas Validas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	189	38,81%	38,81%
1	182	37,37%	76,18%
2	97	19,92%	96,10%
3	15	3,08%	99,18%
4	4	0,82%	100,00%

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 189 estudiantes y el máximo 4 obtenido por 4 estudiantes. El 38.81% de los estudiantes no obtienen ninguna respuesta correcta, que se constituye en la mayor frecuencia de respuesta.

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Combinatoria (Noveno-Nuevos)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
0,90	0	0,88	4	0

El promedio obtenido fue de 0,90 que corresponde a un desempeño bajo con respecto a esta habilidad.

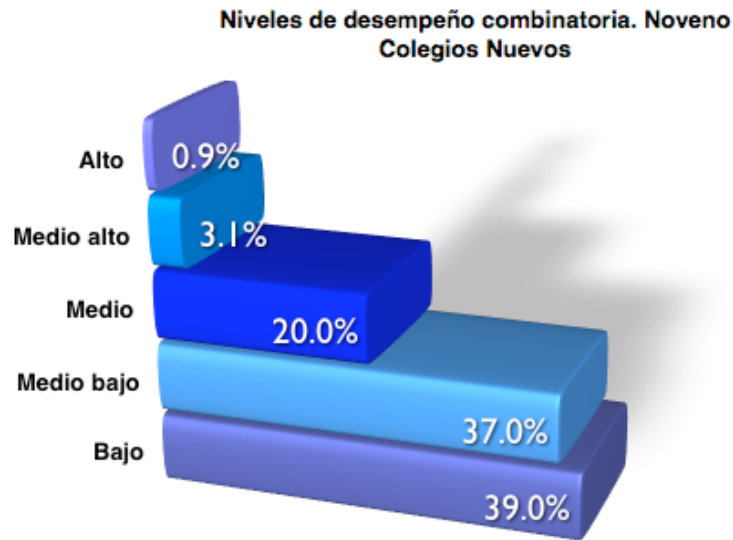


La distribución de los resultados es asimétrica sesgada hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtienen resultados bajos en esta categoría.

Se definen niveles de acuerdo a:

- los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem (se excluye el ítem 10)
- el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- criterios pedagógicos en especial referidos al número reducido de preguntas y la expectativa de desempeño medio definido para la Ciudad

Niveles de desempeño Combinatoria (Colegios nuevos-Grado 5)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0	189	39%
Medio bajo	1	182	37%
Medio	2	97	20%
Medio alto	3	15	3.1%
Alto	4	4	0.9%



Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba, en la categoría **COMBINATORIA**, la población se concentra en nivel medio bajo y bajo (76%). Esto indica la necesidad de trabajar pedagógicamente este concepto, que no está esencialmente relacionado con el azar, pero es requisito necesario para la estimación probabilística, en especial para la definición de espacios muestrales o posibles ocurrencias

### *Estimación probabilística*

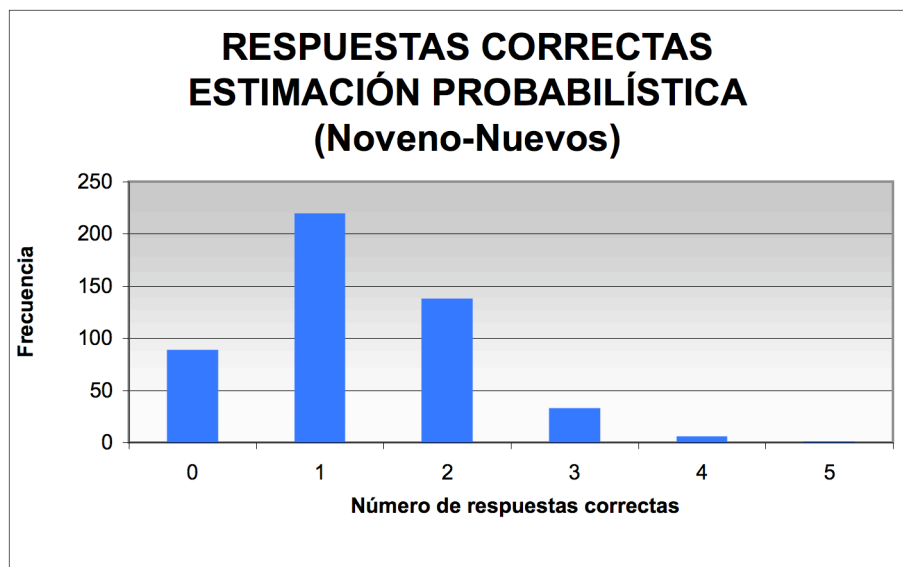
A la categoría de estimación probabilística le correspondían 6 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para estimar la probabilidad de un suceso. Como se mencionó en el apartado 2.2.1., el ítem número 17, correspondiente a esta categoría fue excluido, por lo que los análisis que se presentan a continuación parte del resultado sobre 5 preguntas.

Estimación probabilística (Noveno-Nuevos)			
Respuestas Validas	FRECUENCIA	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	89	18,28%	18,28%
1	220	45,17%	63,45%
2	138	28,34%	91,79%
3	33	6,78%	98,56%
4	6	1,23%	99,79%
5	1	0,21%	100,00%

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 89 estudiantes y el máximo 5 obtenido por un estudiante. La mayor frecuencia de respuesta fue uno obtenida por 220 estudiantes.

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Estimación probalística(Noveno-Nuevos)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
1,28	1	0,90	5	0

El promedio obtenido fue de 1.28 que corresponde a un desempeño bajo con respecto a esta habilidad.

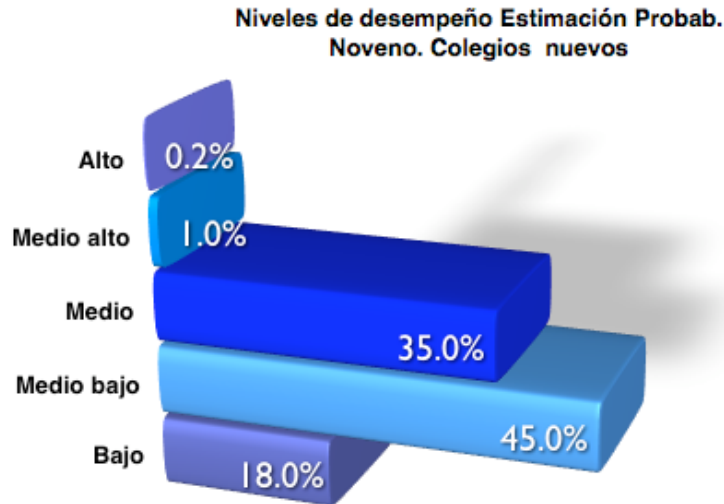


La distribución de los resultados es asimétrica hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtiene resultados relativamente bajos en esta categoría. De la misma manera se observa, especialmente, que un porcentaje de estudiantes del 1.44% obtiene buenos desempeños.

Se definen niveles de acuerdo a:

- a) los parámetros de aplicación de las funciones de respuesta al ítem que excluye el ítem 17
- c) el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos);
- b) criterios pedagógicos, que definen una expectativa de desempeño medio de 2-3 preguntas, igualmente definido para la ciudad

Niveles de desempeño ESTIMACION PROBABILISTICA (Colegios nuevos-Grado 5)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0	89	18%
Medio Bajo	1	220	45%
Medio	2-3	171	35%
Medio Alto	4	6	1.2%
Alto	5	1	0.2%



Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba (expectativas de desempeño), en la categoría ESTIMACION PROBABILISTICA, la población se ubica en nivel medio (35%). Existe un 63% de la población en medio bajo y bajo, que exige apoyo pedagógico para desarrollar este concepto, que es el más importante en el pensamiento aleatorio a nivel matemático formal.

### *Distribución de puntajes*

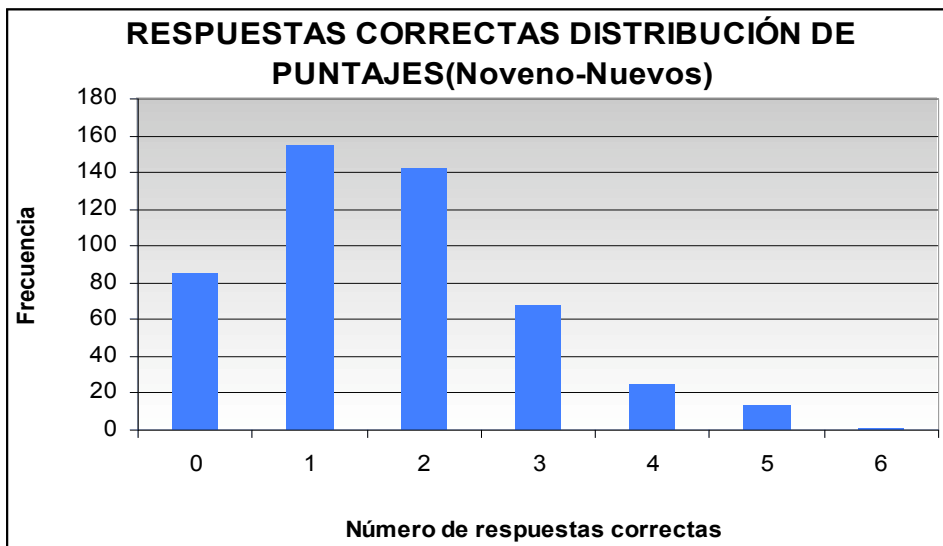
A la categoría de distribución le corresponden 8 ítems que se proponen indagar por la capacidad de los estudiantes para interpretar sistemas de datos numéricos y gráficos que presentan distribución de poblaciones e inferir a partir de allí explicaciones plausibles.

Distribución de puntajes (Noveno-Nuevos)			
Respuestas Validas	FRECUENCIA	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
0	85	17,45%	17,45%
1	154	31,62%	49,08%
2	142	29,16%	78,23%
3	67	13,76%	91,99%
4	25	5,13%	97,13%
5	13	2,67%	99,79%
6	1	0,21%	100,00%

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 85 estudiantes y el máximo 6 obtenido por un estudiante. Una respuesta correcta obtiene 154 estudiantes que constituyen la mayor frecuencia de respuesta.

Promedio y desviación estándar de respuestas correctas Distribución de puntajes(Noveno-Nuevos)				
Media	Moda	Desviación estándar	Máximo	Mínimo
1,66	1	1,23	6	0

El promedio obtenido fue de 1.66 que corresponde a un desempeño bajo con respecto a esta habilidad y una desviación estándar de 1.23 que indica una distribución con puntajes no demasiados atípicos



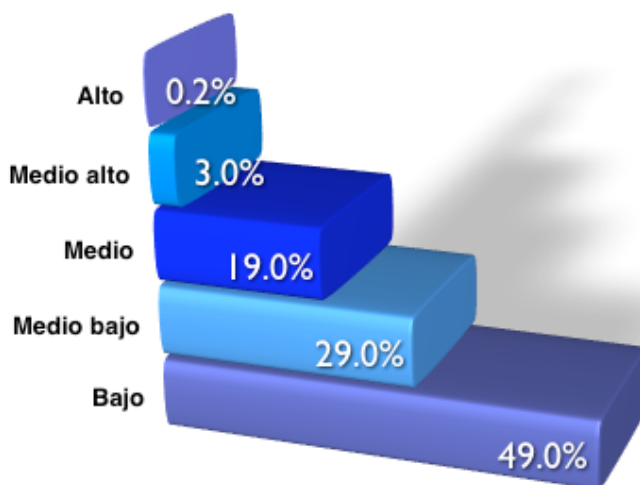
La distribución de los resultados es asimétrica hacia la izquierda lo que indica que una parte de la población obtiene resultados bajos. Adicionalmente, se observa que la desviación estándar es pequeña (1.23) indicando que buena parte de la población es la que obtiene puntajes bajos. Lo que coloca esta categoría en un lugar prioritario de trabajo pedagógico, pues es la que obtiene el desempeño más bajo de habilidad, en relación con las demás categorías evaluadas.

Se definen niveles de acuerdo a:

- a) los parámetros de ajuste de las funciones de respuesta al ítem;
- c) el comportamiento de los resultados en la totalidad de la población (media, desviación y mínimos y máximos); y
- b) criterios pedagógicos de expectativas de desempeño medio en 3-4, igual que para la población ciudad

Niveles de desempeño distribución (Nuevos Colegios-Grado 9)			
Niveles de desempeño	Preguntas correctas	No. de estudiantes	% de estudiantes
Bajo	0-1	239	49%
Medio Bajo	2	142	29%
Medio	3-4	92	19%
Medio Alto	5	13	3%
Alto	6	1°	0.2 %

Niveles de desempeño Distribución.  
Noveno. Colegios nuevos



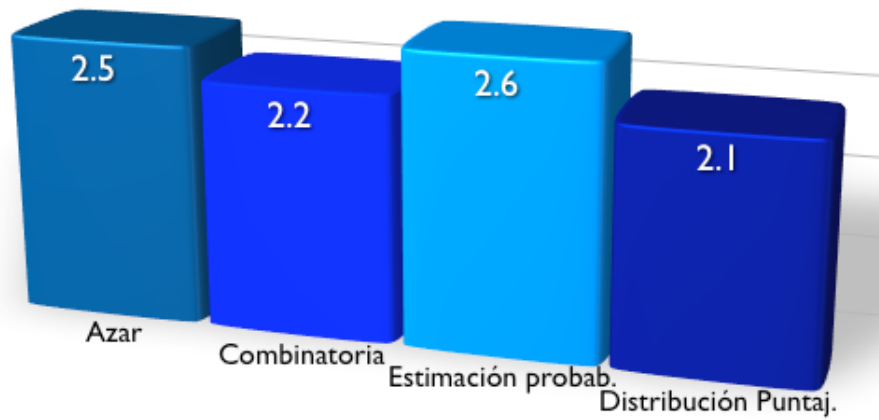
Según criterio de rendimiento pedagógico en la prueba (expectativas de desempeño), en la categoría **DISTRIBUCION DE PUNTAJES**, la mayoría de la población se ubica en niveles bajos (49%) y medios bajos (29%). De acuerdo a ello se hace indispensable mejorar los rendimientos en este concepto mediante mejoras en los sistemas curriculares y de enseñanza, en especial en la interpretación de datos, en gráficas y tablas.

### 3.3.2.3 Desempeños según categorías

Los desempeños en las diferentes categorías se dieron diferenciados encontrándose mejores resultados en cuanto a azar y estimación probabilística que en las categorías de distribución y combinatoria.

Nuevos 9	azar	Combinatoria	Estimación probabilística	Distribución de puntajes
Promedio puntuado en porcentaje	2,5	2,2	2,6	2,1

## Puntuación comparada por categorías



La categoría más crítica en su rendimiento esta relacionada con distribución de puntajes lo cual implica que los sistemas de enseñanza deben favorecer el desarrollo de esta habilidad. No obstante los rendimientos en las otras tres categorías se comportan de manera parecida acercándose a un nivel de realización del 25%, bastante bajo, en relación con lo esperado; es muy importante, desde el punto de vista educativo, favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con azar, estimación probabilística y distribución.

#### **4. ANALISIS DE SESGOS Y ERRORES EN LOS PROCESOS DE SOLUCION DE PROBLEMAS EN PENSAMIENTO ALEATORIO**

La prueba de pensamiento aleatorio constaba de 25 preguntas, tanto para grado 5 como para grado 9, en relación con cuatro grandes categorías, azar, combinatoria, estimación probabilística y distribución de puntajes. Los conceptos de azar y estimación probabilística están lógicamente vinculados con pensamiento aleatorio, y su dominio es condición cognitiva necesaria para el ejercicio de este tipo de pensamiento. El azar y la estimación probabilística permiten diferenciar el carácter determinista o contingente de fenómenos naturales, sociales o culturales y valorar cualitativamente o cuantitativamente las posibilidades de ocurrencia del fenómeno o de sus antecedentes o consecuencias. La combinatoria implica una serie de mecanismos cognitivos de carácter asociativo que permiten vincular, a partir de una condición, objetos o hechos utilizando diferentes modos de organización lógica y sistemática de la información, tales como diagramas de árbol, redes de unidades de información, matrices, etc. o cálculos utilizando expresiones matemáticas. Este concepto no implica directamente habilidades de análisis de plausibilidad de un suceso, pero se convierte en un concepto base, especialmente para la definición de espacios muestrales, que a su vez es base para la estimación probabilística. El campo conceptual de distribución de puntajes hace referencia a uno de los conceptos estadísticos más importantes, que permite representar con diferentes esquemas técnicos textuales, gráficos o de notación matemática la manera como se organizan datos que presentan una situación descriptiva (estadística descriptiva) o inferencial (inferencia estadística); en el mismo sentido, la distribución simple de puntuaciones o datos permiten posteriormente comprender de mejor manera las distribuciones normales de probabilidad, las distribuciones muestrales y la manera como asignamos significancia a diferentes hipótesis. Este concepto se fundamenta cognitivamente en la capacidad que tenemos de interpretar información a partir de diferentes representaciones externas de carácter textual, icónico o gráfico y no es una habilidad única y exclusiva del pensamiento matemático sino se relaciona en general con diferentes formas culturales de presentación de sucesos.

Cuando se analizan las bases cognitivas declarativas (conjunto de conceptos, por ejemplo, azar, estimación, combinatoria, distribución, etc.) y procesuales (conjunto de procesos cognitivos, tales como la operación de reversibilidad, la causalidad, la proporcionalidad, etc.) del pensamiento aleatorio, uno de los campos actuales de estudio más frecuentes son los errores de razonamiento. Estos se identifican generalmente con los heurísticos de Kahneman y Tversky, que hacen referencia los heurísticos de representatividad, disponibilidad y anclaje y ajuste, que a su vez se relacionan con la dificultad que se tiene para analizar la dependencia o independencia de sucesos, la regresión a la media, la ley de los grandes números o las posibilidades predictivas de los datos. Una de las características fundamentales del pensamiento aleatorio, es que se constituye en la base de los grandes procesos cognitivos relacionados con la toma de decisiones intuitiva (decisiones rápidas y con poca información) y calculada (sistemática y basada en la probabilidad); es decir el pensamiento aleatorio es la base cognitiva de los procesos de elección que no son exclusivos del pensamiento matemático.

A continuación se presentan los resultados de un proceso de análisis de sesgos y errores en la prueba de pensamiento aleatorio, en cada una de las categorías, realizado a partir la observación de los ítems en términos de opciones y distractores, y de los procesos

de solución de problemas empleados por los estudiantes, que fueron observados en las hojas de borrador.

El parámetro de dificultad del ítem se realiza de acuerdo a la complejidad de la tarea planteada según teoría de educación matemática y, especialmente, a los resultados de la aplicación del modelo Rasch. La dificultad asignada a los ítems se realiza no únicamente en relación con la dificultad intrínseca de la tarea, desde el punto de vista matemático, sino de tratando de resolver la pregunta ¿qué tan complejo es el ítem para la población que presentó la prueba?

### *Grado quinto*

<b>Azar (grado 5)</b>			
<b>Item</b>	<b>Tarea</b>	<b>Dificultad del ítem</b>	<b>Análisis de sesgos y errores</b>
1	Diferencias ente sucesos deterministas y aleatorios	Media	Los estudiantes cometen el error en la diferenciación de sucesos mecanicos deterministas, sucesos naturales de naturaleza contingentes y situaciones de juego con menor posibilidad de predicción.
2	Identificación de sucesos no reversibles como base del azar	Baja	El error básico que se comete es confundir una situación reversible con una reversible, y creer que es posible retornar a una situación inicial, aun con condiciones de un proceso totalmente contingente o azaroso.
3	Ordenamiento de posibilidades de inferencia probabilística	Media	Existe dificultad para determinar la posibilidad de ocurrencia azarosa de un fenómeno dada la dificultad para definir el espacio muestral de ocurrencias, en especial cuando son posibilidades de ocurrencias no determinadas
4	Uso de información para las posibilidades de inferencia probabilística	Alta	Existe dificultad para asociar calidad y cantidad de información con la posibilidad de inferencia probabilística.
5	Valoración de las posibilidades de ocurrencia desde un punto de vista determinista o azaroso	Alta	Los errores se relacionan con la diferenciación entre el control posible y la imposibilidad de control de una situación o fenómeno.
6	Valoración de posibilidades de acuerdo a la definición de un espacio muestral	Media	Existe impedimentos para determinar la posibilidad de ocurrencia de un fenómeno dada la dificultad para realizar una combinatoria simple para comparar dos espacios muestrales

<b>Combinatoria (grado 5)</b>			
<b>Item</b>	<b>Tarea</b>	<b>Dificultad del ítem</b>	<b>Análisis de sesgos y errores</b>
7	Realizar una combinatoria dada una condición de exclusión y razonar en consecuencia para concluir un número posible de sucesos	Alta	Los estudiantes no realizan la combinatoria para determinar todos los casos posibles sino realizan una adición simple de casos
8	Realizar una permutación dada una condición de no repetición y razonar en consecuencia para concluir un número posible de sucesos	Alta	Los estudiantes no realizan procedimientos sistemáticos de permutación utilizando algún recurso de organización de información (árboles o gráficos)
9	Realizar una combinatoria dada una condición de	Muy baja (Eliminada)	La pregunta es muy fácil para la mayoría (80%), sin embargo algunos no realizan la combinatoria sino

	conjunción simple		una suma simple sin entender la condición del problema. La pregunta sólo exige una suma simple de posibilidades.
10	Realizar una combinatoria dada una condición de selección y razonar en consecuencia para concluir un número posible de sucesos	Alta	Los estudiantes no realizan procedimientos sistemáticos de combinatoria., utilizando algún recurso de codificación u organización de información.

<b>Estimación probabilística (grado 5)</b>			
<b>Item</b>	<b>Tarea</b>	<b>Dificultad del ítem</b>	<b>Análisis de sesgos y errores</b>
11	Estimación de la ocurrencia de un suceso a partir de la definición gráfica y geométrica del espacio muestral	Alta	No se define el espacio muestral y las posibilidades de ocurrencia de los sucesos de acuerdo a una proporción geométrica acertada de las áreas
12	Estimación de la ocurrencia de un suceso que requiere la definición de un espacio muestral originado en los posibles resultados de un juego de azar (dado)	Baja	La estimación probabilística se sesga hacia el 0.5. Para algunos estudiantes la probabilidad de un suceso constantemente se define en la media 0.5 independiente del espacio muestral.
13	Estimación de la ocurrencia de un suceso que requiere la definición de un espacio muestral originado en un conjuntos de elementos	Media	No se hace una consideración cuantitativa o cualitativa de la probabilidad de un suceso. Al utilizar la situación de juego la ganancia se ve poco probable desde el punto de vista subjetivo
14	Estimación de la ocurrencia de un suceso independiente a partir de ocurrencia de sucesos recurrentes	Media	No se diferencian sucesos dependientes de independientes y se presenta un sesgo de anclaje o representatividad (falacia del jugador) que determina los bajos rendimientos en estos tipos de tareas
15		Baja	
16	Estimación de la probabilidad de un suceso a partir de la ocurrencia de un suceso dependiente	Media	No se hace una consideración cuantitativa o cualitativa de la probabilidad de un suceso, en especial cuando se presentan sucesos dependientes y recurrentes. Al utilizar la situación posibilidad la ganancia se ve poco probable desde el punto de vista subjetivo
17	Estimación de la ocurrencia de un suceso que requiere la definición de un espacio muestral originado en una combinatoria en un juego de azar (dos dados)	Alta	No se realiza operaciones de combinación de elementos para definir el espacio muestral , sino se asocia la mayor estimación con la posibilidad de obtener números mayores.
18	Estimación de la ocurrencia de un suceso a partir de diferentes espacio muestrales presentados gráficamente	Baja	Algunos estudiantes (pocos) no diferencian las propiedades fundamentales que diferencian espacios muestrales. La referencia gráfica y concreta facilita la estimación.

<b>Distribución de puntajes (grado 5)</b>			
<b>Item</b>	<b>Tarea</b>	<b>Dificultad del ítem</b>	<b>Análisis de sesgos y errores</b>
19	Interpretación de información presentada en una tabla de datos y representación de los datos en un gráfico de pastel	Media	No se interpretan los datos numéricos en una tabla de doble entrada; algunos niños sesgan su respuesta a las distribución de 50%.

20	Interpretación de información presentada en una tabla de datos y representación de los datos en un diagrama de barras	Media	No se interpreta correctamente los datos numéricos de la tabla al no identificar las variables solicitadas. Puede existir dificultad en la interpretación de la instrucción.
21	Interpretación de información presentada en una tabla de datos y representación de los datos en un diagrama de barras o un gráfico de pastel	Alta	
22	Interpretación de datos presentados en una tabla de puntuaciones, en un histograma y en un texto (ejemplo) para calcular medidas de tendencia central	Alta	No se interpreta correctamente los datos de la gráfica confundiendo las variables y los conceptos de medida de tendencia central (promedio)
23	Cálculo aproximado de una población, en un rango, a partir de la interpretación de un histograma	Alta	No se interpreta el histograma o la tabla para inferir datos en un rango. Se confunden las dos variables de la tabla y el histograma
24		Baja	La información se daba en el texto de presentación del ítem. No se comprende la instrucción del ítem
25		Alta	No se interpreta el histograma o la tabla para inferir datos en un rango. Se confunden las dos variables de la tabla y el histograma

### *Grado noveno*

<b>Azar (grado 9)</b>			
Item	Tarea	Dificultad del ítem	Análisis de sesgos y errores
1	Diferencias ente sucesos deterministas y aleatorios	Media	Los estudiantes cometen el error en la diferenciación de fenómenos naturales de carácter mecanico determinista con fenómenos naturales de carácter contingente
2	Posibilidades de predicción de un hecho de acuerdo a un número limitado dedatos iniciales (ley de los grandes números)	Alta	El error básico que se comete es no considerar la ley de los grandes números desde una interpretación empírica.
3	Posibilidades de predicción de acuerdo al conocimiento de factores de incidencia en un hecho	Media	Existe dificultad para diferenciar cuando hay o no hay posibilidades de predicción de acuerdo a la incidencia de factores
4	Posibilidades de predicción desde el análisis de dependencia o independencia de sucesos recurrentes en una situación de juego de azar	Media	Existe dificultad para diferenciar sucesos independientes de dependientes y en consecuencia razonar sobre una cadena de posibilidades de ocurrencia de hechos
5		Alta	
6		Baja	

<b>Combinatoria (Grado 9)</b>			
Item	Tarea	Dificultad del ítem	Análisis de sesgos y errores
7	Realizar una permutación dada una condición de no repetición	Media	Los estudiantes no realizan procedimientos sistemáticos de permutación utilizando algún

	y razonar en consecuencia para concluir un número posible de sucesos		recurso de organización de información (árboles o gráficos) o no interpretan las condiciones del problema para aplicar una ecuación útil para la solución del problema. Realizan una multiplicación simple sin realizar la combinatoria
8	Realizar una combinatoria dada una condición de exclusión y razonar en consecuencia para concluir un número posible de sucesos	Media	Los estudiantes no realizan la combinatoria para determinar todos los casos posibles sino realizan una adición simple de casos
9	Realizar una combinatoria dada una condición de selección y razonar en consecuencia para concluir un número posible de sucesos	Media	Los estudiantes no realizan procedimientos sistemáticos de combinatoria., utilizando algún recurso de codificación u organización de información.
10	Realizar una combinatoria dada una condición de conjunción simple	Muy baja (excluida)	La pregunta es muy fácil para la mayoría (92%. No es un ítem apropiado para identificar una habilidad; sólo exige una adición simple.
11	Determinar la posibilidad de ocurrencia de un suceso a partir de la combinatoria de elementos y expresarla en proporciones	Alta	Los estudiantes no realizan un cálculo de posibilidades a partir de una combinatoria sino de una multiplicación simple

<b>Estimación probabilística (grado 9)</b>			
<b>Item</b>	<b>Tarea</b>	<b>Dificultad del ítem</b>	<b>Análisis de sesgos y errores</b>
12	Estimación de la ocurrencia de un suceso independiente a partir de ocurrencia de sucesos recurrentes	Alta	No se diferencian sucesos dependientes de independientes y se presenta un sesgo de anclaje que determina los bajos rendimientos
13	Estimación de la ocurrencia de un suceso que requiere la definición de un espacio muestral originado en una combinatoria en un juego de azar	Alta	No se define correctamente los espacios muestrales y se asocia la ocurrencia del suceso a una situación de suerte espontánea
14	Estimación de la ocurrencia de un suceso a partir de la definición gráfica y geométrica del espacio muestral	Baja	En algunos estudiantes se presenta desconocimiento formal sobre la estimación probabilística en un rango entre 0 y 1
15	Estimación de la ocurrencia de un suceso que requiere la definición de un espacio muestral originado en una combinatoria	Alta	No se realiza operaciones de combinación de elementos para definir el espacio muestral, sino se asocian los elementos con una multiplicación simples
16	Valoración de las posibilidades de ocurrencia desde un punto de vista determinista o azaroso	Media	No se maneja de manera lógica o empírica la estimación probabilística de una conjunción de sucesos
17	Estimación de la probabilidad de un suceso a partir de sucesos dependientes y la definición de un espacio muestral utilizando un modelo de representación algebraico o de organización empírica.	Muy alta (eliminada)	Alta dificultad para crear un modelo que represente una situación que permita definir un espacio muestral. Se utiliza una proporción simple entre los elementos y no un modelo matemático de representación.

<b>Distribución de puntajes (grado 9)</b>			
<b>Item</b>	<b>Tarea</b>	<b>Dificultad del ítem</b>	<b>Análisis de sesgos y errores</b>
18	Interpretación de un histograma de acuerdo a parámetros de la ley de los grandes números	Media	No se utiliza la ley de los grandes números en un razonamiento empírico de plausibilidad numérica
19	Calculo de medidas de tendencia central (promedio) a partir de la plausibilidad de datos empíricos presentados gráficamente y a partir de la ley de los grandes números	Alta	
20	Calculo de medidas de tendencia central (moda) a partir de la interpretación de datos presentados en un histograma	Alta	No se interpreta correctamente los datos de la gráfica confundiendo las variables y los conceptos de medida de tendencia central (moda)
21	Interpretación de datos presentados en un histograma a partir de la relación entre las variables que definen el gráfico	Media	No se interpreta correctamente los datos de la gráfica al no determinar los rangos y la relación entre las variables
22	Estimación probabilística a partir de la interpretación de datos presentados en un histograma	Alta	No se realiza una estimación probabilística teniendo en cuenta una disyunción de sucesos. No se interpreta la gráfica teniendo en cuenta datos presentados independientemente.
23	Calculo de una medida de tendencia central (promedio) a partir de la lectura de datos presentados en una gráfica	Alta	No se interpreta la gráfica para inferir datos que permiten el calculo numérico requerido
24		Media	
25		Media	

## 5. CONCLUSIONES PEDAGÓGICAS

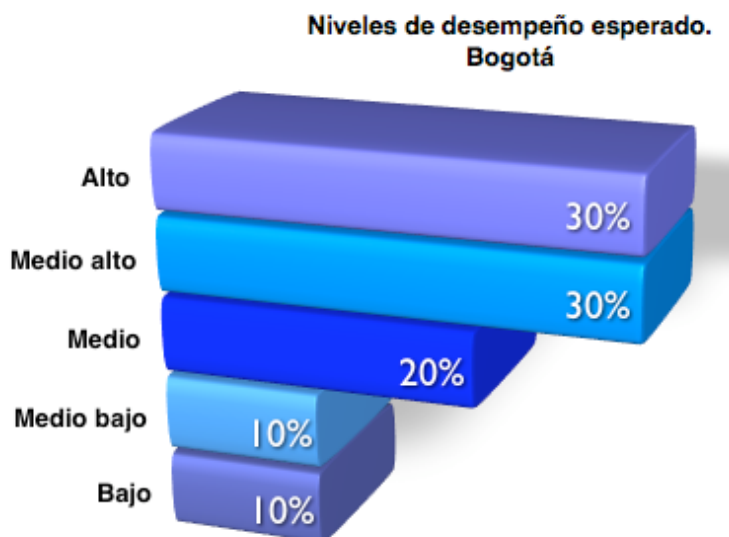
### *Análisis de ítems según modelo de Rasch*

- Los ítems de la prueba se analizaron utilizando las funciones de respuesta al ítem para encontrar según diferentes parámetros de discriminación, correlación y, especialmente, de dificultad, que tan adecuadas eran las preguntas para medir las diferentes habilidades de pensamiento aleatorio, en una población en la que se esperaba que estuvieran diferenciadas. En general, los diferentes ítems cumplieron los parámetros de ajuste, exceptuando aquellos que fueron eliminados por su excesiva simpleza o dificultad. Se concluye, que la prueba es adecuada para medir las diferentes habilidades de pensamiento aleatorio, en los dos grupos poblacionales de quinto y sexto grado.

### *Niveles de desempeño*

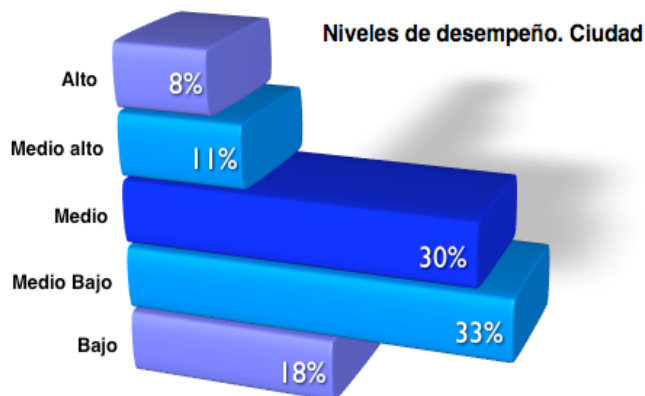
- Se plantearon tres criterios para definir los diferentes niveles de desempeño en la prueba y en las diferentes categorías: a) Los parámetros de ajuste según la aplicación de las *funciones de respuesta al ítem*, b) el comportamiento de los resultados para toda la población, y c) criterios pedagógicos de expectativas de desempeño. Según criterios pedagógicos, con los niveles que fueron establecidos, se esperaba que la mayoría de la población, un 60%, se debería ubicar en niveles medios altos y altos, y en correspondencia 20% en medios, 10% en medio bajo, y 10% en bajo. Esto implica un trabajo curricular y pedagógica sistemático en Bogotá para mejorar los desempeños, en especial en el sector Colegios nuevos.

### Niveles esperados en los próximos años

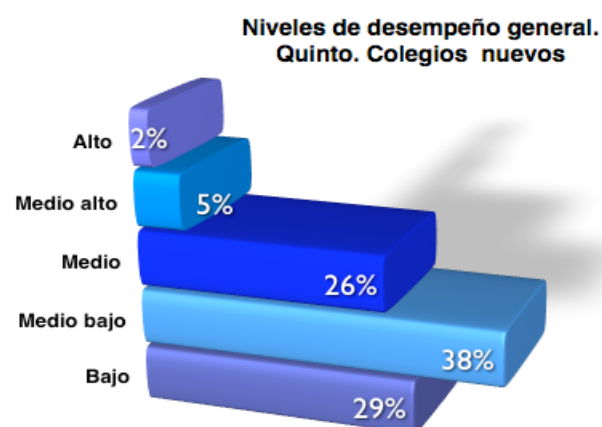


## Niveles obtenidos actualmente

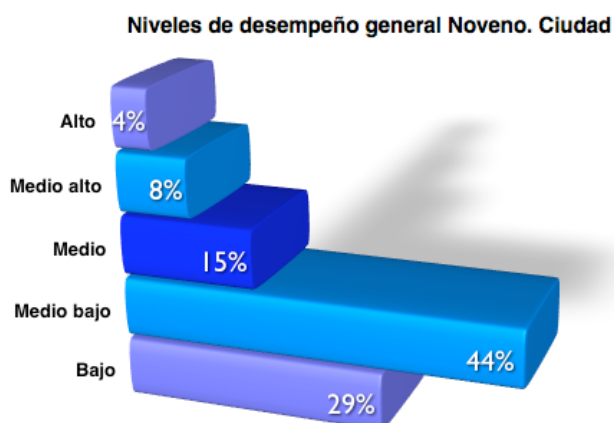
### Grado quinto Ciudad



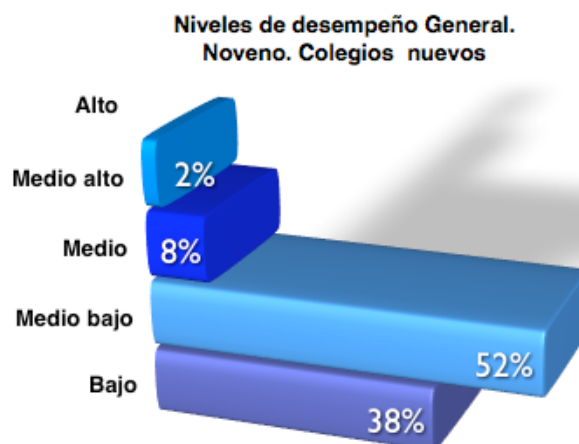
### Grado quinto Colegios Nuevos



### Grado noveno Ciudad



### Grado noveno Colegios nuevos



### *Desempeños generales*

- Los ítems de la prueba de quinto grado (ciudad y colegios nuevos) tienen un carácter cualitativo, y se construyen a partir de las intuiciones primarias y del conocimiento experiencial de los niños; para su ejecución no requieren de un conocimiento escolar formalizado. Teniendo en cuenta estas características de la prueba, dado que los desempeños de los niños, en forma general, son *medios y medios bajos* y la *distribución de la población se sesga a la izquierda*, se puede afirmar, que en general, es necesario potenciar en los planes de estudio y en la enseñanza escolar el pensamiento probabilístico. Se presentan resultados más bajos en los colegios nuevos.
- Los ítems de la prueba de noveno grado requieren para su solución mayormente un conocimiento formalizado, que hace uso de estimaciones cuantitativas, sobre

probabilidad. Los desempeños de los estudiantes, en forma general son *medios bajos y bajos y la distribución se sesga a la izquierda*. Esto indica que la conceptualización y los procesos cognitivos relacionados con pensamiento probabilístico de los estudiantes de noveno grado no están lo suficientemente desarrollados desde los sistemas de enseñanza. Es importante desde el punto de vista curricular y didáctico proporcionarle a los estudiantes una serie de experiencias de aprendizaje de la probabilidad en un marco cognoscitivo (conceptos y procesos cognitivos) y cultural (problemas en diferentes campos, no sólo matemáticos, que hacen uso de la probabilidad). Se presentan resultados más bajos en los colegios nuevos.

- Comparativamente los rendimientos en la prueba son más elevados en quinto grado que en noveno. Esto sugiere que se disminuyen los logros de aprendizaje en relación con pensamiento probabilístico a medida que aumenta el desarrollo de los niños o los años de escolarización. Dado que la prueba de quinto se sustenta en un conocimiento experiencial, no formalizado e intuitivo primario y la prueba de noveno en un conocimiento formalizado escolarmente, se hace necesario, curricular y didácticamente, hacer uso del capital intelectual de los niños, crear e implementar escolarmente un conjunto de temáticas y problemas de campos diversos (teoría de juegos, investigación, toma de decisiones, etc.) que hacen uso de la probabilidad tanto nivel cuantitativo como cualitativo y, en especial, crear intereses cognoscitivos hacia el tema.

#### *Desempeños por categorías*

- En el grado quinto los puntajes en un nivel medio corresponden a *azar y estimación probabilística*, en un nivel medio bajo a *combinatoria* y en un porcentaje bajo a *distribución de puntajes*. Esto sugiere que las habilidades para resolver problemas de combinatoria y distribución de puntajes son las menos desarrolladas. Aunque la combinatoria en si misma no es un concepto que hace parte nuclear del pensamiento probabilístico si es una condición necesaria, en especial, para la definición de espacios muestrales. Esto implica la necesidad de desarrollar habilidades de solución de problemas que impliquen combinatorias en situaciones sencillas y cotidianas y de distribución de puntajes, especialmente en el uso e interpretación de diferentes notaciones numéricas y gráficas.
- En el grado noveno los puntajes en las cuatro categorías se ubican en un nivel medio bajo. Esto implica la necesidad de desarrollar habilidades de pensamiento aleatorio en todos los niveles.
- Los desempeños más bajos, tanto en los cursos quinto como noveno, son en combinatoria y distribución de puntajes, lo que implica que es necesario promover estas habilidades tanto curricularmente como didácticamente.
- La distribución de los resultados en las categorías de azar y estimación probabilística en quinto son medios pero en noveno son medios bajos lo que implica que las habilidades para resolver problemas en estos campos han disminuido a lo largo de la vida escolar. Esto sugiere que se debe favorecer su desarrollo facilitando el paso: a) de las intuiciones primarias a las intuiciones

secundarios y al conocimiento formal y b) de los análisis cualitativos a los análisis cuantitativos.

- Los desempeños en distribución e interpretación de sistemas de datos son bajos en ambos cursos lo cual indica que las habilidades en este campo no están desarrolladas, es decir los niños y jóvenes no presentan habilidades relativamente buenas de interpretación e inferencias a partir de notación gráfica y numérica. En los resultados del año 2005, la población presentó relativamente buenos resultados, en esta categoría, que se refería mayormente a la lectura descriptiva de datos, pero en el año 2007 la interpretación exigía inferencias a partir de la información aportada. Esto indica que la capacidad inferencial es la que más se dificulta en la interpretación de datos presentados con diferentes notaciones y sistemas de representación gráfica.

## 6. DISCUSIÓN. ORIENTACIONES CURRICULARES Y DIDÁCTICAS

A partir de los resultados de las pruebas comprender en pensamiento aleatorio en los grados 5° y 9° se pueden retomar cinco ideas básicas que pueden orientar la gestión curricular y la didáctica:

- Los niños de 5° grado (intuiciones primarias, análisis cualitativo, experiencias concretas) tienen mejor desempeño que los jóvenes de 9° (conocimiento formalizado, análisis cuantitativo, abstracción)
- Hay una alta variabilidad en los desempeños en ambos grados. Esta puede estar relacionada con el dominio de los procesos cognitivos subyacentes al pensamiento aleatorio (reversibilidad, causalidad, proporcionalidad, clasificación, modelización, etc) o con las experiencias previas de análisis de situaciones aleatorias.
- Las actividades que presentan mayor dificultad, en ambos grados, son aquellas que exigen del uso de la combinatoria y la distribución de puntajes.
- En cuanto al tipo de prueba -y los desempeños derivados de su aplicación- se puede inferir que es posible generar tareas (ítems), que eventualmente puedan ser utilizadas en la intervención didáctica, ligadas a la probabilidad subjetiva<sup>5</sup> y a la probabilidad empírica, y no necesariamente a la probabilidad formal.
- Se hace necesario definir un plan de estudios y una serie de experiencias didácticas ligadas al desarrollo del pensamiento aleatorio, no únicamente como conocimiento matemático formal, sino como un tipo de pensamiento general que es requisito cognitivo fundamental para entender fenómenos naturales, sociales y culturales, contingentes. De la misma manera entender, también, el pensamiento aleatorio como la base cognitivo de los procesos de toma de decisiones.

A partir de estas ideas se pueden plantear una serie de propósitos de carácter educativo que guíen la enseñanza de la probabilidad:

- ✓ Favorecer el desarrollo de los procesos cognitivos de reversibilidad, causalidad, proporcionalidad, categorización, planteamiento de hipótesis y análisis de su verosimilitud y modelización que subyacen al pensamiento aleatorio en el preescolar y la educación básica primaria en todas las áreas.
- ✓ Favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio, a lo largo de la educación básica, regulando desde la enseñanza sesgos subjetivos y mecanización de los procesos de estimación y de cálculo, a partir de las intuiciones primarias y de diferentes situaciones aleatorias presentes en la vida cotidiana y en diferentes áreas de conocimiento. Se aprovechan elementos de la probabilidad subjetiva y empírica antes de entrar a desarrollar componentes sencillos de probabilidad formal.
- ✓ Desarrollar planes de estudio y sistemas de enseñanza (metodologías, recursos informáticos, materiales impresos o digitales, etc.) que permitan integrar diferentes áreas curriculares (ciencias naturales, sociales, matemáticas) mediante el planteamiento de proyectos y tareas que involucren el desarrollo del pensamiento aleatorio

---

<sup>5</sup> Godino realiza esta clasificación de los tipos de probabilidad en su libro Azar y Probabilidad. Ver bibliografía

La organización curricular y didáctica requerida para favorecer el pensamiento aleatorio debe plantear respuesta a las siguientes preguntas:

- i. ¿Para qué favorecer el pensamiento aleatorio y no sólo el pensamiento determinista?
- ii. ¿Qué conceptos relacionados con el pensamiento aleatorio se deben formar y en qué secuencia didáctica?
- iii. ¿Qué tipos de preguntas y situaciones se deben propiciar a los niños y a los jóvenes que desafíen el desarrollo del pensamiento aleatorio?
- iv. ¿Qué materiales didácticos son oportunos para favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio?
- v. ¿Cómo se debe evaluar el pensamiento aleatorio de acuerdo al nivel de desarrollo intelectual del niño y el joven, a las oportunidades de aprendizaje ofrecidas escolármente y al conjunto de experiencias interesantes que surgen en su contexto vivencial y en las diferentes áreas de conocimiento?

De acuerdo a los resultados de aplicación de la prueba, a los propósitos y a las preguntas planteadas se puede sugerir una organización curricular y didáctica general:

<i>Componentes curriculares</i>	
<i>Para qué / objetivos generales</i>	<p>El pensamiento aleatorio está presente en una gran cantidad de situaciones de la vida práctica y científica, en diferentes áreas de conocimiento. Tiene su origen en un gran campo cultural como es el juego.</p> <p>Entre los propósitos generales se señalan:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• diferenciar entre sucesos deterministas y aleatorios,</li> <li>• realizar combinatorias entre diferentes elementos para definir ocurrencias posibles en un espacio muestral,</li> <li>• estimar la probabilidad de ocurrencia de sucesos</li> <li>• interpretar sistemas de datos que describen diferentes fenómenos naturales o sociales mediante notaciones textuales, gráficas y numéricas</li> </ul>
<i>Conceptos / Contenidos</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Azar</li> <li>• Frecuencias</li> <li>• Sucesos equiprobables</li> <li>• Independencia y dependencia de sucesos</li> <li>• Secuencias de resultados aleatorios</li> <li>• Estimación de posibilidad y probabilidad (sesgos)</li> <li>• Operaciones combinatorias</li> <li>• Sistemas de datos y distribución de muestras y poblaciones</li> <li>• Análisis de relaciones funcionales entre variables (variables y sus relaciones)</li> <li>• Diseño de experimentos</li> <li>• Comprensión de la inferencia</li> <li>• Comprensión de la significación estadística</li> </ul>
<i>Sistemas de enseñanza / Metodologías / Tareas</i>	<p><i>En el preescolar.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Experimentación para estimar posibilidades</li> <li>• Análisis de posibilidades de ocurrencia de hechos en la narratividad</li> <li>• Juegos combinatorios sencillos como solución a</li> </ul>

	<p>requerimientos cotidianos</p> <p><i>En la educación básica primaria</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Estimación cualitativa de posibilidades y probabilidades en juegos y en situaciones no deterministas</li> <li>• Calculo de combinatorias mediante ensayo y error</li> <li>• Experimentación y sistematización de datos</li> </ul> <p><i>En la educación básica secundaria</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Juegos con monedas, dados y sistematización de datos</li> <li>• Experimentos en contextos geométricos</li> <li>• Proyectos sencillos de investigación de carácter cuantitativo</li> <li>• Análisis de fenómenos físicos, atmosféricos, epidemiológicos, económicos, biológicos, políticos, etc.</li> <li>• Construcción de árboles, diagramas, tablas.</li> <li>• Diseño de experimentos</li> <li>• Distribución normales de probabilidad</li> <li>• Distribuciones muestrales</li> <li>• Inferencia y significación</li> </ul>
Recursos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dependiendo de los grados se utilizan diferentes materiales.</li> <li>• En los niños pequeños debe enfatizarse material que pueda ser manipulado.</li> <li>• En los jóvenes es importante utilizar diferentes casos y simulaciones de fenómenos aleatorios de la vida real. Además de diferentes instrumentos de procesamiento de datos y sistematización gráfica de información</li> <li>• Muchos de los materiales se pueden basar en diferentes juegos, tales como dados, bolas en urnas, ruletas, barajas de cartas. De la misma manera se pueden utilizar tablas de números aleatorios, máquinas de Galton, tiro al blanco, plantillas para el dibujo de funciones y modelos, instrumentos de medidas, calculadoras gráficas, computadores, ficheros de datos, recursos de Internet para la localización de información, software para el procesamiento de información, etc.</li> </ul>
Evaluación	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La evaluación más que identificar dominios de contenidos temáticos debe ser un instrumento de promoción de procesos cognitivos y conceptos relacionados con el pensamiento aleatorio (representaciones internas). La evaluación debe identificar y promover la construcción de conceptos como azar, estimación probabilística, combinatoria y distribución y los procesos cognitivos de reversibilidad, causalidad, categorización, modelización, proporcionalidad, inferencia, deducción e inducción.</li> <li>• La evaluación debe promover los intereses cognoscitivos hacia la probabilidad y la estadística desafiando al alumno con problemas interesantes relacionados con diferentes campos de conocimiento</li> <li>• La evaluación debe favorecer la capacidad de comunicar ideas matemáticas haciendo uso de diferentes representaciones culturales externas, textuales o gráficas.</li> </ul>