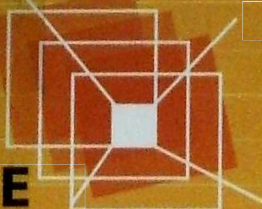




SED  
202



ALCALDÍA MAYOR  
DE BOGOTÁ D.C.  
Secretaría  
Educación

**SERIE**  
Cuadernos de Evaluación

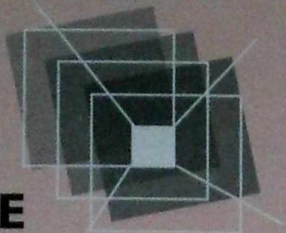
# Resultados de las Pruebas Comprender de Matemáticas

Grados 5° y 9°  
Primera aplicación  
Análisis comprensivo y pedagógico



Bogotá: una Gran Escuela

*Bogotá* sin indiferencia



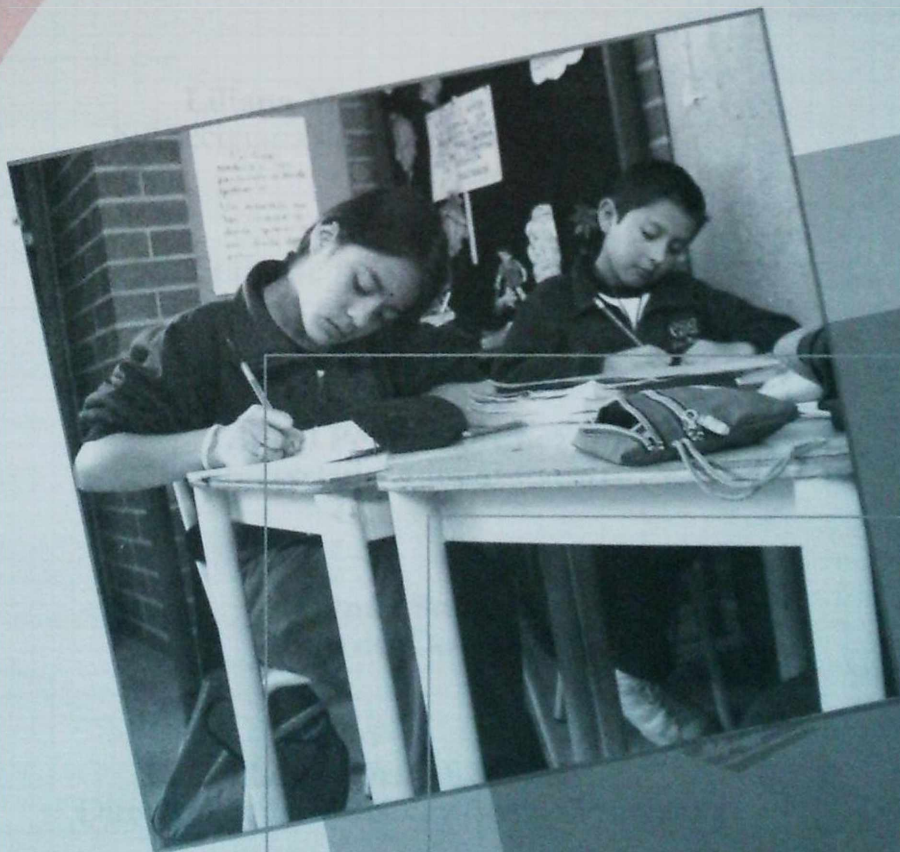
**SERIE**  
Cuadernos de Evaluación



ALCALDIA MAYOR  
DE BOGOTÁ D.C.  
Secretaría  
Educación

# Resultados de las Pruebas Comprender de Matemáticas

Primera Aplicación  
Grados 5° y 9°  
Análisis comprensivo y pedagógico



Bogotá: una Gran Escuela

*Bogotá sin indiferencia*



**ALCALDIA MAYOR  
DE BOGOTÁ D.C.**

**Luis Eduardo Garzón**  
ALCALDE MAYOR DE BOGOTÁ

**Abel Rodríguez Céspedes**  
SECRETARIO DE EDUCACIÓN DEL DISTRITO

**Liliana Malambo Martínez**  
Subsecretaria de Planeación y Finanzas

**Francisco Cajiao Restrepo**  
Subsecretario Académico

**Ángel Pérez Martínez**  
Subsecretario Administrativo

**Hernán Suárez**  
Asesor del Despacho

**Marina Ortiz Legarda**  
Directora de Evaluación y Acompañamiento



**ALCALDÍA MAYOR  
DE BOGOTÁ D.C.**

Secretaría  
Educación

## Equipos de trabajo

### Subsecretario Académico

Francisco Cajiao Restrepo

### Directora de Evaluación y Acompañamiento

Marina Ortiz Legarda

### Subdirectora de Evaluación y Análisis

Gloria Mercedes Carrasco Ramírez

### Equipo de profesionales

#### Subdirección de Evaluación y Análisis

Edilberto Novoa Camargo

Henry Figueredo Olarte

Janeth Escobar Castillo

Sandra Sorza González

#### Coordinación editorial

Henry Figueredo Olarte

#### Fotografías

Archivo digital, Secretaría de Educación Distrital

#### Corrección de estilo

L. Mercedes Rengifo B.

#### Diagramación e impresión

Imprenta Nacional de Colombia

ISBN: 978-958-8312-11-8

#### Distribución gratuita

Derechos reservados

### Primera Parte

Evaluación de los pensamientos numérico  
y racional-algebraico

#### Coordinación Académica

Jorge Castaño García

#### Asesor

Carlos Eduardo Vasco

#### Equipo de investigación "Saberes y Escuela"

Alexandra Oicatá Ojeda

Alexander Castro Miguez

Faberth Díaz Celis

### Segunda Parte

Evaluación del pensamiento aleatorio

#### Coordinador

Jaime Parra Rodríguez

#### Asesor

Carlos Eduardo Vasco

#### Equipo de investigación

Fernando Guerrero

Liced Zea

Vilma Espejo

#### Asesores estadísticos

Carolina López

Carolina Merizalde

John Jairo Rivera

Análisis Estadístico General pruebas Comprender

Universidad Nacional de Colombia

Jimmy Corzo

Prohibida la reproducción total o parcial de esta publicación sin la autorización de la Secretaría de Educación Distrital Av. El Dorado No. 66-63 Bogotá, D.C. Colombia

PBX: 3241000 Exts. 2140, 2149, 2211, 2141, 2142.

[www.sedbogota.edu.co](http://www.sedbogota.edu.co) • [www.redacademica.edu.co](http://www.redacademica.edu.co)

e-mails: [gcarrasco@sedbogota.edu.co](mailto:gcarrasco@sedbogota.edu.co) • [hfigueredo@sedbogota.edu.co](mailto:hfigueredo@sedbogota.edu.co) • [enovoa@sedbogota.edu.co](mailto:enovoa@sedbogota.edu.co)

Bogotá, D.C., febrero de 2007

## Tabla de contenido

Presentación .....	9
<b>PRIMERA PARTE: Evaluación de los pensamientos numérico y variacional-algebraico .....</b>	<b>13</b>
Prólogo a la primera parte.....	15
Prefacio a la primera parte .....	17
<b>1. Enfoque y estructura de la prueba.....</b>	<b>19</b>
1.1 Evaluación de y para la comprensión .....	19
1.2 Niveles de comprensión .....	21
1.3 Niveles de complejidad de las tareas .....	22
1.4 Categorías de desempeño .....	22
1.5 Campos y subcampos de evaluación .....	23
<b>2. Descripción y análisis de los resultados grado 5° .....</b>	<b>24</b>
2.1 Rendimientos promedios en la prueba y por subcampo .....	24
2.2 Rendimientos en cada pregunta .....	25
2.3 Modelo de complejidad de las preguntas .....	26
2.4 Categorías de desempeño de los evaluados .....	26
2.5 Distribución de los evaluados según rendimiento en la prueba .....	27

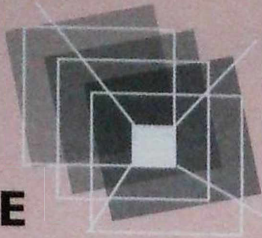
2.6	El subcampo de lo aditivo (instrumento A).....	27
2.7	El subcampo de lo multiplicativo (instrumento A) .....	29
2.8	El subcampo de problemas abiertos (instrumento A) .....	30
2.9	El subcampo de problemas aditivo-multiplicativos (instrumento B) .....	33
2.10	Rendimiento en el subcampo de fraccionarios o racionales positivos en sus expresiones fraccionarias (instrumento B) .....	34
2.11	Rendimiento en el subcampo del sistema decimal de numeración (SDN), representaciones decimales de medidas compuestas y orden numérico .....	36
2.12	Rendimiento en el subcampo procesos de razonamiento (instrumentos A y B).....	38
3.	<b>Descripción y análisis de los resultados grado noveno ...</b>	<b>39</b>
3.1	Rendimientos promedio en la prueba y en los subcampos.....	39
3.2	Rendimientos en cada pregunta .....	39
3.3	Modelo de complejidad de las preguntas .....	40
3.4	Nivel de desempeño de los evaluados en cada subcampo .....	40
3.5	Distribución de los evaluados según rendimiento en la prueba .....	41
3.6	El subcampo de los enteros .....	42
3.7	El subcampo de los racionales .....	43
3.8	El subcampo de los problemas abiertos .....	44
3.9	El subcampo de lo variacional-algebraico.....	46
3.10	El subcampo de razonamiento.....	47
4.	<b>Las preguntas de textos instruccionales y su relación con el rendimiento en la prueba .....</b>	<b>49</b>
5.	<b>Nivel de desempeño de los evaluados .....</b>	<b>52</b>
6.	<b>Resultados de las pruebas en relación con variables socio-culturales e institucionales.....</b>	<b>52</b>

6.1	Relación entre el rendimiento en la prueba y factores socioeconómicos ..	52
6.2	Relación entre el rendimiento en la prueba y nivel educativo .....	54
6.3	Rendimiento por sector .....	55
6.4	Rendimiento según jornada .....	55
7.	Conclusiones .....	56
8.	Anexos.....	58
	Anexo 1. Frecuencia de selección de cada opción y pregunta.....	58
	Anexo 2. Descripción de las preguntas .....	59
	Anexo 3. Categorías de desempeño y rendimiento de la prueba (A) ..	63
	Categorías de desempeño y rendimiento de la prueba (B)...	64
	Categorías de desempeño y rendimiento de la prueba (C)...	65
	Anexo 4. Pruebas estadísticas.....	66

## SEGUNDA PARTE: Evaluación del pensamiento aleatorio ..... 67

I.	El sentido de la evaluación desde la comprensión matemática .....	69
1.1	La comprensión matemática.....	69
1.2	Dimensiones del pensamiento matemático .....	71
1.3	Evaluación del pensamiento aleatorio .....	71
2.	Análisis de resultados de la prueba del pensamiento aleatorio Grado 5° .....	74
2.1	Muestra.....	74
2.2	Desempeños generales para la totalidad de la población.....	75
2.3	Desempeños para cada categoría para la totalidad de la población.....	77
2.4	Desempeños según categorías.....	80

2.5	Desempeños generales según sectores .....	81
2.6	Desempeños generales según jornadas .....	82
2.7	Desempeños generales según estratos.....	82
2.8	Variables de capital cultural.....	83
3.	<b>Análisis de resultados de la prueba de pensamiento aleatorio Grado 9° .....</b>	<b>87</b>
3.1	Muestra.....	88
3.2	Desempeños generales para la totalidad de la población.....	89
3.3	Desempeños para cada categoría para la totalidad de la población.....	90
3.4	Desempeños según categorías.....	93
3.5	Desempeños generales según sectores .....	94
3.6	Desempeños generales según jornadas .....	95
3.7	Desempeños generales según estratos.....	96
3.8	Variables de Capital Cultural .....	97
4.	<b>Diferencias en los desempeños en la prueba de pensamiento aleatorio grados 5° y 9° .....</b>	<b>100</b>
5.	<b>Conclusiones pedagógicas y socioculturales .....</b>	<b>102</b>
5.1.	Desempeños generales.....	102
5.2	Desempeños por categorías.....	102
5.3	Desempeños generales por segmentos de la población .....	103
5.4	Variables de capital cultural.....	104
6.	<b>Orientaciones curriculares y didácticas .....</b>	<b>104</b>
	<b>Bibliografía.....</b>	<b>107</b>

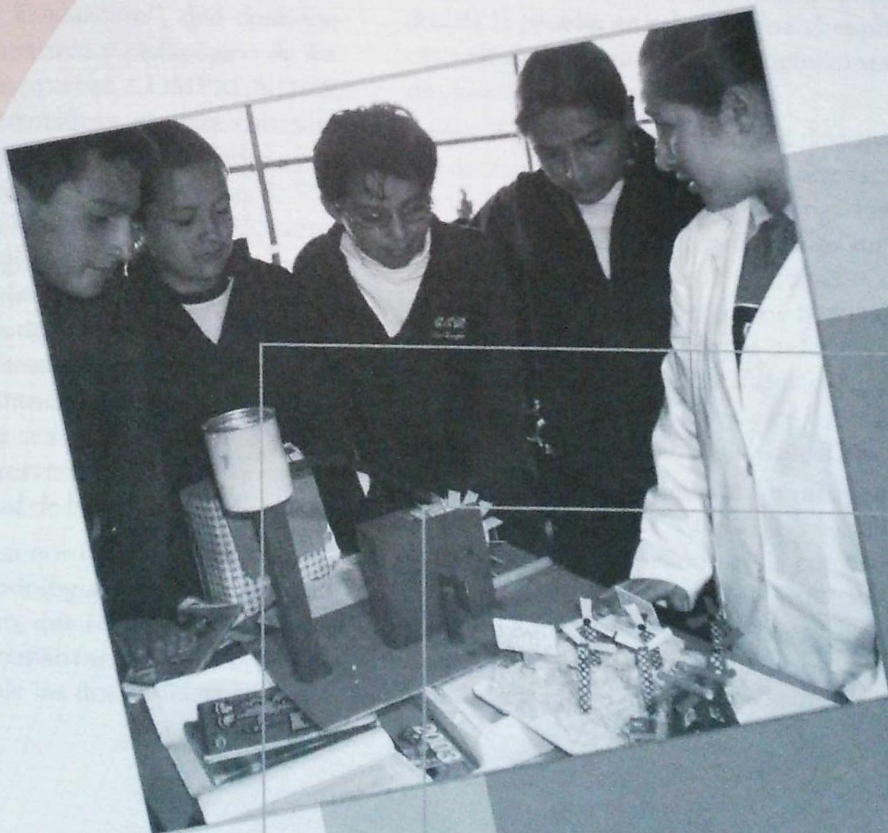


**SERIE**  
**Cuadernos de Evaluación**



**ALCALDIA MAYOR  
DE BOGOTÁ D.C.**  
Secretaría  
Educación

# Presentación



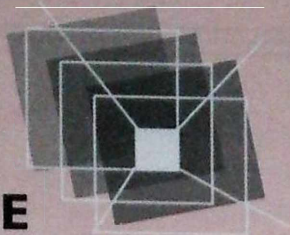
La Secretaría de Educación Distrital hace entrega a la comunidad educativa de Bogotá esta edición de la serie “Cuadernos de Evaluación”, que contiene el análisis comprensivo y pedagógico de los resultados de las pruebas COMPRENDER de lenguaje, matemáticas, ciencias naturales y ciencias sociales que fueron aplicadas a una muestra representativa de estudiantes de 5° y 9° de educación básica en el año 2005, pertenecientes a colegios oficiales y no oficiales de Bogotá. Así mismo, se da a conocer el resultado del análisis de la relación entre el capital cultural de los estudiantes y sus resultados en las Pruebas Comprender, estudio que se realiza por primera vez en Bogotá y que aporta elementos interesantes a las discusiones en torno a la calidad de la educación.

Es de recordar que cada área fue evaluada desde dos metodologías diferentes; por ello este documento, que recoge los resultados del área de Matemáticas, contiene el análisis de resultados de las dos pruebas aplicadas

en dicha área, así: enfoque y estructura, descripción y análisis de los resultados de los grados 5° y 9°, análisis de ítems, resultados de la prueba en relación con el capital cultural de los estudiantes, conclusiones y recomendaciones pedagógicas.

Este documento, está dirigido a directivos docentes, maestros y maestras, diseñadores de la política del sector, investigadores educativos y a todos los interesados en la problemática educativa de la ciudad. Con él esperamos brindar elementos que aporten a la transformación de las prácticas de enseñanza y de evaluación en los colegios, enriquezcan el debate pedagógico e incidan en la política de calidad de la educación.

De esta manera, la actual administración a través del proyecto “Currículo y Evaluación” continúa avanzando en la construcción del Sistema Integral de Evaluación para el Distrito, conforme a lo propuesto en el Plan Sectorial de Educación 2.004 - 2008 “Bogotá: una Gran Escuela”.



**SERIE**  
Cuadernos de Evaluación

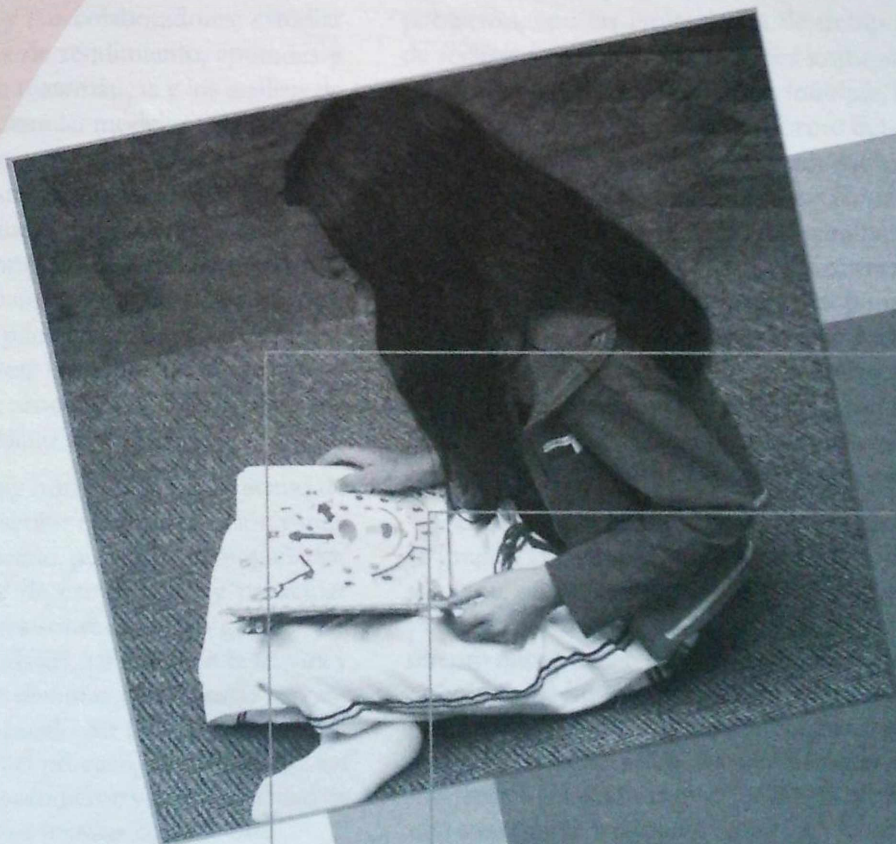


ALCALDIA MAYOR  
DE BOGOTÁ D.C.  
Secretaría  
Educación

# Primera Parte

## Evaluación de los pensamientos numérico y variacional - algebraico

Análisis comprensivo y pedagógico  
Grados 5° y 9°



## Prólogo a la primera parte

**E**l escrito que el lector o lectora tiene en sus manos es el resultado de un largo y delicado proceso seguido por sus autores y sus colaboradores: estudiar distintas pruebas de rendimiento, aptitudes y competencias en matemáticas y los análisis de sus resultados; formular modelos teóricos de la comprensión, en particular en los campos del pensamiento numérico y del variacional-algebraico; diseñar nuevas pruebas apropiadas para valorar esa comprensión: ensayarlas con una muestra pequeña; procesar los datos iniciales de las pruebas piloto, analizar los resultados y revisarlas; aplicar las nuevas versiones a una muestra grande; procesar los datos; analizar los resultados y redactar este informe.

Me siento muy honrado por la solicitud de los autores de escribir esta presentación y muy satisfecho de hacerlo, pues pude acompañarlos en buena parte de ese proceso y participar en las reflexiones sobre el marco general, las preguntas y los datos, así como en la lectura y discusión de las distintas versiones de este informe. Por ello puedo dar fe de la seriedad con la que tomaron el proceso, de la finura de los análisis que emprendieron y de la capacidad de autocritica de sus propias conclusiones.

Como cualquier resultado de una evaluación por muestreo (no censal), con muestras relativamente pequeñas para el tamaño de la población, con las limitaciones de tiempo y de recursos y con las restricciones impuestas por una prueba escrita de opción múltiple, las cifras y afirmaciones de este informe deben tomarse con cautela y reserva, sin saltar a conclusiones no sustentables por los datos ni utilizar apresuradamente algunos resultados para alabar o condenar personas e instituciones o para asignar culpabilidades y responsabilidades. Los autores han tratado de redactar sus conclusiones con el debido cuidado y las salvedades necesarias, pero el lector o lectora tiene delante una tarea difícil de interpretación, reflexión y ponderación del texto que sigue.

Dentro de las competencias matemáticas, se precisó el campo de la competencia en resolución de problemas contextualizados que pudieran resolverse con la ayuda del pensamiento numérico en los campos aditivo, multiplicativo y aditivo-multiplicativo, por medio del empleo de sistemas numéricos naturales con su notación usual, de los sistemas de números fraccionarios o racionales positivos con sus representaciones verbal, fraccionaria,

decimal y porcentual y, para noveno grado, de los sistemas de números enteros con su representación usual.

Como toda competencia, las competencias matemáticas tienen al menos tres componentes: el componente llamado “de contenidos”, que incluye lo que se suele denominar como “conocimientos, habilidades y destrezas” con sus comprensiones respectivas; el componente emocional, actitudinal o afectivo que permite actuar con iniciativa, gusto, concentración, persistencia, flexibilidad y efectividad, y el componente de detección de las oportunidades de utilizarlos en la tarea propuesta. Es difícil evaluar los tres componentes por medio de pruebas escritas con preguntas cerradas, pero dentro de esas limitaciones, los autores lograron circunscribir aspectos claves de las competencias matemáticas en los campos y subcampos seleccionados que les permitían prever buenas posibilidades de evaluar la comprensión.

Los autores optaron también por evaluar simultáneamente la capacidad de leer y seguir instrucciones, con resultados que se podían predecir, pero que no dejan de preocupar: el alto número de niños y niñas que no parecen poder leer y seguir instrucciones sencillas hace

dudar de si lo que se evalúa en las pruebas de matemáticas es más la comprensión de lectura de los enunciados que el avance en el pensamiento matemático mismo. En los demás aspectos de la prueba, los modelos previos que sus autores elaboraron para prever los niveles de competencia resultaron en general acordes con los datos empíricos, con las salvedades que lector o lectora podrán encontrar en el texto que sigue.

El estudio del referente teórico, de los campos y subcampos seleccionados, de las preguntas, de las respuestas de los niños, niñas y jóvenes evaluados, así como de los análisis que de esas respuestas proponen los autores en este texto, serán fuente abundante de reflexión, estudio y aprendizaje por parte de maestros y maestras, directivos docentes, profesores e investigadores de todos los niveles de la educación.

No queda más sino invitar al lector o lectora a adentrarse en el texto mismo, con el cuidado que merece cada una de las páginas siguientes, a reflexionar sobre ellas, a buscar allí sugerencias para mejorar las propias prácticas y a proponer nuevas investigaciones y estrategias de mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas.

**Carlos E. Vasco U.**

## Prefacio a la primera parte

**E**n esta primera parte el lector o lectora encontrará el análisis de los resultados de las “Pruebas Comprender” de matemáticas, aplicadas en el mes de septiembre de 2005, a una muestra de estudiantes de los grados quinto a noveno en Bogotá. En el numeral 1 el lector y la lectora encontrarán un marco de referencia útil para entender la orientación y estructura dadas en estas pruebas, en los numerales 2 y 3 encontrará los análisis de los resultados de quinto y de noveno, respectivamente. En los numerales 4 y 5 se analizan dos aspectos importantes para estas pruebas: el primero corresponde al desempeño de los evaluados en las preguntas de textos instruccionales y el rendimiento de la prueba, y el segundo, corresponde a la validez de las categorías de desempeño de los evaluados. En el numeral 6 se cruzan los resultados de las pruebas con algunas variables socio-económicas y culturales que permiten observar algunos comportamientos de la población de evaluados. Al final se entregan anexos en detalle sobre la descripción de las preguntas y algunos datos estadísticos –dentro de las posibilidades de extensión de un documento como este–, para que, por cuenta propia, el lector o lectora tenga

elementos de juicio para dar cuenta de la validez de los análisis y de las afirmaciones que los autores hacen, a la vez que le permitan hacer emprender sus propios análisis. Los autores tuvieron que sacrificar el análisis detallado de los resultados de algunas preguntas, los interesados los encontrarán en la página web.

En los numerales 2.1 y 3.1 los lectores y lectoras encontrarán una descripción global de los resultados de cada prueba, que les permitirán tener una mirada rápida de los resultados. Los demás numerales son análisis detallados de los resultados, se sugiere disponer de las pruebas y de la guía “Pruebas Comprender” de matemáticas<sup>1</sup>. Se recomienda que este documento, además de ser leído individualmente, sea objeto de estudio colectivo en las instituciones (en las reuniones de nivel, de área). La iniciativa de rectores y rectoras, de coordinadores y coordinadoras académicos y del área de matemática es muy importante para obtener el mayor beneficio posible. Las

<sup>1</sup> Serie: Secretaría de Educación. Cuadernos de Evaluación. Pruebas Comprender de Matemática. Secretaría de Educación. Bogotá. Agosto 2005. Disponible en Internet [http://www.redacademecia.edu.co/redacad/export/REDACADEMICA/directivos/evaluacion/pruebas\\_comprender/archivos/MATEMATICAS.pdf](http://www.redacademecia.edu.co/redacad/export/REDACADEMICA/directivos/evaluacion/pruebas_comprender/archivos/MATEMATICAS.pdf)

“Pruebas Comprender” si bien son pruebas externas, no se conciben para calificar instituciones ni personas, más bien se piensan para entregar información útil y confiable a los diferentes estamentos involucrados en la educación de los niños y jóvenes de la ciudad, que sirva de referente para sus análisis.

Se recomienda a los lectores y lectoras<sup>2</sup> evitar extraer conclusiones de datos parciales de este estudio y especialmente de hacer afirmaciones categóricas sobre la base de los análisis que aquí se presentan. Toda prueba masiva, aún las censales, son un muestreo —algunas con mayor grado de confiabilidad y validez que otras, pero finalmente muestreo—. Ante la imposibilidad de observar la totalidad o sectores más o menos amplios y en situación real de la actuación de los sujetos, se seleccionan algunas tareas que se asumen como representativas de los que el sujeto puede hacer, en nuestro caso

comprensivamente; siempre queda pendiente demostrar que estas tareas sí representan lo que realmente hacen los evaluados. De hecho se sabe que un instrumento escrito, por su propia naturaleza, restringe su muestreo a sectores de la actuación de sujeto que dejan de lado aspectos que son más importante observar, bien como persona y como sujeto intelectual (en nuestro caso en el campo de la matemática). De cualquier manera mediante este recurso metodológico siempre se tendrá la limitante de hablar del todo por lo que se encuentra en una parte y hay que tener presente que esta parte, a veces, es demasiado reducida o mal configurada.

Finalmente los autores agradecen las orientaciones ofrecidas por el profesor Carlos Eduardo Vasco en el diseño de estas pruebas y su análisis.

<sup>2</sup> Para simplificar la lectura y hacer más fluida la lectura de aquí en adelante no se seguirá presentando una escritura diferenciada en género. Las colegas maestras y las lectoras sabrán excusar a los autores por esta cesión.

## I. Enfoque y estructura de la prueba

**E**n este numeral se presentan algunas ideas básicas que orientaron el diseño de las preguntas y el análisis de los resultados de las dos pruebas. Inicialmente se ofrecen explicaciones sobre lo que se asume como comprensión y después se precisa la estructura de las pruebas.

### I.1 Evaluación de y para la comprensión

Las pruebas *Comprender de Matemáticas*, pretenden evaluar la comprensión que los estudiantes han alcanzado en ciertos aspectos de la matemáticas, en este caso del pensamiento numérico y no la simple habilidad de seguir procedimientos estereotipados, entendiendo a la evaluación ante todo como un acto de comprensión y no como un simple hecho de clasificación de resultados.

Debido a que lo matemático es demasiado amplio como para ser abarcado con rigor por una prueba que –como ésta– tiene que resolverse en un tiempo relativamente escaso, se restringió la extensión del campo de evaluación a lo numérico en el caso de grado quinto y, en el caso de grado noveno, a lo numérico

y a lo variacional-algebraico. Esta decisión se tomó con la intención de ganar precisión en la información obtenida y en las conclusiones que de ella se derivaran.

#### ¿Por qué diseñar pruebas de comprensión?

Es común hacer una distinción, e incluso en algunos casos una separación, entre comprensión y actuación. Así, en el caso de la matemática se dice: una cosa es comprender un problema y otra es ser capaz de resolverlo. En cierta medida en esta afirmación hay algo de razón; pero las cosas no son tan simples: en algunas tareas puede haber actuación exitosa sin comprensión y, en otras, comprensión sin actuación exitosa. Es posible que un alumno identifique algunos números en el enunciado de un problema prototípico en el que ha recibido entrenamiento, opere con ellos mecánicamente y obtenga la respuesta correcta sin entender gran cosa sobre la situación descrita en el problema; o que un sujeto comprenda correctamente un problema y, sin embargo, no obtenga la respuesta correcta, por carecer de los conocimientos algorítmicos para ejecutar los cálculos que su resolución requiere; como darse el caso de un estudiante de cuarto grado

cuando da muestras de comprender un problema que se resuelve calculando la división de dos números decimales, pero no sabe cómo hacer los cálculos; o a uno de undécimo que comprende que resolver ese problema requiere formular una expresión que relacione dos de las variables y, después de eso, integrar la función encontrada, pero desconoce la técnica para hacer la integración.

En la relación entre comprensión y actuación las cosas no acaban ahí. En los ejemplos mencionados, aunque los estudiantes no puedan hacer los cálculos, no quiere decir que no hayan comprendido ni actuado. El hecho de decir o escribir el plan que se va a seguir para resolver un problema es en sí una actuación valiosa. Son estas conductas las que permiten conocer cómo los estudiantes comprenden los problemas y el nivel de complejidad de esas comprensiones, aún sin llegar a la respuesta correcta.

Conocer las comprensiones de un sujeto exige observar sistemáticamente sus actuaciones al intentar resolver problemas; eso que permanece constante en una y otra actuación al intentar resolver los problemas, -que por algún criterio particular se considera que pertenecen a una misma clase-, es lo que brinda información sobre la comprensión que ese sujeto tiene sobre esa clase de problemas.

Se dirá con David Perkins (1998) que se sabe que una persona comprende cuando manifiesta un desempeño flexible: *“La comprensión se presenta cuando la gente puede pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que sabe. Por contraste, cuando un estudiante no puede ir más allá de la memorización y el pensamiento y la acción rutinarios, esto indica que falta comprensión”*<sup>3</sup>.

Parece razonable aceptar que la comprensión de un sujeto se pone en evidencia a partir

de sus actuaciones y que se puede asignar mayor nivel de comprensión en la medida en que sea mayor la capacidad del sujeto para enfrentar de manera adecuada (aunque no necesariamente correcta) situaciones novedosas. Sin embargo, es claro que la actuación no es la comprensión. El “hacer” no es el “saber” que soporta ese hacer. Una cosa es aceptar que a la comprensión se accede a través de la actuación y otra es afirmar que la actuación es la comprensión misma. Identificar actuación y comprensión conduce a limitar la evaluación al registro de desempeños, regresando así a la evaluación conductista que sólo tenía en cuenta el número de respuestas correctas.

La comprensión es aquello que se asigna al sujeto para explicar su actuación. En palabras de Hiebert y Carpenter (1992), “... la comprensión está basada en el supuesto de que el conocimiento está representado internamente y de que esas representaciones internas están *estructuradas*. Una forma útil de describir la comprensión es en términos de la manera como se estructuran las representaciones internas de un individuo”<sup>4</sup>. De ahí que tendría que decirse que la comprensión, sea lo que sea en el sujeto mismo, para los propósitos prácticos de investigar, enseñar y evaluar, es el modelo que construye el que investiga, el que enseña o el que evalúa para explicar la actuación del sujeto.

Estas distinciones obligan a hacer dos consideraciones. La primera es que la comprensión genuina de un sujeto no se manifiesta de manera directa a partir de sus enunciaciones superficiales o de sus acciones puntuales y aisladas, por el contrario, a ella se accede me-

<sup>3</sup> En Wiske, M. S. (Ed.). (1998). Enseñanza para la comprensión. México: Paidós.

<sup>4</sup> Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Aprendizaje y enseñanza con comprensión. Traducción de Hernando Alfonso y Patricia Inés Perry del capítulo “Learning and teaching with understanding”. En: D. Grouws (Ed.), Handbook for research on mathematics teaching and learning (pp. 65-97). New York: MacMillan.

diante la indagación sistemática y profunda del investigador (en nuestro caso, del evaluador, pero podría ser del docente) sobre distintas actuaciones del sujeto. La comprensión surge del esfuerzo de develar lo que realmente soportan los discursos y las acciones del sujeto y es inferida por el observador a partir de lo que sistemáticamente se dice y se hace.

La segunda consideración apunta a un obstáculo adicional que se suma a los muchos que tiene toda evaluación y que está relacionado con algo que la investigación psicológica ha establecido: una cosa es poseer una comprensión sobre algo y otra es actualizarla al resolver una tarea particular. Existen factores verbales, figurales y contextuales de una tarea que favorecen la actualización de esquemas distintos a los requeridos para resolverla correctamente y que conducen a respuestas equivocadas. Cuando se trata de instrumentos escritos que se aplican masivamente, factores del lado de la significación y del contexto tienen gran relevancia para hacer manifiesta la comprensión o para ocultarla. Anexo a esto, también existen factores actitudinales y emocionales que pueden ser elementos obstaculizadores para que el sujeto ponga a actuar el esquema adecuado y manifestar la comprensión que tiene. Estos factores dificultan la labor del evaluador, y especialmente cuando se trata de pruebas masivas a través de instrumentos escritos y de pregunta cerrada, de ahí la importancia de ser prudentes en la lectura de los datos y sistemáticos en las indagaciones, antes de arriesgar inferencias sobre la comprensión del sujeto.

## 1.2 Niveles de comprensión

Siempre es posible que la comprensión se amplíe y se profundice. En ese sentido, se acepta que el desarrollo intelectual y las reorganizaciones y elaboraciones avanzan hacia niveles de mayor complejidad. Aceptar lo

anterior no necesariamente implica un modelo unilineal y homogéneo del desarrollo intelectual, como tampoco requiere negar las fuertes evidencias de regresiones o involuciones intelectuales que la investigación psicológica también se ha encargado de mostrar.

Un nivel más elaborado de comprensión en un campo (o dominio) particular está determinado por los mayores grados de flexibilidad del desempeño, expresados *en una mayor capacidad de generalización y transferencia; en una mayor capacidad para abordar problemas cada vez más complejos; en la exhibición de mayor sistematicidad en los procedimientos y estrategias, en la mayor capacidad para manejar sistemas simbólicos, y, finalmente, en una mayor capacidad para producir mejores argumentos para justificar sus propias formas de pensar y para argumentar en contra de posturas contrarias (contra-argumentar).*

La variedad de formas en que se expresa la comprensión hace realmente difícil establecer niveles en campos amplios del desarrollo intelectual: entre mayor sea la amplitud de campo, menor será la precisión con la que se podrá hablar de la comprensión del individuo. En el caso de estas “Pruebas Comprender”, el campo o los campos de evaluación se subdividieron en subcampos y al interior de ellos se definieron tareas diferenciadas en tres niveles de complejidad. Una vez definidos estos niveles se definieron las cuatro categorías en las que se clasifican los desempeños de los evaluados en cada subcampo.

No es tarea fácil definir los niveles de complejidad de las tareas. Una vía que generalmente se sigue es de carácter más empírico: se selecciona un conjunto de tareas que se aplican a un grupo de individuos y, de acuerdo con el grado de dificultad que muestre su aplicación, medido en términos del mayor o menor grado de aciertos, se gradúan en una escala de complejidad creciente. Esta identi-

cación de dificultad con complejidad produce un efecto extraño: muchas veces, tareas que todo profesor reconocería que sus alumnos podrían aprender fácilmente con una pequeña explicación quedan ubicadas en categorías altas de complejidad<sup>5</sup>.

Hay tres variables que son básicas para controlarlas de manera que ayuden y no estorben para definir la complejidad de las tareas: a) *los contextos*: entre mayor sea la familiarización del sujeto con el contexto en el que se ubica un problema, mayores serán las posibilidades de establecer relaciones apropiadas entre los elementos involucrados; b) *la estructura formal de la tarea*: un problema hará mayores o menores exigencias cognitivas a los sujetos dependiendo de la complejidad de los conceptos que involucra y del tipo de problema que trata (simple-compuesto, directo-inverso) y, c) *la formulación lingüística*: un problema puede resultar más fácil o más difícil dependiendo de factores semánticos o sintácticos.

Si se limita lo suficiente un campo de problemas de tal forma que se pueda reconocer un eje de desarrollo cognitivo específico, es posible cruzar y controlar estas variables de manera que permitan definir una jerarquía de complejidad razonable, la cual haga posible ubicar el desempeño de un sujeto de modo que permita inferir su nivel de comprensión alcanzado en este campo.

### 1.3 Niveles de complejidad de las tareas

Con pequeñas variaciones de un subcampo al otro, los niveles de complejidad de las

preguntas responden a los criterios generales que se muestran en la tabla 1.1.

**Tabla 1.1 Niveles de complejidad de las preguntas**

<b>Nivel uno</b>	Corresponde a problemas directos simples y ligados a situaciones familiares para el sujeto (con el fin de garantizar cierta universalidad se trabajaron problemas ligados a situaciones de compra-venta).
<b>Nivel dos</b>	Corresponde a problemas inversos simples o problemas directos compuestos, ligados a situaciones familiares para el sujeto.
<b>Nivel tres</b>	Corresponde a problemas inversos simples o problemas compuestos ligados a situaciones no familiares al sujeto y en algunos casos situaciones abstractas.

### 1.4 Categorías de desempeño

Al estudiar los resultados de un individuo en una prueba con pregunta cerrada, se observa que sus respuestas no son totalmente homogéneas. Puede ocurrir que dé la respuesta correcta en una tarea de nivel alto y a su vez, responda de forma equivocada en la de nivel inferior; datos como estos podrían interpretarse como contradictorios al modelo, pero no necesariamente es así. En el numeral 1.3 se señaló la variabilidad introducida en los factores allí indicados. Si se cuenta con una prueba basada en un modelo de complejidad adecuado, las aparentes contradicciones de este tipo se tendrían que buscar más en factores como desatención, el azar o en respuestas que no son consistentes con el nivel de comprensión del sujeto<sup>6</sup>. Esta falta de homogeneidad de las respuestas de un sujeto al contestar las tareas pertenecientes a un mismo subcampo hay que tenerla presente cuando se trata de

<sup>5</sup> Ver Castaño J. (2004). Área de Matemática. Análisis Cualitativo y Comprensivo de los Resultados (pág. 84-100). Análisis cualitativo y uso pedagógico de los resultados, evaluación censal de competencias básicas. Novena Aplicación. Nov. 2003. Calendario A. Secretaría de Educación. Bogotá

<sup>6</sup> Durante las indagaciones realizadas como parte del diseño de la prueba se encontraron estos casos de aparente contradicción al modelo, pero cuando se hicieron las entrevistas se descubrió que tal contradicción no existía, o el evaluado había contestado la de nivel alto, pero no ofrecía una razón consistente a su explicación o habiendo incurrido en error al contestar la de nivel inferior, contaba con las herramientas intelectuales para haberlo hecho correctamente.

Tabla 1.2 Categorías de desempeño de los evaluados

<b>Categoría de neófitos</b>	Se ubican los sujetos que contestan a) incorrectamente las cinco preguntas del subcampo, o b) correctamente una y solo una de las otras cuatro preguntas.
<b>Categoría de principiantes</b>	Se ubican los sujetos que contestan a) correctamente la pregunta de nivel 1 y cuando más una de las preguntas restantes, o b) incorrectamente la pregunta de nivel 1 y correctamente dos de las cuatro preguntas restantes.
<b>Categoría de iniciados</b>	Se ubican los sujetos que contestan a) correctamente tres preguntas e incorrectamente las otras dos, o b) incorrectamente la pregunta de nivel tres y correctamente las otra cuatro.
<b>Categoría de avanzados</b>	Se ubican los sujetos que contestan: a) incorrectamente una pregunta distinta a la de nivel tres y correctamente las otra cuatro, o b) correctamente las cinco preguntas.

valorar la producción individual, de ahí la necesidad de construir criterios flexibles en el momento de clasificar los desempeños de los estudiantes que no se reduzcan al simple conteo de respuestas correctas. La tabla 1.2 muestra los criterios definidos para agrupar a los estudiantes según su desempeño en cada subcampo.

Para mostrar la validez del modelo, se espera encontrar que los rendimientos de los evaluados ubicados en categorías bajas correspondan a rendimientos bajos en la prueba y el de los ubicados en las categorías altas tengan rendimientos altos. En el anexo No. 3 se presentan los porcentajes de evaluados clasificados en cada uno de las categorías y subcategorías definidas en la tabla 1.2.

## 1.5 Campos y subcampos de evaluación

Como se señaló anteriormente, estas pruebas toman como campos de evaluación en el caso de grado quinto, lo numérico y, en el caso de noveno, lo numérico y lo variacional-algebraico. Para precisar el campo y los subcampos se cruzan dos referentes: a) la investigación sobre los procesos de construcción de los niños y jóvenes de conceptos involucrados en cada campo y, b) los lineamientos curricu-

lares y los estándares para el área. Estos dos elementos permiten una aproximación al nivel de elaboración que es deseable y posible de alcanzar por los estudiantes de los dos grados seleccionados<sup>7</sup>.

Para buscar una exploración más extensa, la prueba de quinto consta de dos instrumentos (A y B) aplicados a sujetos distintos; mientras la prueba de noveno consta de un único instrumento. La tabla 1.3 muestra la distribución de tareas válidas.

Una definición precisa de los subcampos se encuentra en el documento citado en la

<sup>7</sup> Aunque el equipo responsable del diseño de la prueba, estuvo apoyado en la investigación existente, en la experiencia propia y en las evidencias que muestran los maestros consultados y los datos recogidos como parte del proceso de diseño, consideró conveniente dejar de evaluar algunos aspectos o evaluarlos en niveles de profundidad distintos o con énfasis diferentes. Un ejemplo claro es el de los números fraccionarios o racionales positivos con sus representaciones decimales. En el primer caso, aunque los estándares establecen para quinto grado que los niños manejen los algoritmos para calcular los resultados de las operaciones con fraccionarios en notación decimal, estas pruebas no los evalúa; en lugar de ello enfatiza en el concepto mismo de fraccionario como racional positivo (con las relaciones aditivas mayor que y menor que, las relaciones multiplicativas entre ellos y la relación de equivalencia entre símbolos), entendido como partidor y como operador (y no como cociente indicado de naturales). En el segundo caso, los decimales no se evalúan como representaciones de fraccionarios, precisamente por la complejidad que ello supone para estudiantes de este grado, estudian estos números como representaciones de expresiones compuestas (llamadas a veces complejas) para medidas que utilizan una unidad básica y una más pequeña, cada una utilizada un número natural de veces, como "tres metros y cincuenta y cuatro centímetros", codificado como "3.54 m" o "3,54 m".

**Tabla 1.3 Distribución de tareas y número de preguntas por instrumento**

INSTRUMENTO 1		INSTRUMENTO 2		NOVENO	
Comprensión de textos instruccionales 2 preg.					
Aditivo	5 preg.	Aditivo-multip	5 preg.	Sist de los enteros	5 preg.
Multiplicativo	5 preg.	Fracccionarios	5 preg.	Sist de los racionales	5 preg.
Prob abiertos	5 preg.	SDN	2 preg.	Problemas abiertos	3 preg.
		Decimales y orden	2 preg. 1 preg.		
				Variacional –algebraico	5 preg.
Razonamiento	2 preg.	Razonamiento	0 preg.	Razonamiento	3 preg.

referencia a pie de página No. 15; adicionalmente en el momento de la presentación y análisis de los resultados por subcampos, el lector hallará precisiones sobre lo evaluado en cada caso.

## 2. Descripción y análisis de los resultados grado 5°

En este numeral se presentan los resultados obtenidos en la prueba de quinto. Se muestran simultáneamente los resultados de ambos instrumentos A y B. En los numerales 2.1 a 2.5 el lector puede hacerse a una visión general de los resultados. Para un análisis más detallado, en los numerales 2.6 a 2.11 se presentan los resultados en cada subcampo.

### 2.1 Rendimientos promedios en la prueba y por subcampo

Cada uno de los niños evaluados contestó sólo uno de los dos instrumentos A y B que componen la prueba de quinto. La prueba estuvo integrada por diecisiete preguntas validas en el Instrumento A y quince en el B. Adicionalmente, en cada instrumento se incluyeron dos preguntas para evaluar la capacidad para seguir textos instruccionales; éstas fueron las mismas para ambos instrumentos (tabla 2.1).

En el instrumento A el rendimiento promedio presentado fue del 50,0%; el 52,7% de los 1.884 evaluados con este instrumento, tuvo

un rendimiento menor que este promedio. En el instrumento B el rendimiento promedio obtenido fue del 36,3%; el 56,7% de los 1.901 evaluados que resolvió este instrumento, obtuvo un rendimiento menor que este promedio. Quienes respondieron el instrumento A mostraron un rendimiento mucho menos disperso que los que contestaron el instrumento B (la desviación estándar del instrumento A es 14,98, este valor prácticamente representa la tercera parte del rendimiento promedio, mientras que en el instrumento B, es 18,36, y casi alcanza a ser la mitad).

**Tabla 2.1. Descriptores de los dos instrumentos**

INSTRUMENTOS	NÚMERO SUJETOS EVALUADOS <sup>8</sup>	RENDIMIENTO PROMEDIO (en %)	DESVIACIÓN ESTÁNDAR	% EVALUADOS POR DEBAJO DEL REND. PROMEDIO
Instrumento A	1884	50,0	14,98	52,7
Instrumento B	1901	36,3	18,36	56,7

En las tablas No. 2.2 y No. 2.3 se presentan los rendimientos promedio en cada uno de los subcampos.

<sup>8</sup> Se buscó que en una misma institución más o menos coincidiera el número de niños que contestara cada instrumento. El instrumento A fue resuelto por 1.884 niños y el B por 1.901.

<sup>9</sup> El rendimiento en la prueba se expresa en términos de porcentaje. Esto significa que se califica en una escala de 0 a 100. Un estudiante que haya contestado correctamente todas las preguntas tendría una calificación de 100%. Para realizar el cálculo se excluyen las preguntas 1 y 2 de textos instruccionales.

Tabla 2.2. Rendimientos en los subcampos del instrumento 9<sup>10</sup>

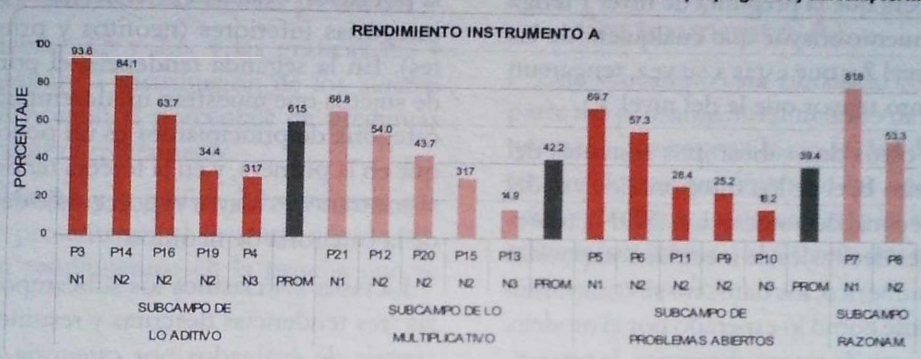
INSTRUMENTO A			
SUBCAMPOS	ADITIVO	MULTIPLICATIVO	PROBLEMAS ABIERTOS
Rendimiento (en %)	61,5	42,2	39,4

Tabla 2.3. Rendimientos en los subcampos del instrumento B

INSTRUMENTO B			
SUBCAMPOS	ADITIVO-MULTIPLICATIVO	FRACCIONARIOS	SISTEMA DECIMAL DE NUMERACIÓN Y ORDEN
Rendimiento (en %)	37,3	33,3	38,4

Gráfica 2.1.

Rendimiento por preguntas y subcampos. Instrumento A



Gráfica 2.2.

Rendimiento por preguntas y subcampos. Instrumento B



<sup>10</sup> En las tablas No 2.2 y No 2.3 no se incluye el subcampo de razonamiento, debido a que se anuló dos de las cuatro preguntas en el instrumento A y las cuatro en el B de este subcampo, por problemas técnicos de impresión de algunos cuadernillos.

## 2.2 Rendimientos en cada pregunta

Las tablas 2.2 y 2.3 y las gráficas 2.1 y 2.2 presentan los rendimientos en cada pregunta y el promedio en cada subcampo.

## 2.3 Modelo de complejidad de las preguntas

De los seis subcampos, los rendimientos obtenidos en el de lo aditivo, de lo multiplicativo, de problemas abiertos y de lo aditivo-multiplicativo satisfacen el modelo de niveles de complejidad de las preguntas<sup>11</sup>. Este modelo consiste en que dentro de un mismo subcampo, se espera que la pregunta de nivel 1 tenga un rendimiento mayor que cualquiera de las tres del nivel 2 y que éstas a su vez, tengan un rendimiento mayor que la del nivel 3.

En los otros dos subcampos restantes del instrumento B, el de los fraccionarios y el del sistema decimal de numeración (SDN), representaciones decimales de medidas compuestas y orden numérico, los datos no se comportan exactamente como lo esperado por el modelo. En el primero de estos subcampos, la pregunta 9 del nivel 2 tiene un rendimiento mayor que la 7 del nivel 1; y en el segundo de estos subcampos, la pregunta 15 del nivel 2 tiene un rendimiento inferior que la pregunta 13 del nivel 3. Estos casos serán objeto de análisis más detallado en los numerales dedicados a estos dos subcampos.

## 2.4 Categorías de desempeño de los evaluados

Al estudiar el nivel de desempeño de los evaluados en cada subcampo, se identifican tres tendencias. La primera se caracteriza porque los evaluados se concentran más en las dos categorías superiores (iniciados y avanzados); la segunda y tercera tendencias, porque la población evaluada se concentra en la dos categorías inferiores (neófitos y principiantes). En la segunda tendencia, el porcentaje de sujetos que muestran un desempeño en la categoría de principiantes es un poco mayor que en la primera, y en la tercera tendencia es al contrario, es mayor el porcentaje de sujetos de la categoría de neófitos.

La tabla 2.4 clasifica los subcampos según las tres tendencias descritas y resume el porcentaje de evaluados por categoría en cada subcampo.

Al estudiar los rendimientos promedio obtenidos en la totalidad de la prueba por los evaluados que quedan en cada una de las cuatro categorías en cada subcampo, se observa que en todos los casos este promedio crece

Tabla 2.4. Tendencias de niveles de desempeño de los evaluados

TENDENCIAS	SUBCAMPOS	CATEGORÍAS			
		Neófitos	Principiantes	Iniciados	Avanzados
Primera Tendencia	Aditivo	3.2	21.9	54.4	20.5
Segunda Tendencia	Multiplicativo	21.5	40.4	33.5	4.6
	Problemas-abiertos	22.1	47.8	25.2	4.9
	Aditivo-multiplicativo	30.7	40.3	19.1	9.8
	SDN, decimales y orden	23.8	46.0	21.9	8.3
Tercera Tendencia	Fraccionarios	44.7	33.0	17.7	4.6

<sup>11</sup> Ver numeral 1.3 y Serie de cuadernos de Evaluación: Pruebas Comprender de Matemáticas, allí se describe con mayor amplitud este modelo. Ver referencias completas en la nota pie de página No. 17.

al subir de categoría. Este dato habla a favor del modelo de categorías de desempeño de los evaluados, diseñado antes de la aplicación de la prueba<sup>12</sup>. En el numeral 5 se estudiará con mayor detalle este hecho.

## 2.5 Distribución de los evaluados según rendimiento en la prueba

Las tablas 2.5 y 2.6, y las gráficas 2.3 y 2.4 muestran la distribución de los sujetos evaluados según el porcentaje de preguntas contestadas correctamente.

La tabla 2.5 y la gráfica 2.3 muestran que quienes presentaron el instrumento A, obtuvieron rendimientos en la prueba que se

distribuyen casi simétricamente alrededor del rendimiento promedio (el 50,0%), mientras que la tabla 2.6 y la gráfica 2.4 muestran que la distribución es un poco asimétrica en el caso del instrumento B, concentrándose un poco más por debajo del rendimiento promedio (el 37,4%).

## 2.6 El subcampo de lo aditivo (instrumento A)

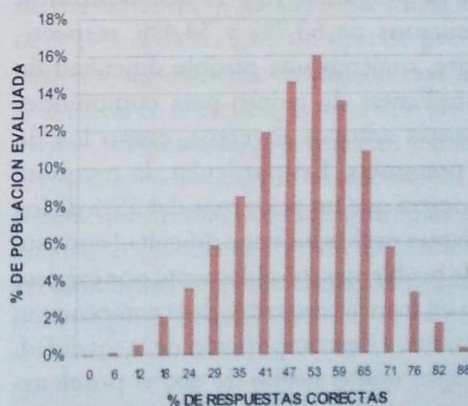
Este subcampo está vinculado con aquella parte del pensamiento numérico de los niños que tiene que ver con la capacidad de enfrentar problemas que implican las operaciones aditivas (adición y sustracción) y las relaciones aditivas (ser mayor que y ser menor que) entre números naturales.

Gráfica 2.3.

Tabla 2.5. Distribución de los sujetos según porcentaje de aciertos

INSTRUMENTO A		
% de respuestas correctas	Número de evaluados	% de la población evaluada
0	2	0.1
6	4	0.2
12	12	0.6
18	40	2.1
24	69	3.7
29	112	5.9
35	162	8.6
41	226	12.0
47	278	14.8
53	304	16.1
59	258	13.7
65	207	11.0
71	110	5.8
76	63	3.3
82	31	1.6
88	6	0.3
<b>Total</b>	<b>1884</b>	<b>100</b>

El 0,1 indica que el 0,1% de la población evaluada (2 sujetos de 1.884 evaluados) contesta 0% de las tareas que componen la prueba.



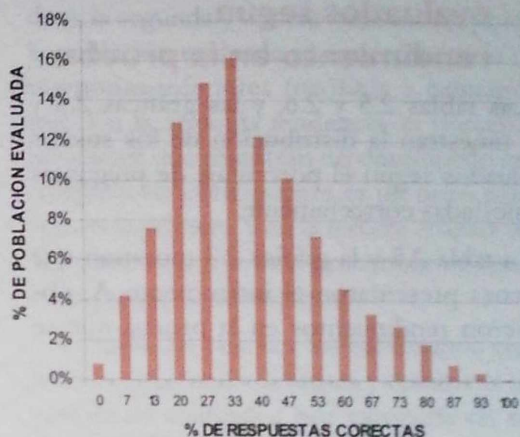
<sup>12</sup> Ver numeral 1.4

Gráfica 2.4.

Tabla 2.6. Distribución de los sujetos según porcentaje de aciertos

INSTRUMENTO B		
% de respuestas correctas	Número de evaluados	% de la población evaluada
0	15	0.8
7	80	4.2
13	144	7.6
20	246	12.9
27	284	14.9
33	308	16.2
40	232	12.2
47	193	10.2
53	137	7.2
60	88	4.6
67	63	3.3
73	51	2.7
80	35	1.8
87	15	0.8
93	8	0.4
100	2	0.1
<b>Total</b>	<b>1901</b>	<b>100</b>

El 4,2 indica que el 4,2% de la población evaluada (80 sujetos de 1901) contesta correctamente el 7% (1,4 preguntas) de las tareas que componen la prueba.



Los dos problemas directos (las preguntas 3 y 14) obtuvieron los rendimientos más altos 93,6% y 84,1% (tabla 2.7). Los resultados de las preguntas 16 y 19 que alcanzaron rendimientos de 63,7% y 34,4%, respectivamente, sugieren una posible dificultad de los estudiantes de quinto para comprender problemas aditivos inversos, como los de estas preguntas. En particular, la pregunta 16, muestra que un poco más del 35% de los estudiantes evaluados tiene dificultad con este tipo de problemas, posiblemente por exigirse en ella un manejo reversible de la composición de las partes y descomposición de la totalidad. Parece ser que el hecho de que el problema de la pregunta 19 requiera invertir la relación *“el arroz cuesta ... menos que el aceite”* para obtener *“el aceite cuesta ... más que el arroz”*, lo hace especialmente complejo.

Tabla 2.7. Rendimiento por pregunta en el subcampo de lo aditivo

NIVEL	N1	N2	N2	N2	N3	PROMEDIO
Nº PREGUNTA	P3	P14	P16	P19	P4	
PORCENTAJE	93.6%	84.1%	63.7%	34.4%	31.7%	61.5%

La pregunta 4, del nivel 3, obtuvo un rendimiento del 31,7%. Este problema requiere comprender la composición de operadores aditivos naturales; el resultado alcanzado muestra la gran dificultad que representa para los estudiantes hacer operaciones entre operadores naturales.

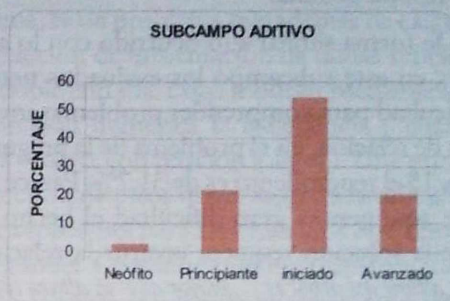
El 75% de la población evaluada se ubicó en los dos categorías superiores, la de iniciados y avanzados (tabla 2.8). El 25% restante se situó en las dos categorías inferiores, la de neófitos

Gráfica 2.5.

61 individuos, el 3,2%, se ubican en la categoría de neófitos y tienen en promedio un rendimiento en la prueba de 24,3%.

**Tabla 2.8. Distribución de la población evaluada según el nivel de desempeño alcanzado en el subcampo de lo aditivo (instrumento A)**

CATEGORÍAS	NÚMERO DE SUJETOS	SUJETOS (%)	REND. PRUEBA (%)
Neófito	61	3.2	24.3
Principiante	413	21.9	37.5
Iniciado	1024	54.4	52.9
Avanzado	386	20.5	59.8
<b>Total</b>	<b>1884</b>	<b>100.0</b>	



y principiantes; el 3,2% (52 individuos de los 1884 evaluados) quedó en la categoría más baja, la de los neófitos. Dado el carácter tan básico de las tareas de los niveles 1 y 2 de este subcampo, es importante llamar la atención sobre los posibles vacíos en el pensamiento aditivo de algunos estudiantes de quinto que pueden estar mostrando estos resultados

Conviene diseñar experiencias que favorezcan en los alumnos la capacidad para resolver problemas aditivos inversos y compuestos. Ayudar a los estudiantes a interpretar variadas situaciones con la idea de operadores aditivos naturales y apoyarlos para que lleguen a complejizar su pensamiento al punto que puedan componerlos, favorece el desarrollo del pensamiento aditivo y los prepara para una adecuada comprensión de los números enteros.

## 2.7 El subcampo de lo multiplicativo (instrumento A)

Este subcampo está vinculado con aquella parte del pensamiento numérico de los niños que tiene que ver con la capacidad de enfren-

tar problemas que implican las operaciones multiplicativas (multiplicación y división) y las relaciones multiplicativas (*ser múltiplo de y ser divisor de*) entre naturales.

En la tabla 2.9 el problema de la pregunta 21, del nivel 1, obtuvo el rendimiento más alto en este subcampo (66,8%). En el problema de la pregunta 12, que es un problema multiplicativo inverso simple (el típico problema de “repartición”), alcanzó un rendimiento de 54,0%. Por ser este un tipo de problema básico y seguramente trabajado con alguna frecuencia en la escuela, el resultado obtenido invita a preguntarse, ¿por qué casi la mitad de los evaluados fracasan en su resolución?. Vale la pena que los maestros indaguen para poder precisar lo que sucede en este caso: ¿realmente los estudiantes de quinto tienen dificultad para resolver problemas de este tipo?. Una posible

**Tabla 2.9. Rendimiento por pregunta en el subcampo de lo multiplicativo**

NIVEL	N1	N2	N2	N2	N3	PROM
N° PREGUNTA	P21	P12	P20	P15	P13	
PORCENTAJE	66.8%	54.0%	43.7%	31.7%	14.9%	42.2%

respuesta quizá sea que el rendimiento en esta pregunta, más que deberse a dificultades de los evaluados con la estructura lógica del problema, obedece a factores de tipo semántico, es posible que la expresión “empacan 640 panelitas en cajas de 32 unidades cada una” les resulte extraña.

De forma similar a lo ocurrido con lo aditivo, en este subcampo los evaluados tienen dificultad para comprender problemas inversos de relación, en el problema de la pregunta No. 15 el rendimiento es de 31,7%. Parece ser que aquí genera gran dificultad el hecho de que la solución requiera invertir la relación: *“la altura del árbol es ... mayor que la altura con la que aparece en la fotografía”, para obtener la relación inversa “que la altura del árbol en la fotografía es ... menor que la de la altura real del árbol”*. El rendimiento de 14,9% en la pregunta 13 sugiere que los estudiantes pueden tener dificultades para la composición de operadores naturales multiplicativos.

El 38,1% de la población evaluada se ubica en los dos niveles superiores (tabla 2.10). Este dato contrasta con el obtenido en el subcampo de lo aditivo (75%). El 61,9% de

los evaluados se ubica en las dos categorías inferiores, correspondiendo a la categoría más baja, la de los neófitos, el 21,5%.

Conviene, como en el caso de lo aditivo, ofrecer experiencias a los estudiantes que favorezcan su capacidad para resolver problemas multiplicativos inversos y compuestos. Ayudarlos a interpretar variadas situaciones con la idea de operadores multiplicativos naturales y apoyarlos para que lleguen a complejizar su pensamiento al punto que puedan componerlos, favorece el desarrollo del pensamiento multiplicativo y los prepara para una adecuada comprensión de los números enteros y fraccionarios.

## 2.8 El subcampo de problemas abiertos (instrumento A)

Este subcampo está vinculado con aquellos procesos cognitivos que tienen que ver con la comprensión de problemas propuestos por medio de enunciados que no se presentan en el formato lingüístico usual de los problemas aritméticos de los libros de texto, sino que se acercan más a lo que podría llamarse una

**Tabla 2.10. Distribución de la población evaluada según el nivel de desempeño alcanzado en el subcampo de lo multiplicativo**

CATEGORÍAS	NÚMERO DE SUJETOS	SUJETOS (%)	REND. PRUEBA (%)
Neófito	405	21.5	35.4
Principiante	761	40.4	46.7
Iniciado	631	33.5	60.8
Avanzado	87	4.6	68.6
Total	1884	100	

**Gráfica 2.6.**

405 individuos, el 21,5%, se ubican en la categoría de neófitos, y tienen en promedio un rendimiento en la prueba de 35,4%.



enunciación abierta<sup>13</sup>. En este subcampo no se trata de un componente más del sistema matemático de los números sino de valorar la capacidad de los niños para tomar decisiones sobre la información que sobra o que falta; de seleccionar, entre una variedad de informaciones dadas, las que delimitan un posible problema y las que son pertinentes para su solución; de obtener datos que no se le dan de forma explícita (en tablas, en gráficas o esquemas) y otras capacidades semejantes identificadas por la investigación en resolución de problemas.

Indudablemente, es ficticio separar este aspecto de los demás subcampos; pero en el caso de esta prueba, teniendo en cuenta que este tipo de tareas por la manera en que se formulan, dejan mucho más espacio para que aparezcan múltiples interpretaciones de los niños, que no se pueden controlar en un instrumento escrito aplicado a distancia. Es posible que en muchos casos esas interpretaciones no le permitan a un niño encontrar la solución correcta, aunque cuente con el pensamiento adecuado para comprender la tarea e incluso para comprender versiones más complejas de la misma. El abrir un subcampo de problemas abiertos permitió tomar la decisión de indagar sobre los otros aspectos del pensamiento numérico, mediante problemas con enunciados de formulación lo más precisos posible.

El problema de la pregunta 5 obtuvo un rendimiento de 69,7%, el más alto en este subcampo, seguido de la pregunta 6 con un rendimiento de 57,3% (tabla 2.11). Esta

**Tabla 2.11. Rendimiento por pregunta en el subcampo de problemas abiertos**

NIVEL	N1	N2	N2	N2	N3	PROMEDIO
No. PREGUNTA	P5	P6	P11	P9	P10	
PORCENTAJE	69,7%	57,3%	28,4%	25,2%	16,2%	39,4%

última, es un problema que además de exigir la extracción de información de tablas sencillas de doble entrada, exige modelar mediante una expresión numérica la excedencia (“cuánto más es algo, con relación a algo”). Una primera lectura de estos datos muestra la dificultad que representa para los evaluados este tipo de preguntas. Conviene que los maestros indaguen si estos resultados relativamente bajos reflejan el poco tiempo dedicado a desarrollar experiencias de resolución de problemas abiertos o más bien, en este caso particular, dificultades con aspectos de tipo semántico (¿cuánto más?), o con dificultades de conversión entre el registro basado en el simbolismo aritmético y el lenguaje común.

Los problemas de las preguntas 11, 9 y 10 obtuvieron rendimientos por debajo del 30%. La pregunta 11 requiere hacer una estimación de longitudes. Es difícil afirmar que los estudiantes de quinto en su mayoría tienen dificultad para la estimación a partir de esta tarea; posiblemente las respuestas de algunos de los evaluados puedan justificarse por esta razón; pero quizá ésta no sea una explicación válida en todos los casos. Conviene que los maestros indaguen si en esta ocasión más que estar ante a una dificultad para hacer la estimación, lo que se presentó fue la dificultad de “ponerse en la situación” que requiere la tarea: un 30% de los evaluados parece hacer la estimación, no sobre el objeto real que representa el dibujo de la vitrina, sino sobre el dibujo mismo. Este tipo de cuestiones relativas a la interpretación del contexto pragmático de la situación que se representa es común en

<sup>13</sup> Algunos autores los llaman “problemas mal formulados”, pero si la información superflua o faltante se diseñó intencionalmente para generar procesos cognitivos superiores, esos problemas están mejor formulados que los usuales, en los que se da toda y solo la información necesaria para obtener la respuesta correcta.

pruebas de este tipo; no tener en cuenta estos detalles muchas veces da lugar a conclusiones que no expresan de manera exacta los hechos que se pretenden estudiar.

Las pregunta 9 por su estructura es una tarea que realmente exige resolver cuatro situaciones-problema particulares. Cada situación requiere consultar información en la tabla y resolver problemas multiplicativos simples. El rendimiento obtenido en esta tarea fue del 25,2%. De hecho resultó difícil para los evaluados, pero quizá la dificultad obedezca a la estructura misma de la pregunta más que a la capacidad de enfrentar problemas multiplicativos simples (directos o inversos). Este dato sugiere la necesidad de enfrentar a los niños a pruebas que contengan preguntas de este formato porque muchas veces fracasan en pruebas de este tipo, no tanto por carecer de las construcciones lógicas y aritméticas requeridas para resolverlas correctamente sino por la poca familiaridad que tienen con el formato de las preguntas.

La pregunta 10, un rendimiento de 16,2%, consiste en un problema compuesto (incluye

varias etapas) cuya estructura es la de problemas aditivo-multiplicativos, los resultados obtenidos sugieren que además de las dificultades propias de la interpretación del lenguaje, están las que se refieren a la estructura de la tarea, ya que la solución requiere de la toma de decisiones para aceptar datos parciales.

El 69,9% de los 1884 evaluados se ubicó en las categorías de neófitos y principiantes, el 30,1% en la categorías de iniciados y avanzados (tabla 2.12).

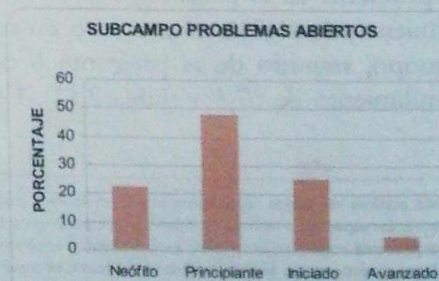
El bajo rendimiento en este subcampo muestra la dificultad que tuvieron los evaluados al enfrentar este tipo de tareas, dificultades que posiblemente estén relacionadas con el poco tiempo dedicado durante las prácticas de enseñanza a este tipo de problemas; pero es importante insistir que quizá también tenga que ver con la dificultad que encierra la presentación de este tipo de tareas a través de instrumentos escritos estandarizados. Como se ha dicho, entre más “abierto” sea la formulación de la tarea, más se amplía el campo de interpretación posible por parte de los evaluados; este hecho conlleva a que muchas veces la interpretación

Gráfica 2.7.

Tabla 2.12. Distribución de la población evaluada según el nivel de desempeño alcanzado en el subcampo de los problemas abiertos

CATEGORÍAS	NÚMERO DE SUJETOS	SUJETOS (%)	REND. PRUEBA (%)
Neófito	417	22.1	35.8
Principiante	901	47.8	48.9
Iniciado	474	25.2	61.1
Avanzado	92	4.9	67.7
Total	1884	100	

417 individuos, el 22,1%, se ubican en la categoría de neófitos y tienen en promedio un rendimiento en la prueba de 35,8%.



que da el evaluado a la tarea no coincida con la intencionalidad del evaluador. Este desencuentro entre evaluador y evaluado no necesariamente debe interpretarse como incapacidad del evaluado. Cualquiera que sea la explicación, es útil en el proceso de enseñanza introducir experiencias en las que los estudiantes se enfrenten a la resolución de problemas abiertos (los proyectos pedagógicos, las situaciones significativas, las construcciones de artefactos son útiles para este propósito).

## 2.9 El subcampo de problemas aditivo-multiplicativos (instrumento B)

Este subcampo está vinculado con aquella parte del pensamiento numérico de los niños que tiene que ver con la capacidad de enfrentar problemas que implican la coordinación de las operaciones y relaciones aditivas con las multiplicativas.

En la pregunta 4, del nivel 1, que es un problema aditivo-multiplicativo directo, se obtuvo el rendimiento más alto del subcampo (tabla 2.13.). Es importante indagar por qué se presentó una diferencia tan notoria entre las preguntas 4 y 12, a pesar de ser ambas problemas directos; una razón podría ser que en la pregunta 4 el problema es de dos etapas y en la pregunta 12 es de tres; o que la diferencia en la formulación de los dos problemas sea otro factor influyente en estos resultados (el segundo de estos dos problemas incluye información en tablas).

Los problemas de las preguntas 16 y 18 son de tipo inverso de dos etapas, estas preguntas obtuvieron rendimientos de 36,7% y 35,1% respectivamente. Dado que es posible representar estos problemas mentalmente como problemas de simple división, los rendimientos conseguidos se pueden considerar bajos.

Tabla 2.13. Rendimiento por pregunta en dos tareas relacionadas con el subcampo de problemas aditivo-multiplicativos

NIVEL	N1	N2	N2	N2	N3	PROMEDIO
Nº PREGUNTA	P4	P12	P16	P18	P6	
PORCENTAJE	60,2%	27,8%	36,7%	35,1%	26,8%	37,3%

Quizá estos resultados además de mostrar la dificultad que tienen los estudiantes de quinto grado para resolver problemas que requieren combinar operaciones y, más aún, cuando son inversos, también pueden indicar la poca comprensión del significado de la división, más exactamente del residuo de la división. Convendría que durante el proceso de enseñanza se enfrente a los alumnos a situaciones que exijan dar significado al residuo de una división y muy especialmente a lo que se reconoce como significado euclídeo de la división (ejemplo,  $234 \div 2 = 19 \cdot 12 + 6$ ).

El problema de la pregunta 6, del nivel 3, obtuvo el más bajo rendimiento del subcampo. Esta pregunta supone un problema aditivo-multiplicativo inverso que requiere dos etapas para ser resuelto: una correspondiente a un problema aditivo simple de descomposición, y otra, que consiste en un problema multiplicativo simple inverso.

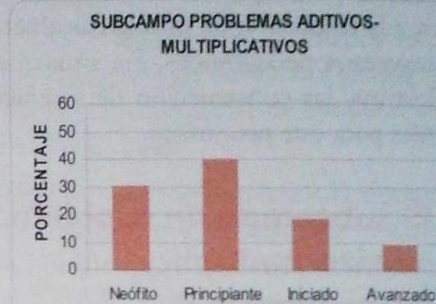
En este subcampo, el 71% de los sujetos evaluados se concentraron en las dos categorías inferiores y sólo un 29% en la superiores, ésto se refleja en el rendimiento promedio de 37,32% en este subcampo (tabla 2.14). Estos datos ponen en evidencia un hecho que es común en este tipo de pruebas: los estudiantes tienen gran dificultad para comprender problemas compuestos que para su resolución requiera descomponerse en varias etapas y particularmente, cuando los problemas exigen la combinación de operaciones aditivas con multiplicativas.

Gráfica 2.8.

Tabla 2.14. Distribución de la población evaluada según el nivel de desempeño alcanzado en el subcampo de los problemas aditivo-multiplicativos

CATEGORÍAS	NÚMERO DE SUJETOS	SUJETOS (%)	REND. PRUEBA (%)
Neófito	584	30.7	22.3
Principiante	767	40.3	33.3
Iniciado	363	19.1	50.1
Avanzado	187	9.8	65.7
Total	1901	100	

767 individuos, el 40.3%, se ubica en la categoría de principiantes y tiene en promedio un rendimiento en la prueba de 33,3%.



## 2.10 Rendimiento en el subcampo de fraccionarios o racionales positivos en sus expresiones fraccionarias (instrumento B)

Este subcampo está vinculado con aquella parte del pensamiento numérico de los niños que está relacionada con la capacidad para manejar comprensivamente, en un nivel elemental, los números fraccionarios o racionales positivos considerados como partidores y como operadores, a través de sus expresiones verbales y fraccionarias. Más específicamente, en este subcampo se trata de estudiar el manejo de relaciones aditivas y multiplicativas; la relación de equivalencia de las distintas expresiones de los números fraccionarios o racionales positivos, y la construcción de una idea abstracta de unidad con sus relaciones respecto de sus partes (o de cantidades mayores) como resultados de la combinación de particiones de la unidad en trozos de la misma medida (fraccionarios como partidores)

o como resultados de achicar (o agrandar) la unidad seleccionada (fraccionarios como operadores).

La pregunta 9 del nivel 2, que es un problema inverso, obtuvo el mayor rendimiento del subcampo 44,6% (tabla 2.15). Los dos problemas de las preguntas 7 y 8 consiguieron rendimientos semejantes (35,2% y 35,7%), la estructura de ambos problemas es la misma, su diferencia está en los dos operadores ( $1/3$  y  $4/6$ ). A pesar de que los datos parecen mostrar que este hecho no marca diferencia alguna en los estudiantes de quinto, conviene no precipitar conclusiones. Dado el nivel tan elemental de un problema como el 7, parece razonable esperar un rendimiento más alto. Por ahora cabe preguntarse, qué tanto durante

Tabla 2.15 Rendimiento por pregunta en las tareas relacionadas con el subcampo de problemas fraccionarios (Instrumento B)

NIVEL	N1	N2	N2	N2	N3	PROMEDIO
Nº PREGUNTA	P7	P8	P9	P21	P5	
PORCENTAJE	35,2%	35,7%	44,6%	27,9%	22,9%	33,3%

la enseñanza se ayuda a los niños a vincular representaciones del lenguaje común y el simbólico (la tercera y  $1/3$ , la quinta y  $1/5$ ).

Se esperaba que de acuerdo con el modelo establecido previamente, el problema de la pregunta 9, por ser inverso, resultara de mayor complejidad que el correspondiente directo, como lo es el problema de la pregunta 8; los rendimientos no responden a esta previsión. Casos como estos demandan exploraciones posteriores, pues ha de explicarse, ¿por qué un problema inverso puede tener un rendimiento mejor que su respectivo directo?.

De los tres subcampos que componen el instrumento B, el fraccionario es el que obtuvo el menor rendimiento (33,26%), lo que muestra la gran dificultad de los estudiantes para manejar los operadores fraccionarios.

El 77,7% de los sujetos evaluados se concentraron en las dos categorías inferiores y el 22,3% en las superiores (tabla 2.16). Este es el único subcampo que pertenece a la tercera de las tres tendencias de desempeño de los evaluados, identificadas en la tabla 2.4, lo cual pone en evidencia las dificultades que tienen

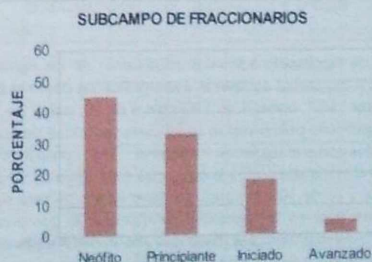
los evaluados con el manejo de los números fraccionarios.

Conviene hacer un análisis juicioso sobre la enseñanza de los fraccionarios en dos aspectos complementarios: a) en cuanto al diseño curricular, quizá se insiste, en parte por la fuerza de la tradición, en enseñar a los niños de primaria elementos que cognitivamente están muy por encima de las comprensiones de un niño de primaria; incluso los estándares fijados por el MEN en este campo posiblemente resultan ser altos con relación a lo que es deseable y posible, y b) en cuanto a las prácticas de enseñanza, posiblemente lo que se ofrece a los niños brinda pocas posibilidades para ir más allá de la decodificación de un signo (“el denominador divide y el numerador multiplica”) y de la ejecución de los algoritmos de las operaciones entre “fracciones”. Quizá se ayuda poco a los estudiantes a hacer surgir los fraccionarios de la capacidad de operar con las relaciones multiplicativas compuestas (expresables con fracciones) entre dos cantidades (que dan cuenta de las extensiones de dos conjuntos o de las medidas de las cantidades de dos magnitudes).

**Tabla 2.16. Distribución de la población evaluada según el nivel de desempeño alcanzado en el subcampo de los fraccionarios**

CATEGORÍAS	NÚMERO DE SUJETOS	SUJETOS (%)	REND. PRUEBA (%)
Neófito	850	44.7	25.4
Principiante	627	33.0	38.0
Iniciado	337	17.7	52.6
Avanzado	87	4.6	68.0
Total	1901	100	

627 individuos, el 33%, se ubican en la categoría de principiantes y tienen en promedio un rendimiento en la prueba de 38%.



**Gráfica 2.9.**

## 2.11 Rendimiento en el subcampo del sistema decimal de numeración (SDN), representaciones decimales de medidas compuestas y orden numérico

En este subcampo, a diferencia de los anteriores y por razones de extensión de la prueba, no se respetaron tan estrictamente los criterios de clasificación de las tareas que componen el subcampo; realmente las tareas seleccionadas responden a tres criterios diferentes: por un lado está vinculado con aquella parte del pensamiento numérico de los niños relacionada con la comprensión del sistema decimal de numeración. Más específicamente, en este subcampo se supone el manejo de los significados aditivo-multiplicativo y polinomial de los numerales<sup>14</sup>. Por otra, también se vinculan a este subcampo las representaciones decimales de expresiones compuestas o complejas que representan la medida de una magnitud por medio de dos unidades

**Tabla 2.17 Rendimiento por pregunta en las tareas relacionadas con el subcampo del SDN, decimales y orden (Instrumento B)**

NIVEL	N1	N2	N2	N2	N3	PROMEDIO
Nº PREGUNTA	P3	P14	P15	P17	P13	
PORCENTAJE	69.3%	34.1%	23.4%	37.6%	27.9%	38.4%

<sup>14</sup> Hablar de significado aditivo-multiplicativo de los numerales se refiere a la capacidad de operar con significados como el siguiente: interpretar "347" como 3 de 100, más 4 de 10, más 7 de 1; hablar de un significado polinomial se refiere a la capacidad de operar con significados como el siguiente: interpretar "347" como 3 de 10 de 10 (o de 10 al cuadrado o 10 a la dos), más 4 de 10 (o de 10 a la uno), más 7 de 1 (o de 10 a la cero). La clave última de este significado polinomial está en la capacidad de dominar la composición de correspondencias múltiples (dado que una unidad A equivale a tantas unidades de B y, a su vez, una unidad B equivale a tantas unidades de C, entonces, una unidad A equivale a tantas unidades de C, así las cifras correspondientes a las unidades A, B y C no sean contiguas).

distintas, una básica y una más pequeña (3 m y 12 cm como 3,12 m) y finalmente, al orden numérico en los naturales.

Las preguntas 3 y 17 evalúan el sistema de representación escrita de los números en el sistema decimal (tabla 2.17). Un hecho positivo corresponde a que la pregunta 3, del nivel 1, que evalúa un manejo elemental del sistema decimal de numeración obtuvo un rendimiento del 69,3%, el más alto del subcampo. Sin embargo, la pregunta 17, que es un problema que requiere el manejo de un significado más complejo (una carita equivale a varias flechas y éstas a su vez equivalen a varias manchas, etc. o, en el lenguaje de sistema decimal: una unidad de mil equivale a 10 centenas y a su vez una centena equivale a 10 decenas, etc.), logró un rendimiento de 37,6%. Este resultado invita a preguntarse si en las prácticas de enseñanza se están ofreciendo a los niños experiencias que realmente los ayuden a complejizar los significados que le asignan a los signos numéricos. Quizá se insiste en la lectura y escritura de los signos numéricos, pero se hace poco por ayudar a los estudiantes a comprender la lógica en la que se soporta esta escritura y cuando se realiza, se queda en significados muy elementales (aditivo: 345 como  $300 + 40 + 5$  o aditivo-multiplicativos: 345 como 3 de 100 + 4 de 10 + 5 de 1).

Las preguntas 14 y 15 hacen referencia a una cuestión distinta, son problemas que requieren convertir una representación compuesta de una medida en una decimal (por ejemplo, 2 metros y 35 centímetros en 2,35 metros). Los significados de estas representaciones no exigen manejar la idea de la expresión decimal como representación de un fraccionario decimal; en el ejemplo de 2,35 m se trata de evaluar si el sujeto reconoce que en el primer lugar a la derecha de la coma están los decímetros y a la izquierda los metros, pero no que cada

decímetro es una décima parte del metro. Esta es la razón por la que este significado elemental de “los números con coma” se liga al sistema decimal de numeración. En estas dos preguntas los rendimientos alcanzados fueron del 34,1% y 23,4% respectivamente. El rendimiento más bajo fue el de la pregunta 15 y posiblemente se debe a que esta pregunta requiere también la estimación del resultado de una resta.

Los resultados obtenidos en estas preguntas quizá tengan su origen en el hecho de que en las prácticas de enseñanza se enfatiza en los algoritmos de las operaciones con decimales, descuidando el ofrecimiento de experiencias suficientes y variadas a los estudiantes que les permitan consolidar el significado de las representaciones decimales en diferentes contextos de medida.

La pregunta 13, que logró un rendimiento de 27,9%, es un problema que consiste en hacer corresponder dos series, una que crece y otra que decrece. La dificultad de esta pregunta no sólo está en el uso del orden, sino

que en ella está implícita una idea intuitiva de variación. El resultado obtenido sugiere la necesidad de proponer a los estudiantes experiencias en diferentes contextos, que ayuden a complejizar el manejo de las relaciones de orden, que vayan más allá de ordenar una colección de varios números.

El rendimiento más bajo de la pregunta 15 del nivel 2 comparado con el de la pregunta 13 del nivel 3, no se ajusta al modelo previo de jerarquía de complejidad de las preguntas, sin embargo esta aparente inconsistencia a diferencia de la que se da en el subcampo de los fraccionarios, se debe más a fallas en los criterios de clasificación de las preguntas que al propio modelo. Efectivamente las dos preguntas no son comparables debido a que se refieren a conceptos diferentes (representaciones decimales de medidas compuestas y orden).

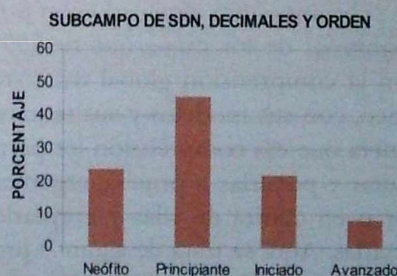
El 69,8% de los sujetos evaluados se concentró en las dos categorías inferiores y el 30,2% en las superiores (tabla 2.18). Este tipo de distribución de los evaluados según su

Gráfica 2.10.

**Tabla 2.18. Distribución de la población evaluada según el nivel de desempeño alcanzado en el subcampo del sistema decimal de numeración (sdn), representaciones decimales de medidas compuestas y orden numérico**

CATEGORÍAS	NÚMERO DE SUJETOS	SUJETOS (%)	REND. PRUEBA (%)
Neófito	452	23.8	20.4
Principiante	874	46.0	33.3
Iniciado	417	21.9	49.4
Avanzado	158	8.3	64.4
Total	1901	100	

874 individuos, el 46%, se ubican en la categoría de principiantes y tienen en promedio un rendimiento en la prueba de 33.3%



desempeño se adapta más a la segunda tendencia de desempeño de los evaluados (ver tabla 2.4), como en la gran mayoría de los subcampos de las dos pruebas. Los resultados muestran la necesidad de ir más allá del aprendizaje de los aspectos convencionales de la numeración (conteo, lectura y escritura de los numerales) y la mecanización de los algoritmos de cálculos de las cuatro operaciones aritméticas básicas de los naturales. Es importante enfrentar a los estudiantes a experiencias que los ayuden a consolidar un pensamiento que les permita trabajar situaciones que impliquen composiciones de correspondencia múltiples (ej. en una caja se maderan empacan  $n$  cajas de cartón, a su vez, en cada caja de cartón  $m$  bolsa y en cada bolsa se empacan  $p$  colombinas ...), pensamiento que está presente en la posibilidad de hacerse a un significado polinomial del los numerales. Como se ha dicho, conviene revisar si el excesivo y prematuro énfasis en el manejo de los algoritmos entre decimales, conlleva a que los estudiantes no construyan un significado de estos números ligados a contextos de medida, ni a establecer las relaciones necesarias con la escritura de los naturales.

## 2.12 Rendimiento en el subcampo procesos de razonamiento (instrumentos A y B)

Este subcampo está vinculado con procesos cognitivos de los niños que tienen que ver con la comprensión global del sistema numérico, con sus modelos y sus teorías, de tal manera que esa comprensión les permita conjeturar y ponerlas a prueba, argumentar a favor o en contra de ellas y aceptarlas o descartarlas. Aquí se trata de algunos procesos cognitivos generales presentes en toda actividad intelectual superior, en los que lo

numérico es uno de los campos que ofrecen una excelente oportunidad de potenciarlos y que, además, se constituyen en condición para avanzar a niveles más complejos de lo numérico. Específicamente, este subcampo está relacionado con la capacidad para identificar y hacer generalizaciones locales de patrones numéricos y expresarlas en lenguaje común o algebraico e interpretar enunciados que se refieren a procedimientos o relaciones expresados en el lenguaje común o algebraico. Vinculado a lo anterior, en este campo está presente la capacidad para producir argumentaciones sencillas que justifican o refutan una afirmación simple sobre un hecho numérico; sin embargo, un instrumento de pregunta cerrada no brinda la oportunidad de realizar tal indagación. En el mejor de los casos, lo que se puede hacer es evaluar la capacidad del niño para verificar la validez de un argumento. La competencia propositiva de formular conjeturas propias e inventar argumentos para defenderlas o refutarlas no puede evaluarse a través de preguntas cerradas.

Por problemas técnicos en la impresión de los cuadernillos, se anularon varias preguntas de este subcampo<sup>15</sup> (de tal forma que se tomó la decisión de eliminarlo como subcampo) y simplemente se analizaron las dos tareas que se mantuvieron como preguntas sueltas. Los rendimientos en las preguntas 7 y 8 fueron del 81.8% y 53.0%, respectivamente. Estos rendimientos posiblemente llaman la atención sobre la necesidad de mejorar, en número y calidad, durante el proceso de enseñanza, las experiencias que ayuden a los niños a observar regularidades matemáticas, producir sus propias conjeturas, aplicarlas para obtener información nueva y comprobar la validez de ellas.

<sup>15</sup> Del instrumento A se eliminaron las preguntas 17 y 18; y del instrumento B las preguntas 2, 3, 23, y 24.

### 3. Descripción y análisis de los resultados

#### Grado noveno

En este numeral se analizan los resultados obtenidos en la prueba aplicada a los estudiantes de noveno grado. En los numerales 3.1 a 3.5 el lector puede hacerse a una visión general de los resultados. Para un análisis más detallado, en los numerales 3.6 a 3.10 se presentan los resultados en cada subcampo.

#### 3.1 Rendimientos promedio en la prueba y en los subcampos

La tabla 3.1 muestra los descriptores globales de la prueba diseñada para grado noveno.

El rendimiento promedio en la prueba fue de 36.6%; el 58.2% de los 3.761 evaluados obtuvo un rendimiento menor que el promedio. Su calificación es altamente dispersa, la desviación estándar representa casi el 40% del rendimiento promedio.

La tabla 3.2 presenta los rendimientos promedio en cada uno de los subcampos.

Los evaluados consiguieron un rendimiento un poco mayor en los subcampos de los enteros y de los racionales que en los demás y en ellos superan la media de la prueba de grado noveno. Los rendimientos de los subcampos de razonamiento, problemas abiertos y variacional, están por debajo de la media de la prueba. El más bajo rendimiento corresponde a problemas abiertos. El subcampo de procesos de razonamiento muestra una distribución de la población con mayor asimetría cargada por debajo de la media; en los demás subcampos la distribución de los rendimientos es bastante simétrica.

#### 3.2 Rendimientos en cada pregunta

La gráfica 3.1 presenta los rendimientos en cada pregunta y el promedio de cada subcampo.

Los rendimientos más altos se presentaron en las preguntas del nivel 1 de cada subcampo, especialmente en las preguntas 16, 1 y 12. En

Tabla 3.1. Descriptores de la prueba

INSTRUMENTO	NÚMERO SUJETOS EVALUADOS	RENDIMIENTO PROMEDIO (en %) <sup>16</sup>	DESVIACIÓN ESTÁNDAR	% EVALUADOS POR DEBAJO DEL REND. PROMEDIO
Grado 9º	3.761	36.6	14.30	58.2

Tabla 3.2. Rendimientos promedio en los subcampos del instrumento de noveno

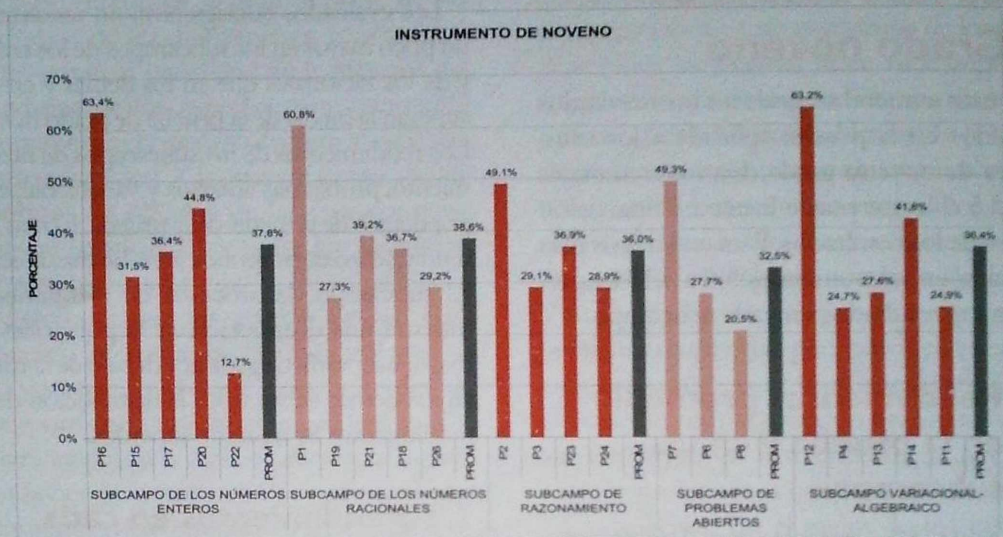
SUBCAMPO	DE LOS ENTEROS	DE LOS RACIONALES POSITIVOS	DE RAZONAMIENTO	DE PROBLEMAS ABIERTOS	DE LO VARIACIONAL-ALGEBRAICO <sup>17</sup>
MEDIA	37.8	38.6	36.0	32.5	36.4
MEDIANA	40.0	40.0	25.0	33.3	40.0

<sup>16</sup> Los rendimientos se expresan en términos de porcentaje. Esto significa que se califica en una escala de 0 a 100, un estudiante que haya contestado correctamente todas las preguntas tendría una calificación de 100%. Para el cálculo del rendimiento promedio de la prueba se excluyen las preguntas 8 y 9 de textos instruccionales.

<sup>17</sup> Debido a errores en edición del instrumento se anulaban las preguntas 12 y 13, ambas del subcampo de lo variacional.

Gráfica 3.1.

Rendimiento por preguntas y subcampos.



las preguntas 22 y 6, ambas de nivel 3, se presenta un rendimiento notoriamente bajo<sup>18</sup>.

### 3.3 Modelo de complejidad de las preguntas

En los subcampos de los enteros, de procesos de razonamiento y de problemas abiertos, los rendimientos obtenidos en las diferentes preguntas satisfacen el modelo de niveles de complejidad definido: la pregunta del nivel 1 presenta un rendimiento mayor que cualquiera de las tres del nivel 2 y estas a su vez un rendimiento mayor que la pregunta del nivel 3. Los subcampos de los racionales y de lo variacional-algebraico no satisfacen el modelo con exactitud, una de las preguntas del nivel 2 tiene un rendimiento que no supera o es prácticamente el mismo que la correspondiente al nivel 3. Estos casos serán objeto de análisis más adelante.

### 3.4 Nivel de desempeño de los evaluados en cada subcampo

Al estudiar el nivel de desempeño de los evaluados en cada subcampo, a diferencia de lo que ocurre con la prueba de quinto, únicamente se identifican dos de las tendencias de distribución de los evaluados encontradas en grado quinto. La tabla 3.3 muestra los subcampos clasificados en esas tendencias y la distribución de los evaluados en las categorías, subcampo por subcampo<sup>19</sup>.

<sup>18</sup> En el anexo I se muestra el porcentaje de selección por pregunta y opción

<sup>19</sup> La primera tendencia se caracteriza en que los evaluados tienden a concentrarse más en las dos categorías superiores (iniciados y avanzados); en las otras dos tendencias, la población evaluada se concentra en la dos categorías inferiores (neófitos y principiantes), en particular en la segunda tendencia, el porcentaje de sujetos que muestran un desempeño en la categoría de principiantes es un poco mayor que en la categoría de neófitos, en la tercera tendencia es al contrario, es mayor el porcentaje de sujetos en la categoría de neófitos.

**Tabla 3.3. Distribución de los evaluados según patrones de niveles de desempeño**

TENDENCIAS	SUBCAMPOS	CATEGORÍAS			
		Neófitos	Principiantes	Iniciados	Avanzados
Primera Tendencia	Ninguno				
Segunda Tendencia	Enteros	25.6	45.8	27.7	2.9
	Racionales	24.4	45.5	23.4	6.7
	Problemas abiertos	30.0	45.4	21.8	2.9
	Variacional -algebraico	25.6	49.6	20.3	4.5
Tercera Tendencia	Razonamiento	42.5	39.5	12.7	5.2

En todos los subcampos excepto en el de razonamiento, entre el 69% y 76% de la población se concentra en las dos categorías inferiores (la de neófitos y principiantes), en el subcampo de razonamiento la población de estas dos categorías supera el 80%. La población ubicada en la categoría de avanzados, en todos los casos es menor al 7%.

### 3.5 Distribución de los evaluados según rendimiento en la prueba

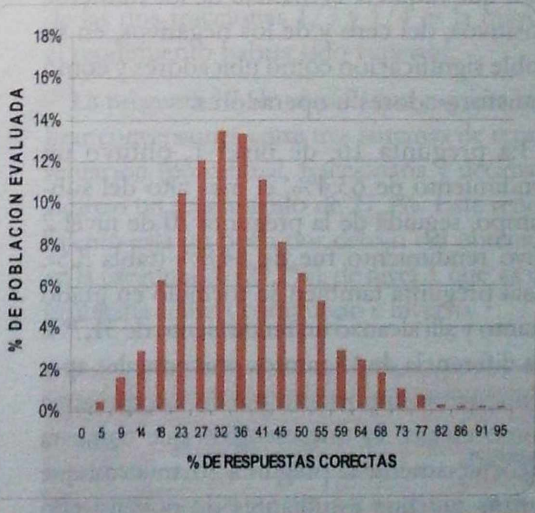
Las tablas y gráficas muestran como se distribuyeron los sujetos evaluados según el porcentaje de preguntas contestadas correctamente.

**Gráfica 3.2.**

El 1,5% de los evaluados (58 sujetos de los 3.761 que presentaron la prueba) contesta el 9% de las preguntas de la prueba (esto equivale a 2,1 preguntas de las 22 que componen la prueba).

**Tabla 3.4. Distribución de los sujetos según porcentaje de aciertos**

	Número de evaluados	% de la población evaluada
0	1	0.0
5	15	0.4
9	58	1.5
14	107	2.8
18	234	6.2
23	392	10.4
27	452	12.0
32	506	13.5
36	500	13.3
41	416	11.1
45	302	8.0
50	247	6.6
55	196	5.2
59	107	2.8
64	88	2.3
68	65	1.7
73	37	1.0
77	24	0.6
82	5	0.1
86	3	0.1
91	4	0.1
95	2	0.1
<b>Total</b>	<b>3.761</b>	<b>100</b>



La forma de la gráfica 3.2 ilustra lo ya dicho, la población tiende a distribuirse de forma asimétrica hacia la izquierda de la media. El 40% supera o alcanza el mismo rendimiento promedio mientras que el 60% está por debajo.

### 3.6 El subcampo de los enteros

Este subcampo está vinculado con aquella parte del pensamiento numérico de los jóvenes que tiene que ver con la capacidad para enfrentar problemas que implican las operaciones y las relaciones entre números enteros (los positivos, el cero y los negativos), en su significación como ubicadores en una recta graduada y como transformadores u operadores que desplazan un móvil sobre la misma. No se evalúan ni la multiplicación ni la división entre enteros, debido a la complejidad que representa esta construcción multiplicativa para el grado noveno. Con relación a lo multiplicativo, la prueba se limita a indagar la multiplicación externa (que permite obtener el producto de un natural por un entero). Específicamente se evalúa la capacidad para modelar una situación que requiere el manejo de los números positivos, del cero y de los negativos, en su doble significación como ubicadores y como transformadores u operadores.

La pregunta 16, de nivel 1, obtuvo un rendimiento de 63,4%, el más alto del subcampo, seguida de la pregunta 20 de nivel 2 cuyo rendimiento fue de 44,8% (tabla 3.5). Esta pregunta también se formuló en grado quinto y allí alcanzó un rendimiento de 31,7%. La diferencia de 13 puntos porcentuales aparentemente importante puede interpretarse como escasa, ya que ese 55% que contesta incorrectamente la pregunta 20, muestra que quizás muchos estudiantes de noveno aún

Tabla 3.5. Rendimiento por pregunta en el subcampo de los números enteros

NIVEL	N1	N2	N2	N2	N3	PROMEDIO
N° PREGUNTA	P16	P15	P17	P20	P22	
PORCENTAJE	63,4%	31,5%	36,4%	44,8%	12,7%	37,8%

mantienen dificultades para componer operadores aditivos naturales, a pesar de hacer algunas manipulaciones sintácticas con el simbolismo propio de los enteros.

Las preguntas 15 y 17, ambas de nivel 2, alcanzaron rendimientos de 31,5% y 36,4% respectivamente, la primera busca evaluar la capacidad de anticipar el efecto resultante de componer dos operadores y la segunda busca evaluar la multiplicación de un natural por un operador negativo. Estos resultados ilustran la complejidad de coordinar el entero como estado y como operador.

La pregunta 22, de nivel 3, presenta un rendimiento de 12,7%. Esta pregunta es realmente compleja, con ella se busca evaluar la capacidad para relacionar dos escalas no coincidentes en sus puntos cero.

El 71,4% de la población evaluada se ubica en las dos categorías inferiores y el 28,6% en las dos superiores. Únicamente el 2,9% se encuentra en la categoría de avanzados (tabla 3.6).

Los resultados obtenidos por los evaluados en este subcampo quizás sean fruto del énfasis que se hace en la enseñanza en los aspectos sintácticos relativos al simbolismo de los enteros, los estudiantes aprenden a realizar operaciones con enteros, a representarlos en la recta numérica, pero no se les ofrecen las experiencias que les ayude a darle significado a estos números en diferentes contextos, de ahí que les resulta difícil utilizarlos para modelar situaciones.

Gráfica 3.3.

**Tabla 3.6. Distribución de la población evaluada según el nivel de desempeño alcanzado en el subcampo de los enteros**

CATEGORÍAS	NÚMERO DE SUJETOS	SUJETOS (%)	REND. PRUEBA (%)
Neófito	963	25,6	26,3
Principiante	1722	45,8	35,0
Iniciado	967	25,7	48,1
Avanzado	109	2,9	51,6
<b>Total</b>	<b>3761</b>	<b>100</b>	<b>36,6</b>

963 individuos, el 25,6%, se ubican en la categoría de neófitos y tienen un rendimiento de 26,3% en la prueba.



### 3.7 El subcampo de los racionales

Este subcampo está vinculado con aquella parte del pensamiento numérico de los jóvenes que tiene que ver con la capacidad para enfrentar problemas que implican las operaciones y las relaciones entre números racionales en sus diversas significaciones. Aunque en este grado los números racionales ya deberían incluir el cero racional y los racionales negativos, debido a los resultados obtenidos en las exploraciones que se realizaron como parte del diseño de la prueba, este subcampo se redujo a evaluar la capacidad para manejar comprensivamente los números fraccionarios o racionales positivos considerados como partidores y como operadores, a través de sus expresiones verbales, fraccionarias, porcentuales y decimales, renunciando a evaluar comprensiones más abstractas de los racionales.

En la tabla 3.7 se observa que la pregunta 1, de nivel 1, tiene un rendimiento de 60,7%, el más alto del subcampo, seguida de las preguntas 21 y 18, del nivel 2, cuyos rendimien-

tos son 39,2% y 36,7%, respectivamente. La pregunta 21 también se formuló en grado quinto y allí obtuvo un rendimiento de 27,9%. Esta pregunta es un problema que requiere establecer la relación “es mayor que” entre dos fraccionarios ( $1/3$  y  $1/4$ ). Conviene que el maestro analice porqué el 60% de los evaluados tienen dificultad para comparar los efectos de dos operadores fraccionarios en situaciones problema. Seguramente si la pregunta se hubiera limitado a descifrar cuál de las dos fracciones  $1/3$  y  $1/4$  es la mayor, el rendimiento habría sido superior.

La pregunta 19, de nivel 2, que requiere realizar conversiones entre tres sistemas de representación (porcentual, fraccionaria y decimal), alcanzó un rendimiento de 27,3%. Este rendimiento está un poco por debajo del obtenido en la pregunta 26 (29,2%), de nivel 3, que es un problema aditivo, compuesto e inverso.

**Tabla 3.7. Rendimiento por pregunta en el subcampo de los números racionales**

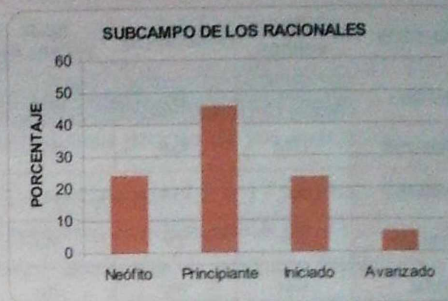
NIVEL	N1	N2	N2	N2	N3	PROMEDIO
Nº PREGUNTA	P1	P19	P21	P18	P26	
PORCENTAJE	60,8%	27,3%	39,2%	36,8%	29,2%	38,7%

Gráfica 3.4.

**Tabla 3.8. Distribución de la población evaluada según el nivel de desempeño alcanzado en el subcampo de los racionales**

CATEGORÍAS	NÚMERO DE SUJETOS	SUJETOS (%)	REND. PRUEBA (%)
Neófito	916	24,4	27,4
Principiante	1712	45,5	33,8
Iniciado	881	23,4	46,3
Avanzado	252	6,7	55,7
<b>Total</b>	<b>3761</b>	<b>100,0</b>	<b>36,6</b>

1712 individuos, el 45,5%, se ubican en la categoría de principiantes y tienen en promedio un rendimiento en la prueba de 33,8%.



El 69,9% de la población evaluada se ubica en las dos categorías inferiores y el 30,1% en las dos superiores. El 6,7% se encuentra en la categoría de avanzados (tabla 3.8).

En general, los resultados de los evaluados en este subcampo muestran escasos avances en la comprensión de los números racionales durante los cuatro primeros años de secundaria. Estos hechos quizá puedan explicarse porque durante los grados de cuarto a séptimo se enfatiza en el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones con “fraccionarios” y, en los grados octavo y noveno, cuando se abordan los racionales, se asume, sin comprobar, el desarrollo de una comprensión adecuada de estos números. Se presupone que lo que resta en este grado es ofrecerles a los estudiantes un acercamiento a la estructura formal del sistema numérico de los racionales. Los racionales son objetos abstractos, son objetos de la matemática y sólo pueden surgir de las construcciones de los fraccionarios, si éstas son simples reglas sintácticas los racionales no pueden ir más allá de reglas sintácticas.

El profesor poco agrega en octavo o noveno ofreciendo formalizaciones, cuando las construcciones de los estudiantes sobre los fraccionarios están empobrecidas.

### 3.8 El subcampo de los problemas abiertos

Este subcampo también se describió en el caso de quinto (ver 2.8). En el caso de noveno, se evalúa además la capacidad del estudiante para poner al servicio del análisis y la síntesis de estas situaciones su propia capacidad de pensar de forma generalizada acerca de situaciones aritméticas particulares (capacidad de generalización).

El problema de la pregunta 7 (tabla 3.9) obtuvo el rendimiento más alto en este subcampo (49,3%). Este problema podía

**Tabla 3.9. Rendimiento por pregunta en el subcampo de problemas abiertos**

NIVEL	N1	N2	N3	PROMEDIO
Nº PREGUNTA	P7	P6	P8	
PORCENTAJE	49,3%	27,7%	20,5%	32,5%

resolverse aplicando el teorema de Pitágoras, pero también estimando la medida a partir del ancho y del alto.

La pregunta 7, de nivel 2, que obtuvo un rendimiento de 27,7%, hace referencia a un problema compuesto (incluye varias etapas) cuya estructura es la de problemas aditivo-multiplicativos, sugiere que además de las dificultades propias de la interpretación del lenguaje, también están las de la estructura de la tarea, ya que requiere de la toma de decisiones para aceptar datos parciales en la búsqueda de la meta final. Esta pregunta también se formuló en la prueba de quinto (pregunta 10, instrumento A); allí el rendimiento alcanzado fue del 16%; aunque hay un progreso de un grado a otro, conviene estudiar si este problema tiene un complejidad estructural tan alta como para justificar el bajo rendimiento en noveno.

El problema de la pregunta 8, de nivel 3, que requiere generalizar un procedimiento y expresarlo mediante una expresión simbólica, tuvo un rendimiento de 20,5%. Quizá

este porcentaje puede explicarse por la doble dificultad que representa para el estudiante este problema: a) pensar un procedimiento para una generalidad de casos y no uno en particular y b) adicionalmente, representar esta generalización mediante un expresión simbólica.

La tabla 3.10 y la gráfica 3.5 muestran la distribución de los evaluados en las cuatro categorías de desempeño.

El 75,4% de la población evaluada se ubica en las dos categorías inferiores y el 24,6% en las dos superiores. Únicamente el 2,9% está en la categoría de avanzados.

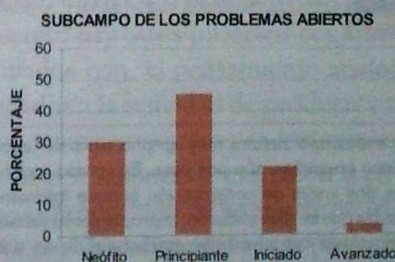
Los resultados en este subcampo sugieren preguntarse si en las prácticas de enseñanza se está trabajando lo suficiente en problemas que no se limitan a seguir procedimientos más o menos estereotipados y a resolver un caso particular, sino que plantean la búsqueda de información que no está en el texto del problema, la búsqueda de soluciones generales o para un conjunto numeroso de casos, en las

Gráfica 3.5.

**Tabla 3.10. Distribución de la población evaluada según el nivel de desempeño alcanzado en el subcampo de los problemas abiertos**

CATEGORÍAS	NÚMERO DE SUJETOS	SUJETOS (%)	REND. PRUEBA (%)
Neófito	1128	30,0	29,1
Principiante	1707	45,4	36,6
Iniciado	818	21,8	44,5
Avanzado	108	2,9	55,6
Total	3761	100	36,6

1.707 individuos, el 45,4%, se ubican en la categoría de principiantes y tienen en promedio un rendimiento en la prueba de 36,3%.



que en el proceso de resolución el estudiante tiene que hacer conjeturas y controlar la validez de estas.

### 3.9 El subcampo de lo variacional-algebraico

Este subcampo está vinculado con aquella parte del pensamiento numérico de los jóvenes que tiene que ver con la capacidad de identificación, interpretación, generación, representación y manipulación de modelos de variación entre dos variables, a través de sus representaciones verbales, cartesianas, algebraicas y tabulares. Para el caso de noveno, se evalúa la capacidad para modelar situaciones que involucran variaciones directamente proporcionales o lineales e inversamente proporcionales, utilizando diferentes sistemas de registro (el lenguaje común, las gráficas cartesianas, las expresiones algebraicas y las tablas de doble entrada). Más específicamente, se evalúa el manejo que los estudiantes hacen del registro algebraico y el nivel de comprensión de la estructura de un sistema numérico.

**Tabla 3.11. Rendimiento por pregunta en el subcampo de lo variacional-algebraico**

NIVEL	N1	N2	N2	N3	PROMEDIO	
Nº PREGUNTA	P12	P4	P13	P14		P11
PORCENTAJE	63.2%	24.7%	27.6%	41.8%	24.9%	36.4%

En este subcampo inicialmente se incluyeron siete preguntas, pero debido a errores de edición se eliminaron dos (la 12 y la 25)<sup>20</sup>.

La pregunta 12 de nivel 1 (tabla 3.11), un problema que requiere interpretar un enunciado matemático sencillo dado en el lenguaje común, tuvo el rendimiento de 63,3%, el más alto del subcampo, seguido de la pregunta 14, de nivel 2, consistente en la interpretación de una inecuación, representada en forma simbólica. Las demás preguntas del subcampo, una de ellas de nivel 3, tienen un rendimiento semejante alrededor del 25%. La pregunta 4, vinculada con la modelación de formas de variación, involucra la proporcionalidad inversa y requiere la interpretación de una gráfica cartesiana. La pregunta 13 es un problema que indaga la capacidad del estudiante para investigar las propiedades de una operación. La pregunta 11 requiere analizar una situación a partir de la interpretación de la representación cartesiana de una variación lineal. Se esperaba que la pregunta 11, por ser de nivel 3, tuviera un rendimiento por debajo de la 4, de nivel 2, pero los datos no satisfacen esta expectativa.

La tabla 3.12 y la gráfica 3.6 muestran como se distribuyeron los evaluados en las cuatro categorías de desempeño.

El 75,2% de la población evaluada se ubicó en las dos categorías inferiores y el 24,8% en las dos superiores. Únicamente el 4,5% alcanzó la categoría de avanzados.

El bajo rendimiento en este subcampo llama la atención sobre la necesidad de introducir una enseñanza de la matemática más dinámica, en la que en lugar de pensar un problema como un caso particular, sea

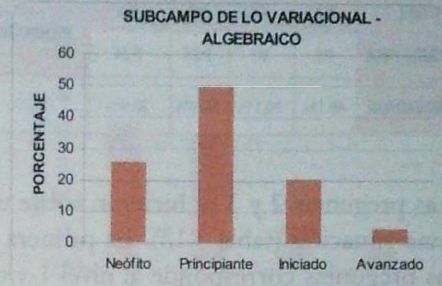
<sup>20</sup> Este subcampo resulta muy amplio para ser agotado por cinco preguntas, aún por siete. En verdad aquí hay al menos dos líneas de construcción aunque íntimamente vinculadas que se diferenciaron, la propiamente variacional y lo vinculado con el estudio estructural de un sistema numérico. Este campo merece mucha más investigación que permitan el diseño de tareas que ofrezcan una información más confiable.

Gráfica 3.6.

**Tabla 3.12. Distribución de la población evaluada según el nivel de desempeño alcanzado en el subcampo de lo variacional-algebraico**

CATEGORÍAS	NÚMERO DE SUJETOS	SUJETOS (%)	REND. PRUEBA (%)
Neófito	963	25.6	26.5
Principiante	1865	49.6	36.0
Iniciado	764	20.3	46.3
Avanzado	169	4.5	56.9
Total	3761	100	36.6

1865 individuos, el 49,6%, se ubican en la categoría de principiantes y tienen en promedio un rendimiento en la prueba de 36,0%.



analizado como un conjunto de problemas construido a partir de variaciones de los valores que involucra. Existe acuerdo entre los estudiosos de la educación matemática en que la variable no se reduce al uso de letras; de forma semejante, para pensar algo como una variación no necesariamente tiene que aparecer una letra, aunque ésta facilite la representación simbólica. Un simple problema de multiplicación (el valor que se paga por varias unidades de un mismo artículo) puede ser pensado cada vez como un problema particular y único (el valor de 5 unidades cuyo valor unitario es ...) o como el valor que se paga para una, dos, tres, etc. unidades. De igual forma, por una inadecuada interpretación, a la variación se le quita su carácter cambiante, de movimiento, de transformación, como cuando se manipula una ecuación como  $x + y = 5$  o inecuación  $x + y > 5$  y no se ayuda a los estudiantes a reconocer su carácter variacional y simplemente se limita a manipularlas siguiendo una reglas sintéticas que garantizan su resolución.

### 3.10 El subcampo de razonamiento

Este subcampo tiene que ver con los procesos cognitivos presentes en toda actividad intelectual superior. Lo numérico es uno de los campos que ofrecen una buena oportunidad de potenciarlos, pero además, el aplicarlos a lo numérico ayuda a complejizar las comprensiones en este campo. Específicamente en este subcampo se evalúa la capacidad de identificar generalizaciones de patrones de variación de sucesiones y de representarles simbólicamente. Es claro que estas tareas no agotan lo que podría ligarse a eso que en la actividad intelectual se denomina como razonamiento; hay otros procesos cognitivos, los vinculados con el pensamiento analógico o los ligados a la actividad de producir y validar argumentaciones que no se incluyeron en la prueba, por razones de extensión y, en casos como la producción de argumentos, (relacionados con la competencia propositiva) que no se pueden evaluar con instrumentos de pregunta cerrada como éstos. En el mejor de

los casos, lo que se puede hacer es evaluar la capacidad del niño para verificar la validez de un argumento.

**Tabla No 3.13. Rendimiento por pregunta en el subcampo del razonamiento**

NIVEL	N1	N2	N2	N3	PROMEDIO
Nº PREGUNTA	P2	P3	P23	P24	
PORCENTAJE	49.1%	29.1%	36.9%	28.9%	36.0%

Las preguntas 2 y 3 se hicieron sobre una misma situación (tabla 3.13). La primera de estas preguntas corresponde al nivel 1 y obtuvo un rendimiento de 49,06%, el más alto del subcampo y el de la pregunta 23, de nivel 2, tuvo un rendimiento de 29,1%. La primera trata de identificar el patrón de una sucesión y encontrar el valor de un puesto no siguiente, pero sí cercano, a la última posición conocida; la segunda trata de expresar el patrón identificado de forma simbólica. Parece razonable que el rendimiento de la primera sea mayor que el de la segunda.

Las preguntas 23, de nivel 2 y la 24 de nivel 3, obtuvieron rendimientos de 36,7% y 28,9% respectivamente y también se hacen sobre una misma situación. Las preguntas 1 y 23 son comparables. El mayor rendimiento de la pregunta 1 comparado con el de la 23, puede explicarse porque el patrón de variación de la segunda de estas preguntas es de más difícil identificación.

Las preguntas 2 y 24, aunque muy parecidas, no son tan comparables. La segunda se podía contestar mediante una comprobación y no exigía expresar simbólicamente un patrón, de ahí que la mayor complejidad de la situación de la pregunta 24 pueda ser compensada con la menor exigencia de generalización.

Aunque el rendimiento obtenido por la pregunta 1 es casi del 50%, es útil preguntarse por qué la otra mitad de estudiantes de noveno no logró contestarla con éxito. Cuesta pensar que una sucesión como ésta haga demandas cognitivas excesivamente altas a los estudiantes; más bien parece que el patrón de variación que define esta sucesión es fácil de identificar. Es una tarea en la que podría esperarse que no se necesita de un trabajo prolongado y profundo para lograr que los estudiantes puedan dominarla. ¿Entonces, por qué sólo acierta el 50%? Quizá por el escaso acercamiento que tienen los estudiantes con tareas como estas durante el proceso de enseñanza.

La tabla 3.14 y gráfica 3.7 muestran cómo se distribuyen los evaluados en las cuatro categorías de desempeño.

El 82% de la población evaluada se ubicó en las dos categorías inferiores y el 18% en las dos superiores. Únicamente el 5,2% alcanzó la categoría de avanzados.

El bajo rendimiento en este subcampo invita a preguntarse si se está haciendo lo suficiente durante el proceso de enseñanza para ayudar a los alumnos a estudiar situaciones que requieran hallar patrones de variación, que no sólo exijan seguir una a una la sucesión hasta llegar a una posición pedida, sino que además requieran generalizar el patrón identificado y aplicarlo para encontrar el valor de cualquier posición desconocida. Tareas como éstas son un punto de entrada adecuado al pensamiento variacional, además tienen una ventaja adicional, porque se pueden plantear con cierto nivel de complejidad sin necesidad de exigir muchos conocimientos matemáticos; esta es la razón por la que con ellas se puede involucrar a niños que tienen vacíos en los

Gráfica 3.7.

**Tabla 3.14. Distribución de la población evaluada según el nivel de desempeño alcanzado en el subcampo de razonamiento**

CATEGORÍAS	NÚMERO DE SUJETOS	SUJETOS (%)	REND. PRUEBA (%)
Neófito	1599	42.5	28.6
Principiante	1487	39.5	38.0
Iniciado	478	12.7	49.7
Avanzado	197	5.3	60.0
Total	3761	100	36.6

1.487 individuos, el 39,5%, se ubican en la categoría de principiantes y tienen en promedio un rendimiento en la prueba de 38,0%.



conocimientos matemáticos pero que cuentan con una buena capacidad creativa y crítica.

#### 4. Las preguntas de textos instruccionales y su relación con el rendimiento en la prueba

En los instrumentos A y B de la prueba de grado quinto, y en el de grado noveno se incluyeron dos preguntas que buscaban evaluar la capacidad del sujeto para seguir instrucciones presentadas mediante textos escritos. En los dos instrumentos de quinto esas dos preguntas son la 1 y 2 y en el instrumento de noveno son las preguntas 9 y 10. La pregunta 2 de quinto es la misma que aparece como 1 en el cuestionario de noveno. Se buscó que estas preguntas fueran sencillas, de tal forma que pudiera esperarse que quienes no acertaran,

tuvieran dificultad para seguir las instrucciones implicadas en las demás preguntas de la prueba<sup>21</sup>.

Se espera que al cruzar el desempeño obtenido por los evaluados en las demás preguntas de la prueba con el desempeño obtenido en estas dos preguntas, se encuentre que los sujetos que las contesten incorrectamente presenten rendimientos bajos en la prueba y que los que las contesten correctamente presenten los rendimientos más altos.

Siendo rigurosos, las dos tareas incluidas no alcanzan a hacer una evaluación juiciosa de la capacidad de los evaluados para seguir textos instruccionales; por eso este intento debe entenderse como una exploración que invita a realizar estudios más detallados que arrojen luz sobre este asunto.

<sup>21</sup> Recuérdese que esas dos preguntas no se incluyen en el cálculo de los rendimientos promedios de la prueba ni de los subcampos.

**Tabla 4.1. Rendimientos en las preguntas de textos instruccionales**

Pregunta	P1	P2
Quinto Inst A	69,7%	76,8%
Quinto Inst B	61,1%	68,4%
Pregunta	P9	P10
Noveno	66,2%	72,3%

La tabla 4.1 muestra los rendimientos que se obtuvieron en cada una de las dos preguntas.

El rendimiento del 66.2% que obtuvieron los evaluados de grado noveno en la pregunta 9 fue inferior a 68.4% y 76.8%, obtenido por los estudiantes de grado quinto en esta misma pregunta (la pregunta 9 de noveno es la misma 2 en los instrumentos A y B de quinto). Llama la atención este dato, ya que parece razonable esperar que en cuatro años más de escolaridad los estudiantes amplíen y profundicen su capacidad para seguir textos instruccionales<sup>22</sup>. Con el fin de tener más elementos de juicio sobre este asunto, se entrevistaron a unos pocos estudiantes de los grados quinto y noveno sobre este hecho; aunque estas entrevistas no pueden considerarse evidencia suficiente para hacer afirmaciones concluyentes, sí se constituyen en referencias útiles que pueden incitar estudios más juiciosos.

En las entrevistas realizadas se encontró que algunos estudiantes de grado noveno preferían seleccionar la opción “c”, porque la expresión que aparece en el enunciado de esta pregunta, “escriba las letras seleccionadas fuera de la figura, *una a un lado de la figura y la*

*otra a otro lado...*” la entendían como si fuera “escriba las letras seleccionadas fuera de la figura, *una en un lado de la figura y la otra en el otro lado* (es decir en dos de los tres segmentos de recta que componen la figura triángulo). Esta distinción no apareció en los niños de quinto que fueron entrevistados, parece que ellos admiten sin más la figura como una totalidad y esto les permite aceptar “lado de la figura” como “costado de la figura”, que era la intención comunicativa de los evaluadores al tratar de adaptarse al nivel de alumnos de quinto.

Este es un buen ejemplo de cómo, en algunos casos, el aparente error, o una producción inferior de un grupo de sujetos no obedece necesariamente a una menor comprensión; por el contrario, en hechos como estos, estas respuestas equivocadas han de leerse como consecuencia de niveles superiores de comprensión. Efectivamente, estos estudiantes de grado noveno seleccionan la opción incorrecta “c”, porque allí las letras están escritas casi sobre los segmentos de recta que componen dos lados del triángulo y rechazan la “d”, “por que están escritas casi sobre los vértices”. Los niños entrevistados de quinto, quizá por tener menos elaboraciones sus conocimientos geométricos, admiten con más facilidad el enunciado de la pregunta por ser expresiones lingüísticas (lado de la figura como costado de la figura) que son más cercanas a lo que se percibe visualmente.

Estos hechos ilustran la necesidad de perfeccionar la información obtenida con la aplicación de instrumentos masivos, con otros estudios, de carácter más cualitativo, para evitar lecturas ingenuas y erradas.

El otro problema que se estudiará a continuación tiene que ver con la relación establecida entre el desempeño de los evaluados en las preguntas de textos instruccionales y su

<sup>22</sup> Y no únicamente por el hecho de los efectos que puedan tener cuatro años más de vida escolar, sino por los efectos de los procesos de desarrollo que pueden significar cuatro años más de vida de un sujeto inscrito en un mundo físico, social y cultural.

Tabla 4.2. Relación de rendimientos en la prueba según el desempeño en las preguntas instruccionales

INSTRUMENTOS		RENDIMIENTO PRUEBA TODOS	RENDIMIENTO PRUEBA P1 Y P2 CORRECTAS	RENDIMIENTO PRUEBA P1 Y P2 INCORRECTAS	RENDIMIENTO PRUEBA P1 CORRECTA Y P2 INCORRECTA	RENDIMIENTO PRUEBA P1 INCORRECTA Y P2 CORRECTA
QUINTO INST. A	N individ	1884	888	308	263	425
	Media	50.01	53.92	43.75	48.31	47.43
	Desv. tip.	14.98	14.14	14.37	13.54	15.70
QUINTO INST. B	N individ	1901	1072	212	388	229
	Media	36.30	40.34	27.48	34.14	31.41
	Desv. tip.	18.36	18.15	14.49	17.00	15.55
NOVENO	N individ	3761	1961	512	529	759
	Media	36.62	39.94	29.37	32.01	36.17
	Desv. tip.	14.30	14.91	11.27	12.13	13.16

rendimiento en la prueba. La tabla 4.2 resume los rendimientos alcanzados por los evaluados según hayan contestado correcta o incorrectamente las dos preguntas instruccionales.

En los tres instrumentos, los evaluados que contestaron correctamente las dos preguntas de seguir instrucciones, presentaron los más altos desempeños en la prueba (en quinto 53,9% en el instrumento A y 40,3% en el instrumento B y en noveno 39,9%). Los que contestaron incorrectamente ambas preguntas presentaron los rendimientos más bajos (en quinto 43,7% con el instrumento A y 27,5% con el instrumento B, y en noveno 29,4%); los rendimientos de este grupo fueron notoriamente inferiores a los del grupo anterior. Los rendimientos de aquellos sujetos que contestaron una de las preguntas incorrectamente y la otra correctamente fueron más bajos que los de aquellos que contestaron correctamente ambas, aunque la diferencia no fue muy notoria.

Estos datos corroboran lo esperado: sugieren que, en general, los estudiantes que muestran menor capacidad para seguir instrucciones escritas también tienen menor capacidad para resolver las demás preguntas de la prueba. Esta relación es muy sugerente, ya

que es posible que deba reconocerse que las evaluaciones en matemáticas (y en otros campos) realizadas mediante instrumentos estandarizados escritos involucran más de lo deseable de ciertas habilidades lectoras, de tal forma que finalmente no queda claro qué tanto se está evaluando lo matemático y qué tanto la capacidad lectora.

Sobre la relación entre el desempeño de los evaluados en las dos preguntas de textos instruccionales y sus rendimientos en la prueba, todavía queda algo por analizar. Se presentaron casos aparentemente contradictorios: hubo evaluados que, a pesar de contestar incorrectamente las dos preguntas 1 y 2, presentaron rendimientos altos en la prueba; aunque son pocos, exigen explicaciones. En el instrumento A, 28 individuos de los 308 (el 9%), en el B, 17 individuos de los 212 (el 8%) y en noveno 16 de 512 (3%) contestaron incorrectamente las dos preguntas de textos instruccionales y, sin embargo, tuvieron rendimientos relativamente altos en la prueba, (superiores a 62% en quinto-instrumento A, a 50% en quinto-instrumento B y a 52% en noveno). No es tan clara la explicación para estos casos. Se podrían ensayar diferentes posibilidades: a) suponer que estos sujetos fracasan en las dos preguntas porque se les

dificulta comprender instrucciones escritas, en este caso habría que explicar en qué consisten esas estrategias lectoras que les permiten entender los enunciados que componen la demás preguntas de la prueba; b) suponer que el fracaso en estas dos preguntas se debe a factores como que el evaluado interpreta inadecuadamente los enunciados de las dos preguntas, pero posee la capacidad lectora apropiada para haberlo hecho correctamente; en este caso, habría que determinar cuáles son los elementos lingüísticos contenidos en las dos preguntas que oscurecen la comunicación, o c) suponer que el error cometido en las dos preguntas se debe a factores como desatención o cualquier otro. Estas tres opciones u otras, muestran la importancia de adelantar estudios algunos de ellos de carácter más cualitativo, que arrojen luz sobre este asunto; avanzar en este sentido con toda seguridad aportará elementos que posibiliten refinar procedimientos e instrumentos para realizar evaluaciones masivas que den cuenta con más exactitud de lo que realmente logra la escuela con la enseñanza de la matemática.

## 5. Nivel de desempeño de los evaluados

Como se ha dicho el desempeño de los sujetos evaluados en cada uno de los subcampos fue clasificado en cuatro categorías organizadas de menor a mayor desempeño: neófitos, principiantes, iniciados y avanzados. Esas categorías se definieron a partir de un enfoque que reconoce un proceso de desarrollo en el pensamiento matemático de los sujetos (ver numeral 1.4).

En el anexo No. 3 se describen los criterios específicos para definir cada categoría y se presentan algunos datos que permitan al lector valorar la validez de las clasificaciones. En

esas tablas se observa, cómo entre más alta sea la categoría en que se ubiquen los evaluados mayor es el rendimiento en la prueba.

En el anexo No. 4 se presenta una tabla en la que se muestran los resultados de pruebas de asociación entre las categorías de desempeño de los evaluados en cada uno de los subcampos y el rendimiento en la prueba; estas pruebas estadísticas permiten afirmar un aceptable nivel de correlación entre los desempeños de los subcampos y la prueba en general.

## 6. Resultados de las pruebas en relación con variables socio-culturales e institucionales

En este numeral se cruzan los rendimientos de los evaluados con algunas variables socioeconómicas y culturales para analizar las posibles relaciones entre estos factores y su desempeño. Para este análisis se aplicó una encuesta de “Capital Cultural”, pero debido a que en algunos ítems el porcentaje de evaluados que no contestó es relativamente alto, no se da información por considerar que se reduce sensiblemente la representatividad de los datos.

### 6.1 Relación entre el rendimiento en la prueba y factores socio económicos

En este numeral se cruzan los rendimientos de los estudiantes con dos variables socioeconómicas (estrato económico e ingresos). La tabla 6.1 compara los rendimientos en la prueba según el estrato.

Tabla 6.1. Rendimiento y desviación estándar según estrato<sup>23</sup>

Estrato	INSTRUMENTO A			INSTRUMENTO B			INSTRUMENTO 9		
	#sujeto	Media	Desv.	#sujeto	Media	Desv.	#sujeto	Media	Desv.
1	140	45.8	12.6	145	29.3	16.3	260	32.5	12.6
2	718	47.2	15.0	725	32.2	16.7	1432	34.7	13.5
3	839	51.6	14.8	835	38.8	18.4	1660	36.8	13.9
4	105	57.3	14.2	110	44.6	19.8	215	43.6	15.8
5 y 6	76	56.7		80	49.3		170	47.3	
Rural	6			6			24		

En los tres instrumentos se observa un incremento en el rendimiento de la prueba y el estrato económico. La desviación estándar mostraría el mismo patrón de crecimiento que la media, si no fuera por el valor que tiene en el instrumento A de quinto, correspondiente al estrato 2.

La tabla 6.2. muestra el rendimiento en relación con el nivel de ingreso familiar.

En los tres instrumentos se observa un incremento en el rendimiento de la prueba y los ingresos familiares. La desviación estándar

mostraría el mismo patrón de crecimiento que la media, si no fuera por el valor que tiene en el instrumento A de quinto, correspondiente a ingresos de más de 3 salarios mínimos.

A estas relaciones entre rendimiento de los evaluados con el estrato al que pertenecen y el ingreso familiar (que tomadas de forma global, bien pueden ser indicadores de los mismos hechos sociales y económicos) se le pueden dar muchas explicaciones. Para los autores de este estudio, estos datos tienen que ver con las condiciones de posibilidades que en nuestras sociedades tienen los indivi-

Tabla 6.2. Rendimiento y desviación estándar según ingresos familiares

INGRESOS	INSTRUMENTO A			INSTRUMENTO B			INSTRUMENTO 9		
	#sujeto	Media	Desv.	#sujeto	Media	Desv.	#sujeto	Media	Desv.
Hasta un mínimo	420	46.7%	14.3%	431	30.8	16.1	594	34.0	12.9
Entre 1 y 2 mínimos	345	50.3%	15.7%	350	34.3	17.2	566	36.5	13.6
Entre 2 y 3 mínimos	161	51.8%	15.1%	166	40.8	19.7	358	37.5	13.9
Más de 3 mínimos	286	55.1%	13.8%	268	44.0	19.7	605	42.8	15.6
No responde	37			60			87		
Total	1249	50.2%	15.1%	1275	36.1	18.4	2210	37.5	14.5

<sup>23</sup> Debido al reducido número de evaluados del estrato número seis, se agruparon los estrato 5 y 6. No se da media del estrato rural por la extensión tan reducida de la muestra.

duos según pertenezcan a estratos sociales más altos. Quizá este factor sea el que más puede justificar el mayor rendimiento de los evaluados de las instituciones educativas del sector no oficial y de estrato altos por encima de variables de tipo pedagógico.

## 6.2 Relación entre el rendimiento en la prueba y nivel educativo

Las tablas 6.3 y 6.4 muestran los rendimientos en las pruebas en relación con el nivel de escolaridad del padre y de la madre del evaluado.

En grado quinto no se encuentra ninguna relación entre el nivel escolar del padre y la

madre en las tres primeras categorías (ninguno, primaria, secundaria) y el rendimiento en la prueba. Sí se presenta una diferencia fuerte entre los rendimientos obtenidos por los evaluados de estas categorías y las otras dos (universitarios técnicos o tecnológicos y superiores). En grado noveno, los evaluados obtienen rendimientos crecientes a medida que se incrementa el nivel de estudio del padre o la madre. La diferencia en el caso de la madre es un poco más marcada que en el caso del padre.

Es difícil arriesgar alguna interpretación de estos datos, convendría hacer estudios posteriores que arrojen mayor luz sobre este asunto.

**Tabla 6.3. Rendimiento y Desviación estándar según nivel de escolaridad del padre**

NIVEL DE ESCOLARIDAD PADRE	INSTRUMENTO A			INSTRUMENTO B			INSTRUMENTO 9		
	#sujeto	Media	Desv.	#sujeto	Media	Desv.	#sujeto	Media	Desv.
Ninguno	16	51.1	15.6	21	30.8	12.7	34	33.2	15.5
Primaria (incompleto o completo)	179	44.4	14.7	214	30.5	17.4	352	34.3	12.8
Secundaria (incompleto o completo)	432	49.4	14.9	439	34.5	17.1	732	36.2	13.5
Universitario, técnico, tecnológico (incompleto o completo)	199	52.0	14.2	215	40.0	18.5	380	39.2	14.8
Estudios superiores	250	56.5	14.0	225	43.8	20.0	471	42.3	15.7
No responde	808	49.0	14.9	787	35.9	18.1	1792	35.3	14.0

**Tabla 6.4. Rendimiento y desviación estándar según nivel de escolaridad de la madre**

NIVEL DE ESCOLARIDAD MADRE	INSTRUMENTO A			INSTRUMENTO B			INSTRUMENTO 9		
	#sujeto	Media	Ds	#sujeto	Media	Ds	#sujeto	Media	Ds
Ninguno	20	48.2	14.6	23	34.2	15.6	35	30.8	14.6
Primaria (incom o compl.)	204	45.5	15.3	247	30.0	16.3	377	33.6	12.2
Secundaria (incom o compl.)	511	48.3	15.1	496	34.2	17.0	906	36.1	13.7
Universitario, técnico, tecnológico (incompleto o completo)	243	54.9	14.2	243	39.9	19.0	378	39.7	14.8
Estudios superior	201	55.5	13.2	203	45.2	20.6	427	43.2	15.9
No responde	705	49.4	14.7	689	36.4	18.0	1638	35.3	13.9

Tabla 6.5. Rendimiento y desviación estándar según sector

Sector	INSTRUMENTO A			INSTRUMENTO B			INSTRUMENTO 9		
	#sujeto	Media	Desv.	#sujeto	Media	Desv.	#sujeto	Media	Desv.
No oficial	783	53.9	14.7	787	41.9	19.6	1548	40.7	15.4
No oficial Convenio	310	48.2	13.9	315	32.4	15.9	587	35.6	13.2
Oficial Distrital	684	47.2	15.1	690	33.2	16.8	1437	33.0	12.3
Ofic. Distrit. Concesión	107	44.9	12.8	109	27.3	13.9	189	33.4	13.6

### 6.3 Rendimiento por sector

La tabla 6.5 compara los rendimientos en las pruebas según el sector al que pertenece la institución educativa.

En los tres instrumentos, el mayor rendimiento corresponde a las instituciones no oficiales. El menor rendimiento corresponde a las instituciones distritales en concesión en los dos instrumentos de grado quinto, en noveno las instituciones del sector oficial y distrital tienen el menor rendimiento. Las diferencias entre los rendimientos de los sectores: no oficial convenio, oficial distrital y oficial distrital en concesión, no son amplias y no se mantienen de un instrumento a otro, por lo que resulta más exacto afirmar que no se encuentra un relación entre el rendimiento en la prueba y estos sectores. En cambio, sí se da una diferencia importante entre los colegios del sector no oficial y las instituciones de los demás sectores.

La desviación estándar (Ds) en el sector no oficial es de las mayores en los tres instrumentos, este hecho quizá pueda explicarse

porque en este sector se encuentran colegios de diferentes estratos socio-económicos.

Es importante evitar interpretar estos datos como el reflejo de la calidad de las prácticas pedagógicas de las instituciones y a partir de ahí hacer afirmaciones como: “En los colegios no oficiales se ofrece una educación matemática de mejor calidad y en los concesionados de peor calidad”. Simplemente, estos datos dicen que los sujetos evaluados pertenecientes a los colegios del sector no oficial obtuvieron en la prueba un rendimiento mayor que los evaluados de los otros sectores. Quizá, la diferencia a favor de los colegios del sector no oficial pueda explicarse más por factores de tipo socio-económico y cultural, que por factores de tipo pedagógico.

### 6.4 Rendimiento según jornada

La tabla 6.6 muestra los rendimientos en los tres instrumentos según jornada.

Los evaluados de las instituciones con jornada única obtienen el mayor rendimiento en los

Tabla 6.6. Rendimiento y desviación estándar según jornada

JORNADA	INSTRUMENTO A			INSTRUMENTO B			INSTRUMENTO 9		
	#sujeto	Media	Desv.	#sujeto	Media	Desv.	#sujeto	Media	Desv.
Mañana	495	48.4	14.6	493	35.5	17.8	1028	34.8	13.4
Tarde	315	46.3	15.5	318	30.3	14.7	641	32.4	11.7
Única	1074	51.8	14.7	1090	38.5	19.1	2092	38.8	15.0

tres instrumentos, seguido de los de la jornada de la mañana. Estos datos parecen razonables, sin embargo de nuevo aquí debe tenerse el cuidado de no hacer afirmaciones como: “las prácticas pedagógicas en una jornada son de mejor calidad que las de otras”; posiblemente, estos resultados más que reflejar mejores prácticas de enseñanza tengan que ver con mejores condiciones, tales como disposición anímica de los estudiantes e incluso de los mismo profesores (podría afirmarse que la jornada de la tarde es menos favorable para el trabajo escolar que la mañana). Quizá, los mejores resultados de la jornada única tienen que ver con mejor infraestructura escolar o con la mayor duración de la jornada diaria.

## 7. Conclusiones

Los resultados de las dos pruebas aplicadas a grado quinto muestran que los evaluados presentan dificultad para resolver los problemas de nivel dos y especialmente de nivel tres. (ver tabla 1.1). De los diferentes subcampos evaluados en este grado, en el aditivo los evaluados presentan el mejor rendimiento (alrededor del 75% se ubica en las dos categorías superiores, la de iniciados y la de avanzados (ver tabla 2.4), y en el multiplicativo, el 38% se encuentra en las dos categorías superiores). En los demás subcampos, alrededor del 30% de los evaluados se ubica en las dos categorías superiores y el correspondiente a los fraccionarios se encuentra en el más bajo rendimiento (el 22% se ubica en estas dos categorías).

En el caso de grado noveno, en los subcampos de enteros y racionales, alrededor del 30% de los evaluados se ubica en las dos categorías superiores (iniciados y avanzados (ver tabla 3.3). En los subcampos de problemas abiertos y variacional-algebraico el 25% alcanza estas dos categorías. El subcampo de razonamiento

tiene el más bajo rendimiento (únicamente el 18% alcanzan rendimientos que los ubican en las dos categorías superiores).

Los autores de esta parte primera insisten en que los datos y los análisis que de ellos se han hecho, si bien son valiosos y se aconseja sean asumidos como punto de referencia, deben relativizarse; factores inevitables en este tipo de pruebas (el número tan reducido de tareas que se utilizan, la reducción de contextos que se emplean para formular las tareas y la fallida pretensión de universalidad otorgada a estos, el manejo del lenguaje y la innegable incidencia de las habilidades lectoras, el reducido tiempo que se da para contestar cada tarea e incluso factores de tipo actitudinal) llaman a la prudencia al leer los datos y los análisis elaborados. Es prácticamente un lugar común aceptar que la producción individual de un estudiante en una situación de interacción personal con el evaluador, como tendencia general, es superior a la que refleja al responder instrumentos escritos y que se pretenden “estandarizados” como éstos.

Se recomienda a directivos y a docentes asumir los resultados arrojados por esta prueba como una posibilidad para reflexionar sobre las prácticas de enseñanza y evaluación. La estructura de la prueba brinda a los maestros una herramienta para hacer un seguimiento más sistemático de los progresos de sus estudiantes a lo largo del proceso de aprendizaje, de ahí la importancia que el maestro utilice esta prueba como referencia para ubicar los niveles alcanzados por sus estudiantes.

De igual forma, a partir de los resultados obtenidos se recomienda hacer un análisis crítico de la formas de las prácticas de enseñanza y de evaluación con el propósito de encontrar caminos que promuevan formas de enseñanza movilizadoras de procesos de complejización del pensamiento matemático

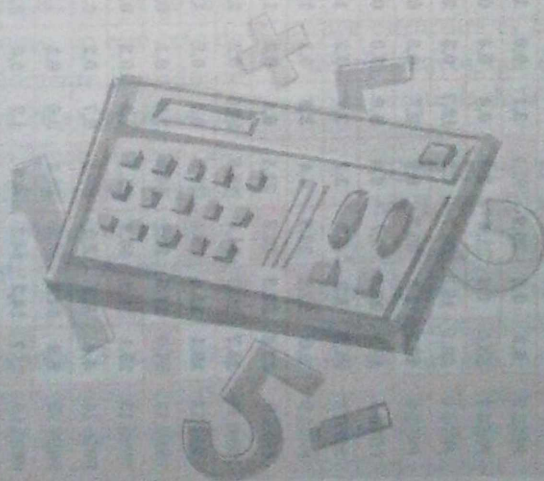
de los estudiantes, de tal forma que alcancen niveles en los que sea lo suficientemente flexible como para hacerse capaces de comprender y resolver problemas compuestos e inversos en situaciones diversas.

Los análisis muestran algunos puntos en los que es necesario avanzar para mejorar la prueba. Es necesario mejorar algunas tareas para obtener una mayor correspondencia con el modelo de complejización de las tareas en los diferentes subcampos, como en el caso de los fraccionarios en quinto y de variacional-algebraico. Quizá aumentar de cinco tareas a siete por subcampo ofrezca mayor confiabilidad para clasificar el rendimiento de los estudiantes. Es claro que hay que evitar construir subcampos no claramente definidos como se hizo con el sistema decimal de numeración, representaciones de decimales de expresiones compuestas de medida y orden numérico, ya que no permiten jerarquizar las tareas, de igual forma, subcampos con menos de cinco tareas ofrecen información poco precisa. Este problema, que parece no tener solución en pruebas como éstas, pero sí lo tiene en la clase de matemáticas, porque allí no se tiene la restricción de tiempo que impone la evaluación masiva.

Aunque la indagación que se hizo sobre la relación entre la capacidad lectora y el rendimiento en un prueba de matemática, parece mostrar que ésta es fuerte, tal como lo han señalado varios estudiosos, pero que con frecuencia se deja de lado en los estudios masivos, es necesario ampliarla y precisarla. Aquí hay un gran campo de investigación.

La decisión de presentar tareas formuladas con enunciaciones precisas y limitadas a subcampos particulares y dejar como subcampo separado los problemas abiertos, parece ser acertada, precisamente porque permite ganar un poco de control en la incidencia de la habilidad lectora. Se encuentra una alta relación entre los desempeños en la resolución de problemas de los subcampos de problemas aditivos, multiplicativos y aditivo-multiplicativos y la resolución de problemas abiertos.

Estas pruebas tendrán el valor que se desea dentro del Laboratorio de Evaluación de Bogotá si se asumen como un punto de reflexión y de debate colectivo para trabajar en nuevas preguntas. Se invita a los docentes a continuar avanzando en esta dirección.



# 8. Anexos

Anexo 1. Frecuencia de selección de cada opción y pregunta

## INSTRUMENTO DE NOVENO

Nº EVALUADOS: 3761

ITEM PREG.	a (%)	b (%)	c (%)	d (%)	RM (%)	O (%)
PREG 1	14,9	9,3	60,8	13,6	0,1	1,2
PREG 2	17,4	24,6	8,3	49,1	0,2	0,5
PREG 3	27,7	29,1	26,3	15,7	0,0	1,1
PREG 4	30,6	10,2	24,7	33,4	0,3	0,9
PREG 6	28,3	27,7	23,9	19,1	0,1	1,0
PREG 7	49,3	20,0	19,0	11,3	0,1	0,3
PREG 8	20,5	29,6	28,8	18,9	0,0	2,2
PREG 9	2,9	4,4	26,1	66,2	0,1	0,2
PREG 10	11,1	5,3	72,3	10,8	0,1	0,3
PREG 11	26,1	24,9	15,7	32,7	0,1	0,6
PREG 12	7,8	15,2	13,4	63,2	0,2	0,3
PREG 13	30,7	24,1	16,1	27,6	0,1	1,5
PREG 14	41,8	10,3	16,4	30,7	0,2	0,6
PREG 15	28,6	31,5	17,5	21,7	0,1	0,7
PREG 16	63,4	15,6	12,9	6,9	0,1	1,1
PREG 17	19,9	34,2	8,2	36,4	0,1	1,2
PREG 18	36,7	14,2	33,3	14,0	0,1	1,6
PREG 19	18,6	27,3	33,8	18,0	0,1	2,2
PREG 20	19,9	27,8	44,8	5,9	0,1	1,5
PREG 21	6,4	7,3	39,2	46,2	0,0	0,8
PREG 22	19,5	33,2	32,6	12,7	0,0	2,0
PREG 23	6,6	11,9	36,9	43,4	0,2	1,1
PREG 24	16,9	26,5	25,5	28,9	0,0	2,2
PREG 26	15,6	21,8	29,0	29,2	0,0	4,4

## INSTRUMENTO B DE QUINTO

Nº EVALUADOS: 1901

ITEM PREG.	a (%)	b (%)	c (%)	d (%)	e (%)	RM (%)	O (%)
PREG 1	6,9	11,3	76,8	2,9	1,2	0,3	0,7
PREG 2	6,4	6,6	14,2	68,4	2,7	0,0	0,9
PREG 3	12,3	5,4	69,3	6,1	5,5	0,5	0,9
PREG 4	60,2	17,4	5,3	12,5	3,5	0,3	0,9
PREG 5	22,9	41,5	10,7	21,0	3,3	0,2	0,4
PREG 6	28,9	20,7	26,8	9,5	12,2	0,2	1,8
PREG 7	35,2	22,4	12,4	26,6	2,7	0,2	0,6
PREG 8	12,3	35,7	29,5	12,8	8,3	0,3	1,2
PREG 9	19,1	44,6	17,5	9,0	8,2	0,2	1,4
PREG 12	44,9	11,5	11,0	27,8	4,3	0,1	0,5
PREG 13	37,2	10,9	14,2	27,9	8,1	0,3	1,4
PREG 14	37,6	34,1	11,2	12,4	3,4	0,5	0,9
PREG 15	22,7	30,2	23,4	17,0	5,2	0,2	1,3
PREG 16	35,0	36,7	10,4	13,8	2,5	0,3	1,4
PREG 17	16,8	37,6	16,6	18,8	7,8	0,3	2,2
PREG 18	35,1	18,8	18,3	19,9	4,9	0,4	2,5
PREG 21	7,8	27,9	11,2	44,6	3,3	0,1	5,1

## INSTRUMENTO A DE QUINTO

Nº EVALUADOS: 1884

ITEM PREG.	a (%)	b (%)	c (%)	d (%)	e (%)	RM (%)	O (%)
PREG 1	11,4	10,0	69,7	6,5	1,5	0,3	0,7
PREG 2	6,3	6,8	20,9	61,1	3,1	0,0	1,4
PREG 3	93,6	1,6	1,4	2,3	0,4	0,4	0,2
PREG 4	25,1	16,0	31,7	6,2	18,7	0,3	2,0
PREG 5	10,3	7,3	69,7	8,9	2,7	0,3	0,8
PREG 6	57,3	23,0	6,7	6,4	5,9	0,0	0,7
PREG 7	81,8	5,3	5,3	2,7	3,7	0,2	1,1
PREG 8	9,0	53,0	28,5	4,4	3,9	0,1	1,2
PREG 9	23,8	22,3	25,2	21,1	6,1	0,2	1,3
PREG 10	33,7	16,2	14,4	18,8	14,5	0,2	2,2
PREG 11	15,1	15,4	28,4	29,8	9,1	0,2	1,9
PREG 12	54,0	17,5	10,2	14,5	3,0	0,1	0,8
PREG 13	13,1	14,9	48,3	21,7	1,3	0,2	0,6
PREG 14	4,4	7,3	2,9	84,1	0,7	0,2	0,5
PREG 15	8,8	31,2	31,6	24,1	3,0	0,1	1,3
PREG 16	63,7	14,2	14,7	4,0	1,2	0,0	2,2
PREG 19	34,4	9,8	47,1	5,4	1,3	0,2	1,9
PREG 20	11,4	10,3	43,7	30,1	2,2	0,2	2,1
PREG 21	17,0	66,8	6,8	4,2	1,6	0,1	3,5

convenciones

RM Respuesta Múltiple

0 Omittido

Clave

## Anexo 2. Descripción de las Preguntas

## Prueba de Quinto

- **SUBCAMPO DE LO ADITIVO (Instrumento A)**

**Nivel 1 (N1).** La pregunta 3 es un problema aditivo simple directo, en este caso de descomposición.

**Nivel 2 (N2).** La pregunta 14 es un problema aditivo compuesto directo, en este caso de composición-descomposición. La pregunta 16 es un problema aditivo simple inverso de estado-evento, en este caso de complemento a izquierda. La pregunta 19 es un problema aditivo simple inverso de relación, en este caso de inversión de la relación.

**Nivel 3 (N3)** La pregunta 4 es un problema aditivo compuesto, en este caso de composición de operadores.

- **SUBCAMPO DE LO MULTIPLICATIVO (instrumento A)**

**Nivel 1 (N1).** La pregunta 21 es un problema multiplicativo simple directo, en este caso de composición múltiple

**Nivel 2 (N2).** La pregunta 12 es un problema multiplicativo inverso, en este caso de valor unitario (el comúnmente llamado de repartición). La pregunta 20 es un problema multiplicativo compuesto directo, en este caso de correspondencias múltiples. La pregunta 15 es un problema multiplicativo simple inverso de relación, en este caso de inversión de la relación.

**Nivel 3 (N3)** La pregunta 13 es un problema multiplicativo compuesto, en este caso de composición de operadores ambos “ampliación”.

- **SUBCAMPO DE PROBLEMAS ABIERTOS (Instrumento A)**

**Nivel 1 (N1).** La pregunta 5 es un problema que requiere obtener información de dos tablas para relacionarla

**Nivel 2 (N2).** La pregunta 6 es un problema que además de requerir obtener información de tablas sencillas de doble entrada exige modelar mediante una expresión numérica la excedencia (“cuánto más es algo con relación a algo”). La pregunta 11 es una situación que requiere la estimación de una medida (la diagonal de la cara frontal de una vitrina) y la identificación de un intervalo numérico que la incluye representado en el lenguaje común. La pregunta 9 es un problema que requiere obtener información de una tabla, y formularse una pregunta que supone un problema multiplicativo simple directo (“si el valor unitario de un agarradera es ... 9 unidades cuestan ...) y el resultado obtenido compararlo (mayor o menor) con otro dato (valor de un paquete).

**Nivel 3 (N3).** La pregunta 10 supone un problema compuesto (incluye varias etapas) cuya estructura es la de problemas aditivo-multiplicativos, que exige toma de decisiones en la búsqueda de la meta final.

- **SUBCAMPO DE LO ADITIVO-MULTIPLICATIVO (Instrumento B)**

**Nivel 1 (N1).** La pregunta 4 es un problema aditivo multiplicativo directo, para su resolución requiere de dos etapas: una primera que supone un problema multiplicativo directo y una segunda, que requiere la resolución de un problema aditivo simple de descomposición.

**Nivel 2 (N2).** La pregunta 12 es un problema aditivo-multiplicativo directo, que para su resolución requiere de tres etapas, dos de ellas consistente en problemas multiplicativos simples y la tercera de un problema aditivo simple de composición. La pregunta 16 y 18 son problemas aditivo-multiplicativos inversos. Su resolución requiere de dos etapas, una consistente en la resolución de un problema aditivo simple de descomposición y la otra un problema multiplicativo simple inverso.

**Nivel 3 (N3).** La pregunta 6 supone un problema aditivo-multiplicativo inverso que supone dos etapas para ser resuelto: una, correspondiente a un problema aditivo simple de descomposición y la otra uno multiplicativo simple inverso.

- **SUBCAMPO DE LOS FRACCIONARIOS (Instrumento B)**

**Nivel 1 (N1).** La pregunta 7 es un problema directo y simple, en el que se requiere aplicar un operador fraccionario ( $1/3$ , de numerador igual a 1) sobre un estado (48 unidades).

**Nivel 2 (N2).** La pregunta 8 es un problema directo y simple, en el que se requiere aplicar un operador fraccionario ( $4/6$  de numerador diferente de 1) sobre un estado (48 unidades). La pregunta 9 es un problema inverso y simple, en el que se requiere averiguar a qué valor se le aplicó un operador fraccionario ( $7/10$ ). La pregunta 21 es un problema que requiere establecer una relación mayor (o menor) entre dos operadores fraccionarios ( $1/3$  y  $1/4$ ).

**Nivel 3 (N3).** La pregunta 5 es un problema que se requiere establecer una relación multiplicativa (es tantas veces mayor o tanta veces menor) entre dos operadores fraccionarios ( $2/5$  y  $2/10$ ).

- **SUBCAMPO DEL SDN, DE LOS DECIMALES Y DEL ORDEN (Instrumento B)**

**Nivel 1 (N1).** La pregunta 3 es un problema que requiere el manejo de un significado aditivo de los signos numéricos ( $8.670=8.000+600+70+0$ , que es el significado más elemental de los signos numéricos).

**Nivel 2 (N2).** La pregunta 14 es un problema que requiere convertir una representación compuesta de una medida (2 metros y 35 centímetros) en una representación decimal (2,35 metros). La pregunta 15 es un problema que además de exigir convertir representaciones del tipo de la pregunta 14, requiere estimar el resultado de una resta entre dos medidas escritas como cantidades compuestas (5 m menos 2m y 35 cm es un poco más que 2,50 m). La pregunta 17 es un problema que requiere el manejo de un significado cercano a lo polinomial (un carita equivale a varias fechas y estas a su vez equivalen a varias manchas, etc).

**Nivel 3 (N3).** La pregunta 13 es un problema que requiere un manejo elevado del orden (es mayor y es menor), consiste poner hacer corresponder dos series: mientras un crece la otra disminuye.

- **SUBCAMPO DEL RAZONAMIENTO (instrumento A)**

La pregunta 7 es un problema que consiste en seguir un patrón de variación sencillo hasta encontrar el valor de un caso próximo a los conocidos. La pregunta 8 consiste en una tarea que exige identificar un patrón sencillo de una sucesión, que debe seguirse para identificar el elemento de una posición que no es la siguiente pero sí próxima a la última posición conocida.

## Prueba de Noveno

- **SUBCAMPO DE LOS NÚMEROS ENTEROS**

**Nivel 1 (N1).** La pregunta 16 es un problema simple-inverso de la forma estado inicial -operador-estado final, en el que los dos estados son negativos y conocidos (el estado inicial mayor que el estado final) y se pregunta por el operador (desplazamiento del corcho).

**Nivel 2 (N2).** La pregunta 15 es un problema compuesto directo, de la forma estado inicial -operador-operador estado final, en el que se pide encontrar la expresión que representa el estado final si el inicial se representa por “-p”, evalúa la capacidad de anticipar el efecto resultante de componer dos operadores. La pregunta 17 es un problema que requiere la multiplicación de un natural por un operador; evalúa la capacidad de anticipar el resultado de aplicar sobre un estado negativo varias veces un operador negativo (en este caso un desplazamiento negativo). La pregunta 20 es un problema aditivo compuesto, en este caso de composición de operadores (es la misma pregunta 4 de quinto, instrumento A).

**Nivel 3 (N3)** La pregunta 22 es un problema que exige relacionar dos escalas no coincidentes en sus puntos cero, por exigen una transformación aditiva al compararlas, pero con el mismo valor unitario. En este caso las escalas son temporales.

- **SUBCAMPO DE LOS NÚMEROS RACIONALES**

**Nivel 1 (N1).** La pregunta 1 es un problema que requiere el manejo de las fracciones como partidores, que exige la conversión entre una representación gráfica y una simbólica.

**Nivel 2 (N2).** La pregunta 19 requiere la conversión entre tres sistemas de represen-

tación porcentual, fraccionaria y decimal. La pregunta 21 es un problema que requiere establecer una relación mayor (o menor) entre dos operadores fraccionarios ( $1/3$  y  $1/4$ ). Esta es la misma pregunta 21 de quinto, instrumento B. La pregunta 18 requiere convertir una expresión compuesta de una medida de capacidad en decimal.

**Nivel 3 (N3).** La pregunta 26 es un problema aditivo, compuesto (encontrar el complemento de una suma) e inverso (cuál es la cantidad cuyos  $2/5$  equivale a 150), requiere interpretar la información de una tabla simple.

- **SUBCAMPO DE LO VARIACIONAL Y ALGEBRAICO**

**Nivel 1 (N1).** La pregunta 12 es un problema que requiere interpretar un enunciado matemático sencillo dado en el lenguaje común.

**Nivel 2 (N2).** Las pregunta 4 está vinculada con la modelación de formas de variación, involucra la proporcionalidad inversa y requiere la interpretación de una gráfica cartesiana. La pregunta 13 es un problema que indaga la capacidad del estudiante de investigar por las propiedades de una operación. La pregunta 14 es una situación que involucra la interpretación de una inecuación, representada en forma simbólica.

**Nivel 3 (N3).** Las pregunta 11 está vinculada con la modelación de formas de variación, involucra la variación lineal y requiere de la interpretación de una gráfica cartesiana.

- **SUBCAMPO DE PROBLEMAS ABIERTOS**

**Nivel 1 (N1).** La pregunta 6 supone un problema compuesto (incluye varias etapas) cuya estructura es la de problemas aditivo-multiplicativos, que exige la toma de decisiones en la búsqueda de la meta final.

**Nivel 2 (N2).** La pregunta 11 es una situación que requiere la estimación de una medida (la diagonal de la cara frontal de una vitrina) y la identificación de un intervalo numérico que la incluye representado en el lenguaje común.

**Nivel 3 (N3).** Las pregunta 8 es un problema que requiere obtener una expresión simbólica que expresa la generalización de un procedimiento

- **SUBCAMPO DE RAZONAMIENTO**

**Nivel 1 (N1).** La pregunta 2 consiste en una tarea que exige identificar un patrón sencillo de una sucesión, que debe seguirse para identificar el elemento de una posición que no es la siguiente pero sí próxima a la última posición conocida.

**Nivel 2. (N2).** La pregunta 3 consiste en una tarea que exige identificar un patrón de

variación de una sucesión y representar simbólicamente el valor de una posición  $p$ . que debe seguirse para identificar el elemento de una posición que no es la siguiente pero sí próxima a la última posición conocida. La pregunta 23 es semejante a la 2, también, consiste en una tarea que exige identificar un patrón sencillo de una sucesión, que debe seguirse para identificar el elemento de una posición que no es la siguiente pero sí próxima a la última posición conocida, sólo que el patrón en este caso es más complicado de identificar que en la 2.

**Nivel 3. (N3).** La pregunta 24, semejante a la 3, también consiste en una tarea que exige identificar un patrón de variación de una sucesión y representar simbólicamente el valor de una posición  $m$ . que debe seguirse para identificar el elemento de una posición que no es la siguiente pero sí próxima a la última posición conocida.

## Anexo No 3. Categorías de Desempeño y Rendimiento de la Prueba (A)

QUINTO					INSTRUMENTO A										INSTRUMENTO B																
NIVELES					ADITIVO					MULTIPLICATIVO					PROB. AB					ADITIVO-MULTIP.					FRACCIONARIOS					SDH-ORDEN.	
					# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA	
X	X	X	X	X	23	21,74%	164	29,99%	174	30,39%	299	18,37%	313	20,98%	200	16,67%															
X	✓	X	X	X	9	30,72%	110	40,59%	126	40,29%	47	26,24%	107	29,53%	106	23,40%															
X	X	✓	X	X	7	17,65%	40	37,79%	56	40,65%	68	28,33%	232	30,63%	40	23,00%															
X	X	X	✓	X	15	26,27%	64	38,24%	29	36,51%	96	26,67%	107	28,29%	50	31,47%															
X	X	X	X	✓	7	26,89%	27	36,60%	32	39,34%	74	27,03%	91	25,35%	36	20,93%															
TOTAL					61	24,30%	405	35,38%	417	35,87%	584	22,63%	850	26,08%	432	20,97%															
NEOFITOS																															
PRINCIPIANTES																															
✓	X	X	X	X	66	29,90%	203	40,31%	233	42,01%	263	28,16%	72	29,91%	266	27,72%															
✓	✓	X	X	X	219	39,90%	170	50,28%	345	53,13%	80	37,67%	104	44,42%	170	34,78%															
✓	X	✓	X	X	37	37,70%	121	50,90%	82	51,58%	122	37,54%	92	46,30%	66	34,85%															
✓	X	X	✓	X	29	40,00%	59	48,55%	71	47,14%	101	36,24%	30	44,22%	137	43,36%															
✓	X	X	X	✓	26	38,90%	44	44,92%	45	48,24%	72	37,78%	21	38,10%	98	37,01%															
X	✓	✓	X	X	16	37,50%	61	50,72%	40	49,41%	23	33,91%	68	38,04%	18	28,89%															
X	✓	X	✓	X	7	31,90%	53	48,28%	28	53,78%	14	33,81%	38	33,51%	28	30,95%															
X	✓	X	X	✓	5	27,10%	12	44,61%	24	48,04%	20	34,33%	27	27,16%	28	30,71%															
X	X	✓	X	✓	2	23,50%	9	37,91%	14	45,80%	19	38,25%	75	35,82%	15	29,78%															
X	X	X	✓	✓	4	33,80%	8	44,12%	5	43,53%	24	37,22%	41	31,71%	18	35,19%															
X	X	✓	✓	X	2	26,50%	21	44,54%	14	52,52%	29	37,47%	59	36,84%	18	32,22%															
TOTAL					413	37,50%	761	46,71%	901	48,94%	767	33,93%	627	38,14%	862	33,71%															



## Anexo No 3. Categorías de Desempeño y Rendimiento de la Prueba (C)

NOVENO										
NIVELES					SUBCAMPO					
					ENTEROS		RACIONALES		VAR-ALG	
N1	N2	N2	N2	N3	# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA	# SUJETOS	REND. PRUEBA
NEOFITOS										
X	X	X	X	X	405	22,54%	387	23,96%	393	23,92%
X	√	X	X	X	95	29,76%	110	28,84%	125	26,58%
X	X	√	X	X	124	30,28%	174	31,45%	127	28,95%
X	X	X	√	X	285	28,50%	127	30,82%	193	28,45%
X	X	X	X	√	54	27,86%	118	27,62%	125	29,24%
TOTAL					963	26,31%	916	27,39%	963	26,53%
PRINCIPIANTES										
√	X	X	X	X	457	30,17%	506	27,79%	502	32,73%
√	√	X	X	X	212	39,58%	172	34,01%	161	35,38%
√	X	√	X	X	272	39,72%	217	36,30%	207	38,43%
√	X	X	√	X	385	34,90%	223	37,32%	446	38,63%
√	X	X	X	√	53	36,54%	207	32,78%	203	40,37%
X	√	√	X	X	46	38,54%	56	38,15%	49	34,79%
X	√	X	√	X	94	35,11%	64	37,29%	71	33,61%
X	√	X	X	√	29	33,54%	33	33,33%	47	31,24%
X	X	√	X	√	22	35,74%	77	38,31%	31	31,96%
X	X	X	√	√	49	32,00%	53	35,25%	59	34,98%
X	X	√	√	X	103	34,11%	104	43,40%	89	34,83%
TOTAL					1722	35,00%	1712	33,79%	1865	36,04%
INICIADOS										
√	√	√	X	X	204	51,27%	81	43,77%	60	44,77%
√	X	√	√	X	229	44,34%	204	47,79%	171	47,21%
√	√	X	√	X	155	43,99%	76	41,51%	154	47,40%
√	√	√	√	X	188	58,46%	105	57,53%	50	50,73%
X	√	√	X	√	9	41,92%	25	44,00%	4	36,36%
X	√	X	√	√	10	43,64%	16	39,77%	16	40,06%
X	X	√	√	√	18	41,41%	57	48,48%	19	40,43%
√	√	X	X	√	31	43,40%	74	39,00%	51	45,45%
√	X	√	X	√	41	42,90%	99	45,64%	76	43,60%
√	X	X	√	√	54	41,25%	88	41,94%	136	47,46%
X	√	√	√	X	28	42,69%	56	47,56%	27	41,41%
TOTAL					967	48,10%	881	46,25%	764	46,28%
AVANZADOS										
X	√	√	√	√	5	36,36%	19	54,31%	8	49,43%
√	√	√	X	√	23	50,99%	43	49,37%	28	52,60%
√	X	√	√	√	26	46,33%	94	56,19%	56	55,11%
√	√	X	√	√	24	49,24%	31	47,51%	41	54,55%
√	√	√	√	√	31	60,70%	65	63,57%	36	67,42%
TOTAL					109	51,58%	252	55,72%	169	56,91%

NIVELES				RAZONAMIENTO	
N1	N2	N2	N3	# SUJETOS	REND. PRUEBA
NEOFITOS					
X	X	X	X	890	25,65%
X	√	X	X	176	31,04%
X	X	X	√	215	32,18%
X	X	√	X	318	32,90%
TOTAL				1599	28,56%
PRINCIPIANTES					
√	X	X	X	491	32,95%
√	√	X	X	254	42,57%
√	X	X	√	188	38,85%
√	X	√	X	266	40,11%
X	√	√	X	71	38,35%
X	√	X	√	57	36,84%
X	X	√	√	160	41,90%
TOTAL				1487	37,99%
INICIADOS					
√	√	X	√	103	50,40%
√	√	√	X	208	51,60%
√	X	√	√	138	46,81%
X	√	√	√	29	47,34%
TOTAL				478	49,70%
AVANZADOS					
√	√	√	√	197	59,99%

NIVEL			SUBCAMPO	
N1	N2	N3	# SUJETOS	REND. PRUEBA
PROB. ABIERTO				
NEOFITOS				
X	X	X	1128	29,14%
PRINCIPIANTES				
√	X	X	1062	36,93%
X	√	X	348	35,85%
X	X	√	297	36,35%
TOTAL			1707	36,61%
INICIADOS				
√	√	X	452	44,37%
X	√	√	134	44,30%
√	X	√	232	44,77%
TOTAL			818	44,47%
AVANZADOS				
√	√	√	108	55,56%

**Anexo 4. Pruebas Estadísticas**

**Correlaciones entre los rendimientos en los diferentes subcampos y la prueba. Instrumento A - Quinto.**

CORRELACIONES		REND PRUEBA	REND EN ADTIVO	REND EN MULTIP.	REND EN ABIERTOS
Pearson	REND PRUEBA	1,00	0,66(**)	0,74(**)	0,69(**)
Sperman	REND PRUEBA	1,00	0,63(**)	0,74(**)	0,68(**)

\*\* La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

**Correlaciones entre los rendimientos en los diferentes subcampos y la prueba. Instrumento B - Quinto.**

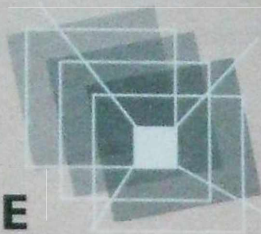
CORRELACIONES		REND PRUEBA	REND EN ADTIVO-MULTIPLICATIVO	REND EN FRACCIOARIOS	REND EN SDN, DECIMAL YORDEN
Pearson	REND PRUEBA	1,00	0,78(**)	0,69(**)	0,92(**)
Sperman	REND PRUEBA	1,00	0,75(**)	0,66(**)	0,90(**)

\*\* La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

**Correlaciones entre los rendimientos en los diferentes subcampos y la prueba. Instrumento Noveno**

CORRELACIONES		REND PRUEBA	REND EN ENTEROS	REND EN RACIONALES	REND EN RAZONAMIENTO	REND EN P. ABIERTOS	REND EN LO VARIACIONAL
Pearson	REND PRUEBA	1,00	0,63	0,64	0,65	0,44	0,57
Sperman	REND PRUEBA	1,00	0,61	0,62	0,63	0,42	0,55

\*\* La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).



**SERIE**  
Cuadernos de Evaluación

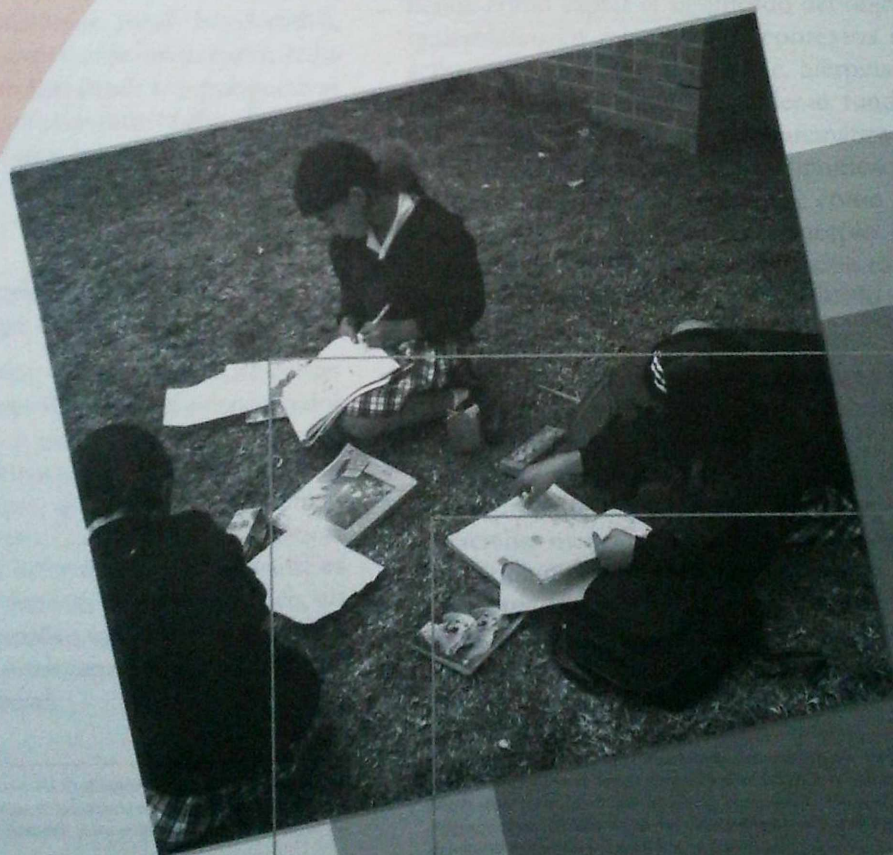


ALCALDIA MAYOR  
DE BOGOTÁ D.C.  
Secretaría  
Educación

# Segunda Parte

## Evaluación del pensamiento aleatorio

Análisis comprensivo y pedagógico  
Grados 5° y 9°



## I. El sentido de la evaluación desde la comprensión matemática

### I.1 La comprensión matemática

Habitualmente, desde lo educativo, la comprensión matemática se ha entendido desde tres perspectivas distintas<sup>1</sup>: la comprensión como dominio de contenidos disciplinares, la comprensión como significación y la comprensión como dominio conceptual.

#### La Comprensión como dominio de contenidos disciplinares

La comprensión como dominio de contenidos disciplinares significa “saber contenidos matemáticos”, en tanto el énfasis se hace en el uso de información. Se le otorga mayor importancia al qué, que al cómo, al contenido más que al proceso. Comprender matemáticas significa poseer información. Lo relevante es mostrar que se tiene un saber matemático, no la habilidad obtenida a través de la matemática y transferible a otros espacios de razonamiento sobre la realidad.

#### La comprensión como significación

La comprensión como significación se entiende como captar el significado del objeto matemático en relación con contextos de actuación y del uso del lenguaje. Sierpinska (1994) y Godino (2006) consideran fundamental para la didáctica de la matemática la idea de la comprensión como significado. Para ellos, comprender se concibe como el, acto de captar el significado del concepto. La secuencia de los actos de comprensión es el proceso de construcción del significado de los conceptos.

Dentro de esta perspectiva, comprender significa la conexión entre redes internas (representaciones) y externas (lenguaje). La idea de representación mental se vincula con la de representación semiótica; no hay representaciones mentales al margen del lenguaje. Para Godino (1998), la faceta psicológica de la comprensión como “experiencia mental” y “conexión a redes internas de representación de información”<sup>2</sup> debería ser complementada

<sup>1</sup> Ver la Serie Cuadernos de Evaluación. Pruebas Comprender de Matemáticas. Evaluación de la comprensión y el aprendizaje. Grados 5° y 9°. Guía de orientación para profesores. Alcaldía Mayor de Bogotá. 2005.

<sup>2</sup> El concepto de red de representación es desarrollado por Hiebert y colaboradores en la Teoría del procesamiento de la información. Según este autor, para que un sujeto comprenda matemáticas requiere poner en relación las representaciones externas e internas del objeto matemático que están a su disposición.

con la faceta antropológica como “correspondencia entre los significados personales e institucionales”. Significados personales que están estrechamente vinculados con el sentido, un para qué: una intencionalidad de la actuación matemática en el contexto escolar.

En síntesis, la comprensión matemática es la significación que un individuo le atribuye a un objeto matemático (conocimiento matemático) mediante representaciones internas (conceptos o redes de conceptos) y representaciones externas (lenguaje, conjunto de símbolos culturales que manifiestan el concepto) en una situación contextual.

### La comprensión como dominio conceptual

La comprensión como dominio conceptual se entiende como la actividad cognitiva de transformación o ampliación de un campo conceptual. En la psicología cognitiva, Piaget hace uso del concepto de esquema, caracterizándolo como una totalidad dinámica organizadora de la acción, que posee plasticidad y es capaz de cambiar en función de nuevas situaciones. En este enfoque la formación de conceptos matemáticos se refleja en la manera como se modifican los esquemas cognitivos.

Para Vergnaud (1.995) - orientado por Piaget, y complementando su enfoque cognitivo con otras variables de carácter situacional y cultural-, la comprensión matemática implica el concurso de los tres componentes: a) situaciones en las que se exige el concurso del concepto, b) invariantes operatorias que tienen que ver con las funciones cognitivas, tales como inferencias, apropiaciones de acciones organizadas, generalizaciones, y c) significantes con las que la apropiación del concepto se relaciona con un conjunto variado de representaciones simbólicas que sirven como representación y como instrumentos de comunicación y apoyo al pensamiento.

Por otro lado, dentro de la psicología cognitiva, no de corte desarrollista sino basada en los sistemas de procesamiento de información, se ha enfatizado en la distinción entre los contenidos y los procesos cognitivos. Los primeros corresponden generalmente a los conceptos fundamentales de las disciplinas y los segundos a los diferentes procedimientos o heurísticas que los estudiantes siguen para constituir un concepto, aplicarlo o solucionar un problema. Dentro de este enfoque, los contenidos disciplinares se presentan cognitivamente como redes de conceptos que conforman un conocimiento estable pero susceptible de transformación, y los procesos como un conjunto de acciones organizadas de carácter cognitivo que llevan a un fin, que puede ser la constitución de un nuevo sistema conceptual.

En común, en todos estos enfoques la comprensión matemática se concibe como la constitución de conceptos en relación con otros conceptos -una red de conceptos-, vinculados con una serie de operaciones o procesos cognitivos, en condiciones situacionales que le dan significación. Las condiciones situacionales están relacionadas estructuralmente con las etapas de desarrollo del niño y funcionalmente con los diferentes contextos y características de una situación. Además, el conjunto de representaciones mentales internas, redes de conceptos, se relaciona con las diferentes representaciones simbólicas externas - lenguaje verbal, íconos, símbolos matemáticos, lenguajes informáticos- como manifestación del pensamiento matemático o como instrumento de su desarrollo.

En síntesis, la comprensión matemática está ligada a la manera como se constituyen conceptos o redes conceptuales, vinculados a una serie de procesos cognitivos (conocimientos declarativos y procedimentales / representaciones mentales y procesos cognitivos que actúan sobre esas representaciones), en relación

con representaciones simbólicas externas y en diferentes situaciones contextuales.

Dentro del contexto de la prueba, la comprensión matemática se concibe como el acto cognitivo de significación mediante la constitución de redes conceptuales que representan internamente un objeto matemático, y representaciones simbólicas externas en situaciones contextuales específicas. La prueba se ubica en un enfoque semiótico y cognitivo de la educación y comprensión matemática.

## 1.2 Dimensiones del pensamiento matemático

Dentro de los Lineamientos Curriculares se han propuesto cinco dimensiones del pensamiento matemático: 1. El numérico, 2. El variacional y los sistemas algebraicos, 3. El geométrico-espacial, 4. El métrico, y 5. El aleatorio y los sistemas de datos. Dentro de todas ellas, la del pensamiento aleatorio es una de las que menos atención curricular y didáctica se le ha prestado, sin embargo los niños y jóvenes cada día se enfrentan a diferentes situaciones naturales y sociales que requieren de su concurso. Por ello, el pensamiento aleatorio se escogió como uno de los campos prioritarios para su evaluación y desarrollo pedagógico.

## 1.3 Evaluación del pensamiento aleatorio

### Pensamiento aleatorio<sup>3</sup>

Desde muy pequeños, los niños están inmersos en experiencias relacionadas con cantidades, distancias y operaciones aritméticas y se manifiestan, en general, en acciones sobre

objetos físicos reversibles. Sin embargo, aunque las experiencias vinculadas a lo aleatorio son frecuentes en la vida cotidiana, una rifa, el día que lloverá, la posibilidad de encontrar boleto para esa película, etc., el dominio conceptual no llega tempranamente, ya que no se pueden manipular estos fenómenos para producir un resultado seguro, ni devolver los objetos a su estado inicial deshaciendo la operación. Según Piaget, esta falta de reversibilidad de los experimentos aleatorios influye en el desarrollo tardío de los conceptos matemáticos relacionados con aleatoriedad.

Piaget e Inhelder (1975) argumentan que la comprensión del azar por parte del niño es complementaria a la de la relación causa-efecto. Conciben el azar como resultado de la actuación conjunta de una serie de causas, que actuando independientemente producirían un resultado inesperado. En este sentido, hasta que el niño no comprende la idea de causa, no tiene base conceptual para identificar los fenómenos aleatorios. El azar habría que considerarlo como complementario a la composición lógica de operaciones reversibles y requiere como elemento necesario, pero no suficiente, un razonamiento combinatorio para poder concebir distintas posibilidades de ocurrencia de un suceso.

En el periodo de las operaciones concretas, con la adquisición de esquemas operacionales espacio-temporales y lógico-matemáticos, el niño alcanza la capacidad para distinguir entre el azar y lo deducible, aunque esta comprensión no es completa, puesto que el pensamiento está todavía muy ligado al nivel concreto, y no a las condiciones de razonamiento abstracto y combinatorio. No obstante, comienza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles, y la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. En el periodo de las operaciones formales el conjunto de posibilidades puede determinarse

<sup>3</sup> Ver la Serie Cuadernos de Evaluación. Pruebas Comprender de Matemáticas. Evaluación de la comprensión y el aprendizaje. Grados 5° y 9°. Guía de orientación para profesores. Alcaldía Mayor de Bogotá, 2005.

mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. Así aparece la idea de probabilidad expresada por la razón entre las posibilidades de un caso particular y del conjunto de posibilidades. Por tanto, la idea de probabilidad no puede ser totalmente adquirida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio y se generen las condiciones lógicas formales que permiten el ejercicio de la probabilidad lógica y objetiva, en la etapa de las operaciones formales.

Fischbein, en un enfoque diferente al de Piaget, se preocupó por demostrar que los niños tienen intuiciones sobre fenómenos aleatorios y analizó el efecto de la enseñanza para mejorarlas. Las intuiciones son procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales, inmediatas, globales, autoevidentes, se relacionan entre sí estructuralmente y tiene capacidad extrapolatoria. Fischbein diferencia entre intuiciones primarias y secundarias: las primarias se adquieren directamente con la experiencia, sin necesidad de ninguna enseñanza sistemática, por ejemplo admitir que al lanzar un dado

todas las caras tienen la misma probabilidad de salir. Las secundarias se forman como consecuencia de la enseñanza, principalmente en la escuela, tales como trazar diagramas de árboles para resolver combinatorias.

### Evaluación del pensamiento aleatorio

Dentro del contexto de la prueba, el pensamiento aleatorio hace alusión a la capacidad de niños y jóvenes para construir significados mediante la generación de conceptos y procesos cognitivos, en relación con un conjunto de símbolos que representan los objetos matemáticos, y frente a una serie de sucesos posibles dentro de diferentes contextos, que les permita:

- Diferenciar entre sucesos deterministas y aleatorios.
- Realizar combinatorias entre diferentes elementos para definir sucesos de un espacio muestral.
- Estimar la probabilidad de ocurrencia de sucesos.
- Interpretar sistemas de datos<sup>4</sup> que describen diferentes fenómenos naturales o sociales.

Tabla 1.1. Estructura de la prueba para grado quinto

Conceptos	Procesos Cognitivos	Situaciones	Representaciones simbólicas
<b>Azar</b>	Reversibilidad. Causalidad (múltiples factores combinados). Proporcionalidad. Heurísticas.	Diferenciar entre sucesos deterministas y aleatorios.	Textos y gráficas.
<b>Combinatoria</b>	Asociaciones. Análogos. Categorización.	Relacionar objetos mediante asociaciones para formar combinatorias de elementos que cumplan una condición.	Textos y gráficas.
<b>Estimación</b>	Asociaciones. Proporcionalidad.	Estimar cualitativamente la ocurrencia de sucesos.	Textos y gráficas.
<b>Distribución</b>	Inferencias. Clasificación. Interpretación. Modelizaciones sencillas.	Interpretación de datos presentados gráficamente.	Textos y gráficas.

<sup>4</sup> La interpretación de sistemas de datos tiene mayor relación con la estadística descriptiva o inferencial que con la probabilidad, sin embargo la estimación probabilística de un suceso o la probabilidad de ocurrencia de una hipótesis es fundamental para realizar análisis de datos estadísticos. El (causal) la información que se capta de un fenómeno. La estadística, en general, trabaja con evidencia cuantitativa no con información completa y por ello la probabilidad es un instrumento matemático fundamental.

Tabla 1.2. Estructura de la prueba para grado noveno

Conceptos	Procesos Cognitivos	Situaciones	Representaciones simbólicas
Azar	Deducción. Planteamiento de hipótesis. Proporcionalidad. Heurísticas.	Diferenciar entre sucesos deterministas y aleatorios.	Textos y gráficas.
Combinatoria	Asociaciones. Análogos.	Relacionar objetos mediante asociaciones, diagramas de árbol y categorizaciones.	Textos y gráficas.
Estimación	Asociaciones. Deducción. Proporcionalidad.	Estimar cuantitativamente la ocurrencia de sucesos cuyo espacio muestral surja de procesos combinatorios.	Textos y gráficas.
Distribución	Inferencias. Clasificación. Interpretación. Modelización.	Interpretación de datos presentados numérica y gráficamente.	Textos y gráficas.

Cuando evaluamos el pensamiento aleatorio, de acuerdo al enfoque acogido como guía para el diseño de la prueba, debemos hacernos preguntas sobre ¿qué conceptos o redes de conceptos evaluamos?, ¿qué procesos cognitivos subyacen a la constitución de estos conceptos?, ¿en qué situaciones problema se generan? y ¿en qué formato textual o lingüístico se presenta la situación problema?. De acuerdo a esto se organiza una estructura que origina una serie de ítems de prueba presentada en las tablas 1.1 y 1.2.

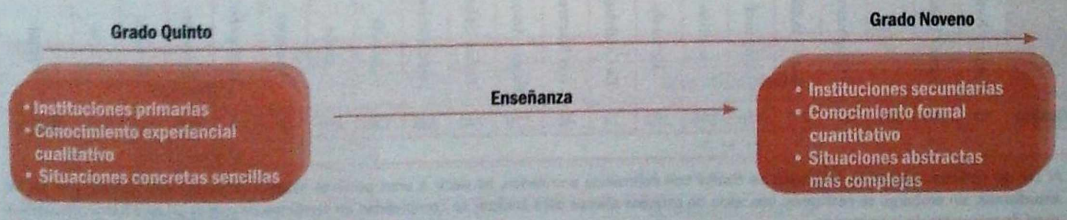
### Niveles de complejidad de la prueba

La diferencia entre los grados quinto y noveno está dada por la complejidad de los

problemas, siguiendo a Piaget y a Fischbein en sus niveles de abstracción, el nivel de formalización del problema dado por la exigencia de un tratamiento cuantitativo o cualitativo y, en especial, por la exigencia de habilidades matemáticas ligadas a lo intuitivo primario o a intuiciones secundarias, más elaboradas, al hacer uso de un conocimiento formal matemático. Mientras que en el grado quinto los problemas podrían ser resueltos principalmente con un conocimiento surgido de la experiencia cotidiana y cultural de los niños, en el grado noveno hay mayores exigencias de un conocimiento derivado de la formalización de lo matemático a través de la enseñanza.

Gráfica 1.1

Niveles de complejidad de la prueba



## 2. Análisis de resultados de la prueba del pensamiento aleatorio Grado 5°

Las pruebas *Comprender de pensamiento aleatorio* se proponen identificar y describir los grados de comprensión que tienen los niños de quinto sobre fenómenos aleatorios en relación con cuatro conceptos fundamentales: azar, combinatoria, estimación probabilística y distribución.

Para cada uno de los conceptos se propone un criterio<sup>5</sup> finalidad que sería deseable de alcanzar en los estudiantes. Los resultados de la prueba nos proporcionan información con respecto a:

1. Las capacidades que tienen los estudiantes para distinguir eventos azarosos de eventos deterministas o deducibles (azar).
2. La capacidad que tienen los alumnos para generar procedimientos combinatorios como condición para la definición de espacios muestrales y la realización de estimaciones probabilísticas (combinatoria).
3. La capacidad que tienen los educandos de realizar estimaciones probabilísticas fundamentadas en la probabilidad subjetiva y empírica (estimación probabilística).
4. La capacidad que tienen los escolares para interpretar datos representados gráficamente en términos de distribución de poblaciones según alguna variable (distribución).

El análisis de los grados de comprensión de los fenómenos aleatorios se realiza:

- En relación con los desempeños generales de la población en la prueba y en cada una de las categorías: Azar, combinatoria, estimación probabilística y distribución.
- En relación con los desempeños en la prueba según localidades, sectores, estratos y jornadas.
- En relación con las asociaciones entre los desempeños en la prueba en general y algunas variables de capital cultural.

### 2.1 Muestra

En la presentación de la prueba participaron 3.835 niños de quinto grado de diferentes localidades, sectores, jornadas y estratos sociales.

La población se distribuye en 20 localidades (tabla 2.1). La localidad donde se presentaron mayor cantidad de niños fue la de Suba con 450, y la menor fue la de Sumapaz con 2 estudiantes. Para el total de la muestra, se analizan los datos por desempeños generales y por categoría. Por localidad, sólo los desempeños generales.

Tabla 2.1. Distribución de la población por localidad

	LOCALIDAD																			Total	
	Antonio Nariño	Barríos Unidos	Bosa	Chapinero	Ciudad Bolívar	Engativá	Fontibón	Kennedy	La Candelaria	Los Mártires	Puente Aranda	Rafael Uribe	Sun Cristóbal	Santafé	Suba	Sumapaz	Tenuesquillo	Tunjuelito	Usaquén		Urmé
Conteo	94	116	281	67	277	426	196	392	74	41	170	240	228	120	450	2	78	128	238	217	3.835

<sup>5</sup> Al ser de carácter educativo, la prueba se diseña con referencia a criterios, es decir a unas posibles metas que serían deseables lograr en los estudiantes, sin embargo se realizaron una serie de pruebas pilotos para analizar su complejidad en términos de que la prueba fuera adecuada al nivel de respuesta de la población.

Tabla 2.2. Distribución de la población por sector

	SECTOR				Total
	No Oficial	No Oficial Convenio	Oficial Distrital	Oficial Distrital Concesión	
Conteo	1.601	639	1.374	221	3.835

Tabla 2.3. Distribución de la población por jornada

	JORNADA			Total
	Mañana	Tarde	Unica	
Conteo	997	637	2.201	3.835

Tabla 2.4. Distribución de la población por estrato socioeconómico

	ESTRATO SOCIOECONÓMICO							Total
	Estrato 1	Estrato 2	Estrato 3	Estrato 4	Estrato 5	Estrato 6	Ns/Nr	
Conteo	304	1.056	986	219	41	6	33	2.645

La población se distribuye en cuatro sectores (tabla 2.2). La mayor cantidad se ubica en el sector oficial distrital y en el sector no oficial, la menor cantidad en el sector oficial distrital por concesión. Se analizan los desempeños generales en la prueba para cada sector.

La población se distribuye en tres jornadas (tabla 2.3). La mayor cantidad se ubica en la jornada única y la menor en la tarde. Para cada sector se analizan desempeños generales en la prueba.

En los datos sobre estrato social, no se reporta la totalidad de la población evaluada (tabla 2.4). La mayoría de los estudiantes se ubica en los estratos 2 y 3 (2.042). Se reportan muy pocos alumnos en los estratos 5 y 6 (47). Dadas las diferencias de educandos ubicados en los diferentes estratos, no se justifica un análisis detallado de los comportamientos de los resultados por estrato, sin embargo posteriormente se realiza el análisis de significancia con respecto a la diferencia entre los desempeños.

Cada subcategoría poblacional (localidades, estratos, jornadas, sectores) tiene diferente número de estudiantes, y en cada uno se llevaron a cabo muestreos no aleatorios. Se realizaron pruebas (ANOVA y t) para analizar si existían o no diferencias significativas entre pares de grupos e intergrupos con el fin de obtener datos que sugieran posibles factores.

## 2.2 Desempeños generales para la totalidad de la población

La prueba de quinto grado, compuesta por 24 ítems, intentaba valorar los desempeños de los estudiantes en diferentes problemas relacionados con el pensamiento aleatorio. La distribución de los ítems por cada una de las categorías se realizó como se señala en la tabla 2.5.

El menor número de ítems correspondió a procesos combinatorios que si bien son una

Tabla 2.5. Distribución de ítems por categoría

Conceptos	Ítems de la prueba
Azar	1, 2, 3, 4, 5
Combinatoria	6, 14, 15
Estimación probabilística	7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17
Distribución	18, 19, 20, 21, 22, 23, 24

Tabla 2.6. Frecuencia de respuestas correctas y porcentaje

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado	
Validas	1	10	0,3	0,3
	2	25	0,7	0,9
	3	56	1,5	2,4
	4	88	2,3	4,7
	5	139	3,6	8,3
	6	209	5,4	13,7
	7	217	5,7	19,4
	8	297	7,7	27,1
	9	330	8,6	35,7
	10	334	8,7	44,5
	11	347	9,0	53,5
	12	343	8,9	62,5
	13	323	8,4	70,9
	14	286	7,5	78,3
	15	220	5,7	84,1
	16	198	5,2	89,2
	17	166	4,3	93,6
	18	119	3,1	96,7
	19	56	1,5	98,1
	20	35	0,9	99,0
	21	19	0,5	99,5
	22	15	0,4	99,9
	23	3	0,1	100,0
<b>Total</b>	<b>3.835</b>	<b>100,0</b>		

condición necesaria para la estimación probabilística, no valoran con exactitud habilidades de razonamiento aleatorio, y corresponden más a procesos sistemáticos de identificación de posibles casos de un espacio muestral. La mayor cantidad de ítems correspondió a la estimación probabilística, uno de los indicadores más representativos del pensamiento aleatorio.

El número máximo de respuestas correctas fue de 23, obtenido por 3 estudiantes, el número mínimo de respuestas correctas fue 1, obtenido por 10 educandos, (tabla 2.6).

Once fue el número de respuestas correctas con mayor frecuencia (347 estudiantes). El promedio obtenido por los participantes es de 11,18 con una desviación estándar relativamente alta de 4,082, que indica la existencia de una variabilidad alta en las capacidades de respuesta de los alumnos, lo que a su vez señala la alta capacidad discriminatoria de la prueba (tabla 2.7).

Tabla 2.7. Promedio y desviación estándar de respuestas correctas

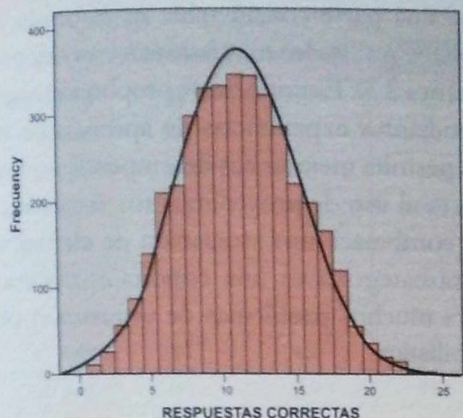
Promedio	11,18
Moda	11
Desviación estándar	4,082
Varianza	16,662

La distribución de la población se asemeja a una distribución normal, lo cual indica que una considerable parte de la población se ubica en rendimientos medios, entre 7 y 15, y que una pequeña parte obtiene puntajes mínimos y máximos, menores de 3 y mayores de 19 (gráfica 2.1).

La distribución aproximadamente normal de la población indica que los estudiantes en general poseen una capacidad y conocimiento promedio en pensamiento aleatorio que podría ser potenciado por los sistemas de enseñanza. Se presenta aproximadamente un 44% de la población con rendimientos me-

Gráfica 2.1.

Distribución de la población por respuestas correctas.



nores que el promedio, lo que lleva a concluir, que basándose en habilidades ya existentes, se requiere de la labor de la enseñanza.

### 2.3 Desempeños para cada categoría para la totalidad de la población

La prueba contenía ítems correspondientes a cuatro categorías: *azar*, *combinatoria*, *estimación probabilística* y *distribución*. Para cada una de ellas se analizan los desempeños obtenidos por toda la población.

#### 2.3.1 Azar

A la categoría de *azar* le correspondían 5 ítems cuyo fin era indagar por la capacidad de los estudiantes para distinguir situaciones azaras de situaciones deterministas. El puntaje máximo era 5 y el mínimo 0.

El número mínimo de respuestas fue de 0 obtenido por 213 estudiantes y el máximo 5 obtenido por 252 alumnos. Tres respuestas correctas obtienen 1.089 educandos que constituye la mayor frecuencia de respuesta (tabla 2.8).

El promedio obtenido fue de 2.63 correspondiente a un desempeño medio con

respecto a esta habilidad. Un 44,3% obtiene 2 o menos (tabla 2.9).

La distribución de los resultados se sesga hacia la izquierda, lo que indica que una parte considerable de la población (44%) obtiene resultados relativamente bajos en esta categoría (gráfica 2.2). Es importante proporcionar

Tabla 2.8. Frecuencia de respuestas correctas y porcentaje con respecto a la categoría azar

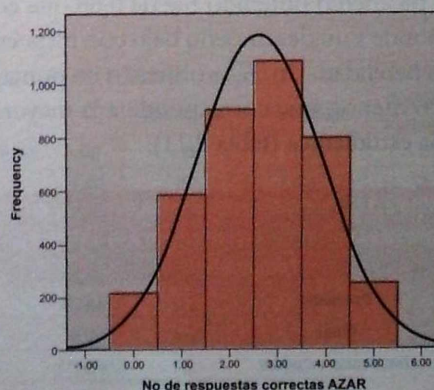
Respuestas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado	
Valid	,00	213	5,6	5,6
	1,00	581	15,1	20,7
	2,00	906	23,6	44,3
	3,00	1089	28,4	72,7
	4,00	794	20,7	93,4
	5,00	252	6,6	100,0
Total	3.835	100,0		

Tabla 2.9. Promedio y desviación estándar de respuestas correctas con respecto a la categoría azar

Promedio	2,6326
Moda	3,00
Desviación estándar	1,29516
Varianza	1,677

Gráfica 2.2.

Distribución de la población por respuestas correctas en la categoría azar



a los estudiantes experiencias de aprendizaje que les permita mejorar sus desempeños con respecto a la distinción entre lo azaroso y lo determinado.

### 2.3.2 Combinatoria

A la *categoría de combinatoria* le correspondían 3 ítems, que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para generar procesos sistemáticos de combinación entre elementos para identificar un espacio muestral o de ocurrencias. El puntaje máximo era 3 y el mínimo 0 (tabla 2.10).

**Tabla 2.10. Frecuencia de respuestas correctas y porcentaje con respecto a la categoría combinatoria**

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado	
Valida	0,00	1.335	34,8	34,8
	1,00	1.653	43,1	77,9
	2,00	810	21,1	99,0
	3,00	37	1,0	100,0
<b>Total</b>	<b>3.835</b>	<b>100,0</b>		

El número mínimo de respuestas fue de 0 obtenido por 1.335 estudiantes y el máximo 3 obtenido por sólo 37 estudiantes. Una respuesta correcta fue obtenida por 1.653 estudiantes que se constituyó la mayor frecuencia de respuesta.

El promedio obtenido fue de 0.88 que corresponde a un desempeño bajo con respecto a esta habilidad. Un 99% obtienen un puntaje de 2 o menos, que corresponde a la mayoría de los estudiantes (tabla 2.11).

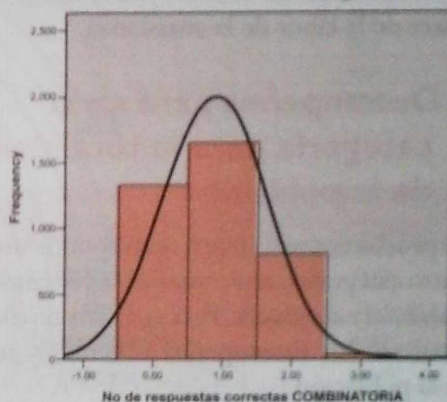
**Tabla 2.11. Promedio y desviación estándar de respuestas correctas con respecto a la categoría combinatoria**

<b>Promedio</b>	0,8824
<b>Moda</b>	1,00
<b>Desviación estándar</b>	0,76435
<b>Varianza</b>	0,584

La distribución de los resultados se sesga radicalmente hacia la izquierda lo que indica que una parte considerable de la población obtiene resultados muy bajos en esta categoría (gráfica 2.3). Es importante proporcionar a los estudiantes experiencias de aprendizaje que les permita mejorar sus desempeños con respecto al uso de procedimientos sistemáticos de combinación o asociación de elementos. Esta categoría es una condición necesaria para muchos problemas de estimación probabilística.

**Gráfica 2.3.**

**Distribución de la población por respuestas correctas en la categoría combinatoria**



### 2.3.3 Estimación probabilística

A la *categoría de estimación probabilística* le correspondían 9 ítems que se proponían indagar por la capacidad de los estudiantes para estimar la probabilidad de un suceso. El puntaje máximo era 9 y el mínimo 0.

El número mínimo de respuestas fue de 0 obtenido por 42 alumnos y el máximo 9 fue logrado por 30 estudiantes. Cuatro respuestas correctas obtuvieron 842 alumnos, que constituyeron la mayor frecuencia (tabla 2.12).

**Tabla 2.12. Frecuencia de respuestas correctas y porcentaje con respecto a la categoría estimación probabilística**

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Valida	0,00	42	1,1	1,1
	1,00	229	6,0	7,1
	2,00	504	13,1	20,2
	3,00	752	19,6	39,8
	4,00	842	22,0	61,8
	5,00	650	16,9	78,7
	6,00	419	10,9	89,6
	7,00	257	6,7	96,3
	8,00	110	2,9	99,2
	9,00	30	,8	100,0
	Total	3.835	100,0	

El promedio obtenido fue de 4.63, correspondiente a un desempeño medio con respecto a esta habilidad. Un 61.8% obtienen un puntaje de 4 o menos (tabla 2.13).

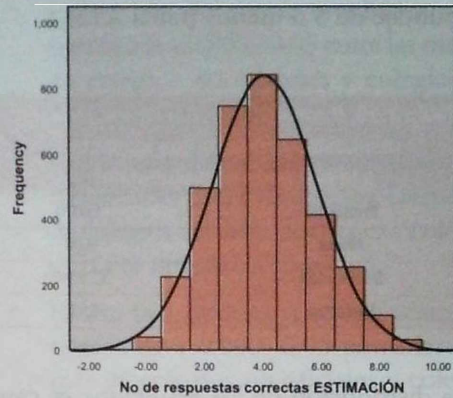
**Tabla 2.13. Promedio y desviación estándar de respuestas correctas con respecto a la categoría estimación probabilística**

Promedio	4,0610
Moda	4,00
Desviación	1,81541
Varianza	3,296

La distribución de los resultados se sesga hacia la izquierda, lo que indica que una parte considerable de la población (61.8%) obtiene resultados relativamente bajos en esta categoría. De la misma manera se observa que un porcentaje relativamente alto de estudiantes (38.2%) logra buenos desempeños (gráfica 2.4). Es muy importante proporcionar a los alumnos experiencias de aprendizaje que les permita mejorar sus desempeños con respecto a la estimación probabilística de diferentes sucesos.

**Gráfica 2.4.**

**Distribución de la población por respuestas correctas en la categoría estimación probabilística.**



### 2.3.4 Distribución

A la categoría de distribución le correspondían 7 ítems cuyo fin era indagar por la capacidad de los estudiantes para interpretar sistemas de datos numéricos y gráficos que presentan distribución de poblaciones. El puntaje máximo era 7 y el mínimo 0.

El número mínimo de respuestas fue de 0 obtenido por 128 alumnos y el máximo 7 alcanzado por 142 estudiantes. Cuatro respuestas correctas obtienen 789 escolares que constituyen la mayor frecuencia de respuesta (tabla 2.14).

**Tabla 2.14. Frecuencia de respuestas correctas y porcentaje con respecto a la categoría de distribución**

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Valid	,00	128	3,3	3,3
	1,00	359	9,4	12,7
	2,00	570	14,9	27,6
	3,00	734	19,1	46,7
	4,00	789	20,6	67,3
	5,00	719	18,7	86,0
	6,00	394	10,3	96,3
	7,00	142	3,7	100,0
	Total	3.835	100,0	

El promedio obtenido fue de 3.6 correspondiente a un desempeño medio alto con respecto a esta habilidad. Un 46.7 % obtiene un puntaje de 3 o menos (tabla 2.15).

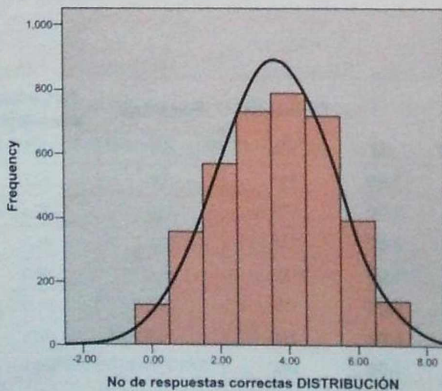
**Tabla 2.15. Promedio y desviación estándar de respuestas correctas con respecto a la categoría de distribución**

<b>Promedio</b>	3,6010
<b>Moda</b>	4,00
<b>Desviación</b>	1,71340
<b>Varianza</b>	2,936

La distribución de los resultados se carga relativamente hacia la izquierda, lo que indica que una parte de la población 46,7% obtiene resultados relativamente bajos. De la misma manera se observa que un porcentaje relativamente alto de estudiantes obtiene buenos desempeños (gráfica 2.5). A pesar de estos resultados adecuados, es importante proporcionar a los estudiantes experiencias de aprendizaje que les permita mejorar sus desempeños con respecto a la interpretación de datos gráficos y numéricos en distribuciones de poblaciones.

**Gráfica 2.5.**

Distribución de la población por respuestas correctas en la categoría de distribución.



## 2.4 Desempeños según categorías

Los desempeños en las diferentes categorías se dieron diferenciados encontrándose mejores resultados en cuanto a azar y distribución que en las categorías de estimación probabilística y combinatoria.

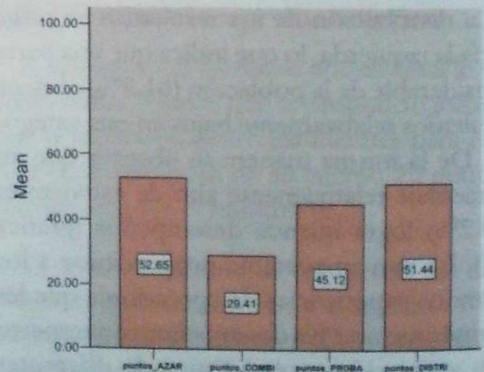
La categoría más crítica en su rendimiento está relacionada con procesos combinatorios, lo cual implica que los sistemas de enseñanza deben favorecer el desarrollo de esta habilidad (tabla 2.16). Aunque los rendimientos en las otras tres categorías se comportan acercándose a un nivel de realización del 50%, es muy importante desde el punto de vista educativo, favorecer el desarrollo de habilidades relacionadas con azar, estimación probabilística y distribución (gráfica 2.6).

**Tabla 2.16. Porcentaje de acierto (promedio) en las diferentes categorías**

	AZAR	COMBINATORIA	ESTIMACION	DISTRIBUCION
<b>Promedio puntuado en porcentaje</b>	52,65	29,41	45,12	51,44

**Gráfica 2.6.**

Porcentaje de acierto (promedio) en las diferentes categorías.



## 2.5. Desempeños generales según sectores

Los sectores presentan puntajes entre 12,59 y 9,26 para un promedio de 11,18 para la población total. Llama la atención el promedio más elevado del sector No oficial (12,59), con 1.601 estudiantes, y el promedio menor (9,26) del sector Oficial Distrital en Concesión, con 221 educandos (tabla 2.17).

Tabla 2.17. Puntajes y desviación típica por sectores

Sector	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
No Oficial	1.601	12,59	3,90	23,00	1,00
No Oficial Convenio	639	10,89	3,83	23,00	1,00
Oficial Distrital	1.374	9,97	3,91	21,00	1,00
Oficial Distrital Concesión	221	9,26	3,81	19,00	1,00

Se realizó una prueba de significancia estadística ANOVA entre las medias de los diferentes sectores a un nivel de confianza del 95%. Posteriormente, se analizaron las significancias entre cada uno de los sectores, por pares, en un nivel de confianza del 95%, utilizando una prueba t.

### ANOVA entre todos los sectores

Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre los valores de las medias de la variable "sector" entre sus grupos. La prueba de significancia nos dice que existen factores relacionados con el sector que podrían estar influyendo, en alguna medida, en el desempeño de los niños en la prueba de pensamiento aleatorio.

### T entre sectores

Se encontró entre los pares de sectores que:

- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de colegios no oficiales y colegios no oficiales convenio.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.011 < 0.05$  entre las medias de colegios oficiales distritales y colegios oficiales distritales convenio.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de colegios no oficiales y colegios oficiales distritales.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de colegios no oficiales convenio y colegios oficiales concesión.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de colegios no oficiales y colegios oficiales distritales concesión.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de colegios no oficiales convenio y colegios oficiales distritales.

Los cuatro grupos de la variable sector tienen una diferencia significativa entre sus medias, lo cual permite afirmar que hay factores relacionados con los sectores que tienen alguna influencia en los desempeños en la prueba de pensamiento aleatorio. Sin embargo, según el tamaño de las poblaciones llaman la atención la diferencias entre las medias, (2,61531), entre el sector no oficial, media de 12,59, con 1601 estudiantes y el oficial distrital, media de 9,97, con 1374 alumnos. Habría que indagar sobre algunos factores relacionados con el sector en especial en estos grupos para explicar las diferencias de desempeño en la prueba.

## 2.6. Desempeños generales según jornadas

Las jornadas presentan puntajes entre 9.54 y 11.85 para un promedio de 11.18 para la población total. Llamen la atención las diferencias de promedio entre las medias de los tres grupos, en especial entre la jornada tarde y la única (tabla 2.18).

**Tabla 2.18 Puntajes y desviación típica por jornadas**

Jornada	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
<b>Mañana</b>	997	10,75	4,00	23,00	1,00
<b>Tarde</b>	637	9,54	3,73	20,00	1,00
<b>Única</b>	2.201	11,85	4,05	23,00	1,00

Se realizó una prueba de significancia estadística ANOVA entre las medias de las diferentes jornadas a un nivel de confianza del 95%. Posteriormente, se analizaron las significancias entre cada uno de las jornadas, por pares, en un nivel de confianza del 95%, utilizando una prueba t.

### ANOVA entre todas las jornadas

Se puede afirmar que existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre los valores de las medias de la variable “jornada” entre los grupos. La prueba de significancia nos indica la existencia de factores relacionados con la jornada que podrían estar influyendo, en alguna medida, en el desempeño de los niños en la prueba de pensamiento aleatorio.

### T entre jornadas

Se encontró entre pares de jornadas que:

- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de jornada mañana y jornada tarde.

- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de jornada mañana y jornada única.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de jornada tarde y jornada única.

Llamen la atención las diferencias entre las medias (2.31) de la jornada tarde con media de 9,54 y la única con media de 11,85. Habría que indagar por algunos factores relacionados con la jornada, en especial, en estos grupos para explicar las diferencias de desempeño en la prueba.

## 2.7 Desempeños generales según estratos

Los datos reportados para la población total clasificada en estratos fue de 2.612 alumnos y 33 no se ubicaron en ninguno (tabla 2.19). La media de los 2.612 estudiantes fue de 12.34, un poco más elevada que para la población total. Llama la atención el promedio más elevado del estrato 6 (16.17) con 6 alumnos y el promedio menor (9.19) del estrato 1 con 304 educandos. Se observa que a medida que se eleva el estrato los puntajes son mejores. Sin embargo, debe tenerse en cuenta las diferencia poblacional concentrada principalmente en los estratos 2 y 3, que no permitiría hacer un análisis comparativo más detallado.

**Tabla 2.19 Puntajes y desviación típica por estratos**

Estrato	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento (2.612)	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
<b>1</b>	304	9,19	3,61	19,00	2,00
<b>2</b>	1.056	10,36	3,86	22,00	1,00
<b>3</b>	986	12,10	4,02	22,00	1,00
<b>4</b>	219	13,12	3,83	22,00	3,00
<b>5</b>	41	13,15	4,43	23,00	4,00
<b>6</b>	6	16,17	2,93	19,00	12,00

Se realizó una prueba de significancia estadística ANOVA entre las medias de los diferentes estratos a un nivel de confianza del 95%. Posteriormente, se analizaron las significancias entre algunos pares de estratos, en un nivel de confianza del 95%, utilizando una prueba t para encontrar si existía alguna diferencia sensible entre los estratos.

### ANOVA entre estratos

Se puede afirmar que existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre los valores de las medias de la variable “estrato” entre los grupos. La prueba de significancia nos dice que existen factores relacionados con el estrato que podrían estar influyendo, en alguna medida, con el desempeño de los niños en la prueba de pensamiento aleatorio.

### T entre estratos

Se encontró entre pares de estratos qué:

- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre los valores nominales de estratos 1 y 2.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.001 < 0.05$  entre los valores nominales de estratos 3 y 4.
- No existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.114 > 0.05$  entre los valores nominales de estratos 5 y 6.
- No existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.973 > 0.05$  entre los valores nominales de estratos 4 y 5.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre los valores nominales de estratos 3 y 2.

- No existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.105 > 0.05$  entre los valores nominales de estratos 5 y 3.

Los seis grupos de la variable estrato tienen una diferencia significativa, lo cual sugiere la existencia de factores relacionados con el estrato que tienen alguna influencia en los desempeños en la prueba de pensamiento aleatorio. Las diferencias significativas estadísticamente se encuentran comparando, por ejemplo, los estratos 1 y 2, 2 y 3, y 3 y 4 pero no se hallaron diferencias significativas cuando se comparan estratos 4 y 5, 5 y 6, y 3 y 5. Con los datos que se cuenta es posible afirmar que factores relacionados con el estrato inciden en alguna medida en el desempeño en la prueba de pensamiento aleatorio, en especial en las significaciones obtenidas comparando los estratos 1, 2 y 3; pero, no se puede afirmar lo mismo en la diferencia entre los estratos 4, 5 y 6.

## 2.8 Variables de capital cultural

Se realizaron pruebas de significancia ANOVA y t, con las variables de capital cultural “estado civil”, “número de hermanos”, “vivienda”, “ingreso promedio mensual”.

### 2.8.1 Estado civil

Los datos reportados para la población total clasificada según “estado civil” fueron de 2.617 alumnos. La media fue de 10.92, que es un poco más baja que para la población total de la prueba. Llama la atención el promedio más elevado para el estado civil de casados (11.76) con 1.179 estudiantes (tabla 2.20).

Se realizó una prueba de significancia estadística ANOVA entre las medias de los diferentes estados civiles a un nivel de

confianza del 95%. Posteriormente, se analizaron las significancias entre dos grandes grupos que podrían tener significado cultural: uno formado por alumnos que viven con sus padres (casados, unión libre), y otro con alguno de sus padres (separados), en un nivel de confianza del 95%, utilizando una prueba t (tabla 2.21).

**Tabla 2.20. Población clasificada, promedio y desviación estándar con respecto a la categoría "estado civil"**

Estado civil	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento (2.617)	Media (10.92)	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Casado	1.179	11,76	4,04	23,00	2,00
Unión libre	709	10,33	3,99	22,00	1,00
Separados	496	10,94	4,03	22,00	1,00
Viudo (a)	62	10,40	3,91	17,00	2,00
Solteros	171	11,17	4,11	22,00	2,00

**Tabla 2.21. Población clasificada, promedio y desviación estándar con relación a dos grupos de la categoría "estado civil"**

Agrupación estado civil	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Vive con los padres	1.888	11,23	4,08	23,00	1,00
Separados	496	10,94	4,03	22,00	1,00

### ANOVA para los grupos de estado civil

Se puede afirmar que existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre los valores de las medias de la variable "estado civil" entre los grupos. La prueba de significancia nos dice que existen factores relacionados con el estado civil que podrían estar influyendo, en alguna medida, con el desempeño de los niños en la prueba de pensamiento aleatorio.

### T entre grupos de estado civil

Se congregaron en dos grupos: casados y unión libre en un grupo llamado "vive con los padres" y un grupo llamado "separados".

Se encontró qué:

No existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.162 > 0.05$  entre las medias de los grupos vive con los padres y el estado civil separados.

En la prueba ANOVA, entre todos los grupos de estado civil se encuentra una diferencia significativa, sin embargo no la hubo en la prueba t entre las dos agrupaciones "vive con los padres" y "separados". Esto nos permite afirmar que factores relacionados con vivir o no con los padres, no son estadísticamente significativos.

### 2.8.2 Número de hermanos

Los datos reportados para la población total clasificada según "Número de hermanos" fueron de 2.620 alumnos. La media fue de 10.89, un poco más baja que para la población total que presentó la prueba. Llamen la atención los promedios más elevados para 1 o ningún hermano (tabla 2.22).

**Tabla 2.22. Población clasificada, promedio y desviación estándar con respecto a la categoría "número de hermanos"**

Número de hermanos del estudiante	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento (2.620)	Media (10.89)	Desviación típica	Máximo	Mínimo
1	1.101	11,44	4,05	22,00	1,00
2 - 3	977	10,86	3,97	22,00	1,00
4 - 5	194	10,32	4,31	23,00	1,00
Más de 6	48	9,98	3,99	18,00	2,00
Ninguno	300	11,88	4,12	22,00	3,00

## ANOVA para Número de hermanos

Se encontró que existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de la variable número de hermanos entre sus grupos.

### T para los grupos número de hermanos

Se construyeron tres grupos: uno en el que se encuentran número de hermanos desde 2 hasta más de 6 hermanos, llamado “tiene más de un hermano” y otros dos grupos “tiene un hermano” y “no tiene hermanos”.

Se encontró que:

- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de los grupos “tiene un hermano” y el grupo “tiene más de un hermano”.
- No existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.103 > 0.05$  entre las medias de los grupos “tiene un hermano” y “no tiene hermanos”.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de los grupos “tiene más de un hermano” y “no tiene hermanos”.

Dentro de la variable “número de hermanos”, no existe una diferencia significativa entre las medias de los grupos “tiene un hermano” y “no tiene hermanos”, mientras para la combinación del resto de parejas se encuentra una diferencia significativa. Se puede afirmar que hay una diferencia significativa entre “no tener hermanos” o “tener un solo hermano” con “tener más de dos hermanos”. Podrían existir factores relacionados con el número de hermanos que inciden en alguna

medida en los desempeños de los niños en la prueba (tabla 2.23).

**Tabla 2.23. Población clasificada, promedio y desviación estándar con relación a tres grupos de la categoría “número de hermanos”**

Agrupación número de hermanos	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Tiene un hermano	1101	11,44	4,05	22,00	1,00
Tiene más de un hermano	1219	10,74	4,03	23,00	1,00
No tiene hermanos	300	11,88	4,12	22,00	3,00

### 2.8.3 Tipo de vivienda

Los datos reportados para la población total clasificada según “tipo de vivienda” fueron de 2.364 alumnos para propia o arrendada (tabla 2.24). La media de los 2.364 estudiantes fue de 11.13, muy similar a la de la población total que presentó la prueba. Llama la atención el promedio más elevado para vivienda propia (11.60) con 1.271 estudiantes.

**Tabla 2.24. Población clasificada, promedio y desviación estándar con respecto a la categoría “tipo de vivienda”**

La vivienda es:	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Propia	1.271	11,60	4,11	23,00	2,00
Arrendada	1.093	10,67	4,05	22,00	1,00

### Anova para tipo de vivienda

Se realizó una prueba de significancia estadística ANOVA entre las medias de los diferentes tipos de vivienda a un nivel de confianza del 95% y se encontró que existe una diferencia estadísticamente significativa

0,000 < 0,05 entre las medias de la variable tipo de vivienda entre los grupos propio y arrendada. Se puede afirmar que existen factores relacionados con el tipo de vivienda que pueden influir en alguna medida en los desempeños de los niños en la prueba.

### 2.8.4 Ingresos mensuales

Los datos reportados para la población total clasificada según “ingresos mensuales” fue de 2.645 alumnos. La media fue de 12,14 que es más alta que para la población total que presentó la prueba (tabla 2.25). El puntaje más alto es 13,87 que corresponde a los

75 estudiantes con mayor ingreso (10 de los 849 estudiantes de menor ingreso). Llamamos a la atención los promedios más elevados para los ingresos mayores y los promedios menores para los de menores ingresos.

Se realizó una prueba de significancia estadística ANOVA entre las medias de los diferentes ingresos a un nivel de confianza del 95%. Posteriormente, se analizaron las significancias entre tres grandes grupos: entre 0 y \$763.000, entre \$763.000 y \$2.289.000, y más de \$2.289.000, en un nivel de confianza del 95%, utilizando una prueba t (tabla 2.26).

**Tabla 2.25. Población clasificada, promedio y desviación estándar con respecto a la categoría “Ingresos mensuales”**

Ingreso promedio mensual de la familia	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento (2.645)	Media (12.14)	Desviación típica	Máximo	Mínimo
0	118	9,74	4,18	19,00	1,00
Hasta \$ 381.500	849	10,00	3,78	21,00	1,00
Entre \$ 381.500 y \$ 763.000	723	10,90	4,01	22,00	2,00
Entre \$ 763.001 y \$ 1.144.500	374	11,96	4,06	22,00	1,00
Entre \$ 1.144.501 y \$ 1.526.000	180	12,22	3,92	22,00	2,00
Entre \$ 1.526.001 y \$ 1.907.500	106	12,60	3,70	22,00	3,00
Entre \$ 1.907.501 y \$ 2.289.000	74	13,03	3,93	22,00	5,00
Entre \$ 2.289.000 y \$ 2.670.500	60	13,57	3,09	20,00	6,00
Entre \$ 2.670.501 y \$ 3.815.000	86	13,53	3,87	23,00	4,00
Más de \$ 3.815.000	75	13,87	3,94	20,00	6,00

**Tabla 2.26. Población clasificada, promedio y desviación estándar con relación a tres grupos de la categoría “Ingresos mensuales”**

Ingreso mensual por grupos	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Entre 0 y \$763.000	967	9,97	3,83	21,00	1,00
Entre \$763.001 y \$2.289.000	1383	11,49	4,04	22,00	1,00
Más \$2.289.001	220	13,37	3,68	23,00	4,00

## ANOVA para todos los grupos de ingresos promedio mensual

Se encontró que existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de la variable ingreso promedio al mes entre todos los grupos.

### T entre los grupos

Al analizar los datos entre pares de grupos se encontró qué:

- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de los grupos ingreso mensual entre 0 y \$763.000 y entre \$763.001 y \$2.289.000.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de los grupos ingreso mensual entre 0 y \$763.000 y más \$2.289.001.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de los grupos ingreso mensual entre \$763.001 y \$2.289.000, y más de \$2.289.001.

Los grupos de la variable “ingreso mensual” tienen una diferencia significativa entre sus medias, lo cual permite afirmar que hay factores relacionados con el ingreso mensual que tienen alguna influencia en los desempeños en la prueba de pensamiento aleatorio.

## 3. Análisis de resultados de la prueba de pensamiento aleatorio Grado 9°

Las pruebas *Comprender de pensamiento aleatorio* se proponen identificar y describir los grados de comprensión que tienen los jóvenes de

grado noveno sobre fenómenos aleatorios en relación con cuatro conceptos fundamentales: azar, combinatoria, estimación probabilística y distribución.

Los resultados de la prueba nos proporciona información con respecto a:

1. Las capacidades que tienen los jóvenes para distinguir eventos azarosos de eventos deterministas o deducibles (azar).
2. La capacidad que tienen los jóvenes para generar procedimientos combinatorios como condición para la definición de espacios muestrales y la realización de estimaciones probabilísticas (combinatoria).
3. La capacidad que tienen los jóvenes de realizar estimaciones probabilísticas fundamentadas en la probabilidad lógica y empírica, y con espacios muestrales calculados a partir de procedimientos combinatorios (estimación estadística).
4. La capacidad que tienen los jóvenes para interpretar descriptiva o inferencialmente datos representados gráfica o numéricamente en términos de la distribución de poblaciones (distribución).

El análisis de los grados de comprensión de los fenómenos aleatorios desde el dominio conceptual matemático se realiza:

- En relación con los desempeños generales de la población total en la prueba y en cada una de las categorías: Azar, combinatoria, estimación probabilística y distribución.
- En relación con los desempeños en la prueba en general según localidades, sectores, estratos y jornadas.
- En relación con las asociaciones entre los desempeños en la prueba en general y variables socioculturales.

### 3.1 Muestra

En la presentación de la prueba participaron 3.784 jóvenes de noveno grado de diferentes localidades, sectores, jornadas y estratos sociales.

La población se distribuye en 20 localidades. La localidad donde se presentó una mayor cantidad de jóvenes fue en Suba con 474 jóvenes y en la menor Sumapaz con 5 jóvenes (tabla 3.1). Para el total de la muestra, se analizan los datos por desempeños generales y por categoría. Por localidad, sólo se analizan desempeños generales.

La población se distribuye en cuatro sectores. La mayor cantidad se ubica en el sector oficial distrital y en el sector no oficial, la menor cantidad en el sector oficial distrital por concesión.

Se analizan los desempeños generales en la prueba para cada sector (tabla 3.2).

La población se distribuye en tres jornadas. La mayor cantidad se ubica en la jornada única y la menor en la tarde. Para cada sector se analizan desempeños generales en la prueba (tabla 3.3).

No se reporta la totalidad de la población evaluada en los datos sobre estrato social. La mayoría de los estudiantes se ubica en los estratos 2 y 3 (1673). Se reportan muy pocos alumnos en los estratos 5 y 6 (59) (tabla 3.4). Dadas las diferencias de cantidad de estudiantes ubicados en los diferentes estratos, no se justifica un análisis detallado de los comportamientos de los resultados por estrato, en especial en los extremos.

**Tabla 3.1. Distribución de la población evaluada por localidades**

	LOCALIDAD																			Total	
	Antonio Nariño	Barrios Unidos	Bosa	Chapinero	Ciudad Bolívar	Engativá	Fonduco	Kennedy	La Candelaria	Los Mártires	Puente Aranda	Rafael Uribe	San Cristóbal	Santafé	Suba	Sumapaz	Tausaquillo	Tunjuelito	Usaquén		Usme
<b>Conteo</b>	99	148	239	72	237	415	186	344	71	54	167	241	249	121	474	5	79	128	242	213	<b>3784</b>

**Tabla 3.2. Distribución de la población evaluada por sector**

	SECTOR				Total
	No Oficial	No Oficial Convenio	Oficial Distrital	Oficial Distrital Concesión	
<b>Conteo</b>	1.570	590	1.431	193	3.784

**Tabla 3.3. Distribución de la población evaluada por jornada**

	JORNADA			Total
	Mañana	Tarde	Única	
<b>Conteo</b>	1.013	646	2.125	3.784

**Tabla 3.4. Distribución de la población evaluada por estrato socioeconómico**

	ESTRATO SOCIOECONÓMICO							Total
	Estrato 1	Estrato 2	Estrato 3	Estrato 4	Estrato 5	Estrato 6	Ns/Nr	
<b>Conteo</b>	185	802	871	197	44	15	28	2.142

Dado que cada subcategoría poblacional (localidades, estratos, jornadas, sectores) tiene diferente número de estudiantes, y en cada uno no se llevaron a cabo muestreos aleatorios sino intencionales, y en cada grupo la distribución del comportamiento de datos no es necesariamente normal, se examinan los desempeños generales en la prueba sin propósitos comparativos, sin embargo se realizaron los análisis de significancia intergrupos utilizando las pruebas ANOVA y *t*, para encontrar sugerencias de posibles factores de influencia.

### 3.2. Desempeños generales para la totalidad de la población

La prueba de noveno grado estaba compuesta por 19 ítems que intentaban valorar los desempeños de los estudiantes en diferentes problemas relacionados con el pensamiento aleatorio. La distribución de los ítems por cada una de las categorías se realizó, como aparece en la tabla 3.5.

**Tabla 3.5. Distribución de ítems por categoría**

Conceptos	Ítems de la prueba
Azar	1, 6
Combinatoria	3, 8
Estimación probabilística	2, 4, 5, 7, 9
Distribución	10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

El menor número de ítems correspondió a las categorías *azar* y *procesos combinatorios* ya que se tratan como condiciones necesarias para la estimación probabilística. El ítem 13 se eliminó por un error tipográfico.

El número máximo de respuestas correctas fue de 18, obtenido por 1 estudiante, el número mínimo de respuestas correctas fue 0, obtenido por 5 alumnos (tabla 3.6).

**Tabla 3.6. Frecuencia de respuestas correctas y porcentaje**

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulativo
Valid 0	5	,1	,1
1	20	,5	,7
2	58	1,5	2,2
3	132	3,5	5,7
4	295	7,8	13,5
5	392	10,4	23,8
6	506	13,4	37,2
7	590	15,6	52,8
8	605	16,0	68,8
9	463	12,2	81,0
10	303	8,0	89,0
11	191	5,0	94,1
12	113	3,0	97,1
13	60	1,6	98,7
14	30	,8	99,4
15	12	,3	99,8
16	5	,1	99,9
17	3	,1	100,0
18	1	,0	100,0
Total	3.784	100,0	

Ocho fue el número de respuestas correctas con mayor frecuencia (605 estudiantes). El promedio obtenido por los participantes es de 7.36 con una desviación estándar relativamente alta de 2.57 que indica que existe una variabilidad alta en las capacidades de respuesta de los estudiantes, lo que a su vez señala una buena capacidad discriminadora de la prueba (tabla 3.7).

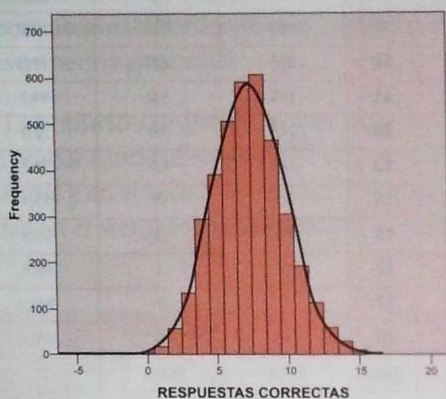
**Tabla 3.7. Promedio y desviación estándar de respuestas correctas**

Promedio	7.36
Moda	8
Desviación	2.573
Varianza	6.621

La distribución de la población se aproxima a una distribución normal, lo cual indica que una gran parte de la población se ubica en rendimientos medios, entre 5 y 10, y que una pequeña parte obtiene puntajes mínimos y máximos, menores de 3 y mayores de 16. Sin embargo, hay menos estudiantes en los extremos superiores (más de 16) que los situados en los extremos inferiores (menos de 3) (gráfica 3.1).

**Gráfica 3.1.**

**Distribución de la población por respuestas correctas.**



La distribución de la población indica que los estudiantes en general poseen una capacidad y conocimiento medio o medio bajo en pensamiento aleatorio que debe ser promovido por los sistemas de enseñanza. Se presenta aproximadamente un 51% de la población con rendimientos menores que el promedio (7.6), lo cuál indica que la labor de la enseñanza es requerida con premura para mejorar los desempeños.

### 3.3 Desempeños para cada categoría para la totalidad de la población

La prueba contenía ítems correspondientes a cuatro categorías: *azar*, *combinatoria*, *estimación*

*probabilística y distribución*. Para cada una de ellas se analizan los desempeños obtenidos por toda la población.

#### 3.3.1 Azar

A la categoría de *azar* le correspondieron 2 ítems que evaluaban la capacidad de los estudiantes para distinguir situaciones azarosas de situaciones deterministas o deducibles. El puntaje máximo era 2 y el mínimo 0.

El número mínimo de respuesta fue de 0 obtenido por 2230 estudiantes y el máximo 2 obtenido por 260 alumnos. Ninguna respuesta correcta, obtenida por 2230 estudiantes, se constituyó en la mayor frecuencia (tabla 3.8).

El promedio obtenido fue de 0.47 que corresponde a un desempeño bajo con respecto a esta habilidad. Un 58.9 % obtienen menos puntaje que el promedio (tabla 3.9).

La distribución de los resultados se sesga hacia la izquierda lo que indica que una parte considerable de la población obtiene resultados bajos en esta categoría (gráfica 3.2). Es importante proporcionar a los estudiantes experiencias de aprendizaje que les permita

**Tabla 3.8. Frecuencia de respuestas correctas y porcentaje con respecto a la categoría azar**

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Valid	0,00	2230	58,9	58,9
	1,00	1294	34,2	93,1
	2,00	260	6,9	100,0
Total		3784	100,0	

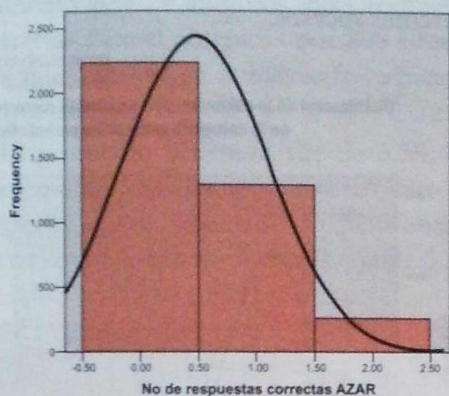
**Tabla 3.9. Promedio y desviación estándar de respuestas correctas con respecto a la categoría azar**

Promedio	0.4794
Moda	0
Desviación estándar	0.62217
Varianza	0.387

mejorar sus desempeños con respecto a la distinción entre lo azaroso y lo determinado.

Gráfica 3.2.

Distribución de la población por respuestas correctas en la categoría azar.



### 3.3.2 Combinatoria

A la categoría de combinatoria le correspondieron 2 ítems que evaluaban la capacidad de los estudiantes para generar procesos sistemáticos de combinación para identificar un espacio muestral o de ocurrencias. El puntaje máximo era 2 y el mínimo 0.

El número mínimo de respuesta fue de 0, obtenido por 2.602 estudiantes y el máximo 2, obtenido por sólo 64 estudiantes. Ninguna respuesta correcta, obtenida por 2.602 estudiantes, se constituyó en la mayor frecuencia de respuesta (tabla 3.10).

El promedio obtenido fue de 0,32, que corresponde a un desempeño muy bajo con respecto a esta habilidad. Un 68,8 % obtuvo menor puntaje que 1, que corresponde a la mayoría de los estudiantes (tabla 3.11).

La distribución de los resultados se sesga radicalmente hacia la izquierda, lo que indica que una parte considerable de la población

obtuvo resultados muy bajos en esta categoría (gráfica 3.3). Es importante proporcionar a los estudiantes experiencias de aprendizaje que les permita mejorar sus desempeños con respecto al uso de procedimientos sistemáticos de combinación. Esta categoría es una condición necesaria para muchos problemas de estimación probabilística.

Tabla 3.10. Frecuencia de respuestas correctas y porcentaje con respecto a la categoría combinatoria

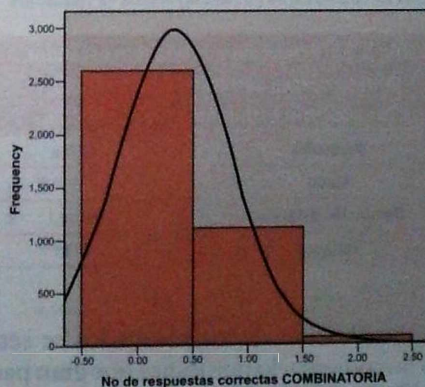
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
Valida	0,00	2.602	68,8	68,8
	1,00	1.118	29,5	98,3
	2,00	64	1,7	100,0
Total		3.784	100,0	

Tabla 3.11. Promedio y desviación estándar de respuestas correctas con respecto a la categoría combinatoria

Promedio	0.3293
Moda	0
Desviación estándar	0.50473
Varianza	0.255

Gráfica 3.3.

Distribución de la población por respuestas correctas en la categoría combinatoria.



### 3.3.3 Estimación probabilística

A la categoría de estimación probabilística le correspondieron 5 ítems que evaluaban por la capacidad de los estudiantes para estimar la probabilidad de un suceso. El puntaje máximo era 5 y el mínimo 0.

El número mínimo de respuesta fue de 0, obtenido por 926 estudiantes y el máximo de 5 fue obtenido por sólo 5 alumnos. Con una respuesta correcta se encontraron 1.627 escolares que constituyen la mayor frecuencia de respuesta (tabla 3.12).

**Tabla 3.12. Frecuencia de respuestas correctas y porcentaje con respecto a la categoría estimación probabilística**

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Valid	,00	926	24,5	24,5
	1,00	1.627	43,0	67,5
	2,00	930	24,6	92,0
	3,00	262	6,9	99,0
	4,00	34	,9	99,9
	5,00	5	,1	100,0
	Total	3.784	100,0	

El promedio obtenido fue de 1.17, que corresponde a un desempeño muy bajo con respecto a esta habilidad. Un 24.5% obtuvo menor puntaje que el promedio, lo cual corresponde aún puntaje de cero (tabla 3.13).

**Tabla 3.13. Promedio y desviación estándar de respuestas correctas con respecto a la categoría estimación probabilística**

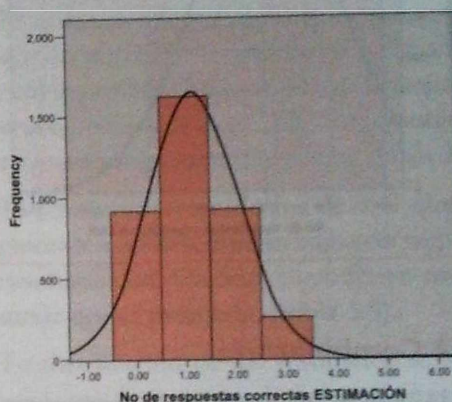
Promedio	1.1718
Moda	1
Desviación estándar	0,91661
Varianza	0.840

La distribución de los resultados se sesga hacia la izquierda, lo que indica que gran parte de la población logra resultados relativamente

bajos en esta categoría. De la misma manera, se observa que un porcentaje relativamente bajo de estudiantes obtiene buenos desempeños (gráfica 3.4). Es importante proporcionar a los alumnos experiencias de aprendizaje que les permita mejorar sus desempeños con respecto a la estimación probabilística de diferentes sucesos.

**Gráfica 3.4.**

**Distribución de la población por respuestas correctas en la categoría estimación probabilística.**



### 3.3.4 Distribución

A la categoría de distribución le correspondían 10 ítems que evaluaban la capacidad de los

**Tabla 3.14. Frecuencia de respuestas correctas y porcentaje con respecto a la categoría de distribución**

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
Valid	,00	18	,5	,5
	1,00	65	1,7	2,2
	2,00	193	5,1	7,3
	3,00	348	9,2	16,5
	4,00	549	14,5	31,0
	5,00	715	18,9	49,9
	6,00	808	21,4	71,2
	7,00	622	16,4	87,7
	8,00	324	8,6	96,2
	9,00	113	3,0	99,2
	10,00	29	,8	100,0
	Total	3.784	100,0	

estudiantes para analizar datos numéricos y gráficos que presentan distribución de poblaciones. El puntaje máximo era 10 y el mínimo 0 (tabla 3.14).

El número mínimo de respuesta fue de 0, obtenido por 18 estudiantes y el máximo 10, obtenido por 29 alumnos. Seis respuestas correctas fueron obtenidas por 808 educandos que constituyen la mayor frecuencia de respuesta.

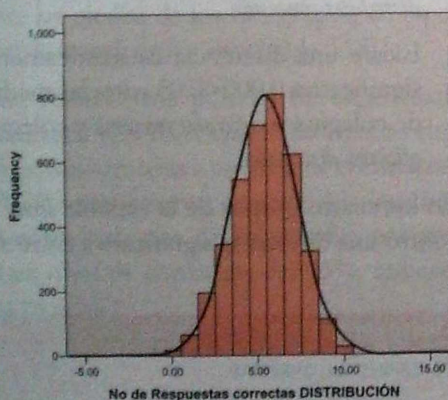
El promedio obtenido fue de 5.38, que corresponde a un desempeño medio alto con respecto a esta habilidad. Un 31% obtiene menos puntaje que el promedio (tabla 3.15).

**Tabla 3.15. Promedio y desviación estándar de respuestas correctas con respecto a la categoría de distribución**

Promedio	5.3824
Moda	6,00
Desviación estándar	1,87923
Varianza	3.532

**Gráfica 3.5.**

Distribución de la población por respuestas correctas en la categoría de distribución.



La distribución de los resultados se carga relativamente hacia la derecha, lo que indica que una gran parte de la población obtiene

resultados medios altos en esta categoría. De la misma manera se observa que un porcentaje relativamente alto de escolares obtienen buenos desempeños (gráfica 3.5). Sin embargo, es importante proporcionar a los estudiantes experiencias de aprendizaje que les permita mejorar sus desempeños con respecto a la interpretación de datos gráficos y numéricos en distribuciones de poblaciones.

### 3.4 Desempeños según categorías

Los desempeños en las diferentes categorías se dieron diferenciados, encontrándose mejores resultados en cuanto a *azar* y *distribución* que en las categorías de *estimación probabilística* y *combinatoria* (tabla 3.16).

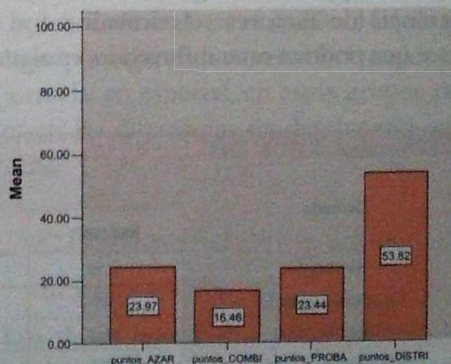
La categoría más crítica en su rendimiento esta relacionada con procesos combinatorios, lo cual implica que los sistemas de enseñanza deben prioritariamente favorecer el desarrollo

**Tabla 3.16. Porcentaje de acierto (promedio) en las diferentes categorías**

	Azar	Combinatoria	Estimación	Distribución
Promedio	23,97	16,46	23,44	53,82

**Gráfica 3.6.**

Porcentaje de acierto (promedio) en las diferentes categoría



de esta habilidad. Las categorías *azar y estimación probabilística* también presentan bajos desempeños, por lo tanto también deben ser promovidas dentro de los sistemas de enseñanza. La categoría *distribución* relacionada con el manejo de sistemas de datos, es donde mejor se desempeñan los estudiantes (gráfica 3.6).

### 3.5 Desempeños generales según sectores

Los sectores presentan puntajes entre 8.25 y 6.51 para un promedio de 7.36 para la población total. Llama la atención el promedio más elevado del sector *No oficial* (8.25), con 1570 estudiantes, y el promedio menor (6.51) del sector *Oficial Distrital*, con 1.431 educandos (tabla 3.17).

Se realizó una prueba de significancia estadística ANOVA entre las medias de los diferentes sectores a un nivel de confianza del 95%. Posteriormente, se analizaron las significancias entre cada uno de los sectores, por pares, en un nivel de confianza del 95%, utilizando una prueba t.

#### ANOVA para los grupos de sectores

Se presenta una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre los valores de las medias de la variable “sector” entre sus grupos. La prueba de significancia indica la existencia de factores relacionados con el sector que podrían estar influyendo, en alguna

medida, en el desempeño de los niños en la prueba de pensamiento aleatorio

#### T para grupos de sectores

Se encontró entre pares de *sectores* que:

- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de colegios *no oficiales* y colegios *no oficiales convenio*.
- No existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.138 > 0.05$  entre las medias de colegios *oficiales distritales* y *oficiales distritales concesión*.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de colegios *no oficiales* y colegios *oficiales distritales*.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.014 < 0.05$  entre las medias de colegios *no oficiales convenio* y colegios *oficiales concesión*.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de colegios *no oficiales* y colegios *oficiales distritales concesión*.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de colegios *no oficiales convenio* y colegios *oficiales distritales*.

En los cuatro grupos de la variable *sector* se encontró una diferencia significativa entre sus

Tabla 3.17. Porcentaje y desviación típica por sectores

Jornada	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
No oficial	1570	8,25	2,60	18,00	,00
No oficial Convenio	509	7,24	2,26	14,00	1,00
Oficial Distrital	1431	6,51	2,39	15,00	,00
Oficial Distrital Convenio	193	6,78	2,21	13,00	2,00

medias, lo cual permite afirmar que hay factores relacionados con los *sectores* que tienen alguna influencia en los desempeños en la prueba de pensamiento aleatorio. Sin embargo, en la medida de significancia entre pares de grupos no existe una diferencia estadísticamente significativa entre las medias de colegios *oficiales distritales* y *oficiales distritales concesión*, mientras que en los colegios *no oficiales* y *no oficiales convenio*, existe una diferencia estadísticamente significativa entre sus medias y también con relación a los colegios *oficiales distritales* y *oficiales distritales concesión*. Sin embargo, según el tamaños de las poblaciones llama la atención la diferencia de 1,74 entre las medias del *sector no oficial* con 1.570 estudiantes y el *oficial distrital* con 1.431 alumnos. Habría que indagar por algunos factores relacionados con el *sector* en especial en estos grupos para explicar las diferencias de desempeño en la prueba.

### 3.6 Desempeños generales según jornadas

Las *jornadas* presentan puntajes entre 7.89 y 6.99 para un promedio de 7.36 para la población total. Llama la atención la diferencias de promedio entre las medias de los tres grupos, en especial entre la *jornada tarde* y *única* (tabla 3.18).

Se realizó una prueba de significancia estadística ANOVA entre las medias de las diferentes *jornadas* a un nivel de confianza del 95%. Posteriormente, se analizó la significancia entre cada una de las *jornadas*, por pares, en un nivel de confianza del 95%, utilizando una prueba *t*.

Tabla 3.18. Puntajes y desviación típica por jornadas

Jornada	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Mañana	1013	6,99	2,48	18,00	1,00
Tarde	646	6,21	2,28	13,00	0,00
Única	2125	7,89	2,56	17,00	0,00

### ANOVA para las jornadas

Se presenta una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre los valores de las medias de la variable “*jornada*” entre sus grupos. La prueba de significancia indica la existencia de factores relacionados con la *jornada* que podrían estar influyendo, en alguna medida, en el desempeño de los niños en la prueba de pensamiento aleatorio.

### T para las jornadas

Se encontró entre pares de *jornada* que:

- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de *jornada mañana* y *jornada tarde*.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de *jornada mañana* y *jornada única*.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de *jornada tarde* y *jornada única*.

En los tres grupos de la variable “*jornada*” se encontró una diferencia significativa entre sus medias, lo cual permite afirmar que hay factores relacionados con las *jornadas* que tienen alguna influencia en los desempeños en la prueba de pensamiento aleatorio. Llama la atención la diferencia de 1.68 entre las medias de la *jornada tarde* y la *jornada única*. Habría que indagar por algunos factores relacionados con la *jornada*, en especial, en estos grupos para explicar las diferencias de desempeño en la prueba.

### 3.7 Desempeños generales según estratos

Los datos reportados para la población total clasificada en *estratos* fue de 2.114 alum-

nos. La media fue de 7.92, más elevada que para la población total. Llama la atención el promedio más elevado del *estrato 6* (8.93) con 15 estudiantes y el promedio menor (6.26) del *estrato 1* con 185 educandos. En la tabla 3.19 se observa que a medida que se eleva el *estrato* los puntajes son mejores. Sin embargo, hay que tener en cuenta la diferencia poblacional, concentrada principalmente en los *estratos 2 y 3*, y que no permitiría hacer un análisis comparativo más detallado.

Se realizó una prueba de significancia estadística ANOVA entre las medias de los diferentes estratos a un nivel de confianza del 95%. Posteriormente, se analizaron las significancias entre algunos *pares de estratos*, en un nivel de confianza del 95%, utilizando una prueba t para encontrar si existía alguna diferencia sensible entre los estratos.

### ANOVA para estratos

Se puede afirmar que existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre los valores de las medias de la variable “estrato” entre los grupos. La prueba de significancia nos dice que existen factores relacionados con el estrato que podrían estar influyendo, en alguna medida, en el desempeño de los niños en la prueba de pensamiento aleatorio.

### T para estratos

Se encontró para pares de estratos que:

- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre los valores nominales de *estratos 1 y 2*.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.001 < 0.05$  entre los valores nominales de *estratos 3 y 4*.
- No existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.955 > 0.05$  entre los valores nominales de *estratos 5 y 6*.
- No existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.452 > 0.05$  entre los valores nominales de *estratos 4 y 5*.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre los valores nominales de *estratos 3 y 2*.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.009 < 0.05$  entre los valores nominales de *estratos 5 y 3*.

Los seis grupos de la variable “estrato” tienen una diferencia significativa entre sus medias, lo cual permite afirmar que hay factores relacionados con el *estrato* que tienen alguna influencia en los desempeños en la prueba de pensamiento aleatorio. Entre los *estratos 4, 5 y 6* no hay diferencia estadísticamente significativa mientras que los *estratos 1, 2 y 3* tienen diferencias estadísticamente significativas. Con estos datos se puede afirmar que factores relacionados con el *estrato* inciden en alguna medida en el desempeño en la *prueba de pensamiento aleatorio*, en especial en las significaciones obtenidas comparando los *estratos 1, 2 y 3*; pero, no se

Tabla 3.19. Puntajes y desviación típica por estratos

Estrato	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
1	185	6,26	2,26	12,00	1,00
2	802	7,07	2,23	15,00	,00
3	871	7,84	2,55	17,00	,00
4	197	8,55	2,67	17,00	1,00
5	44	8,89	2,82	18,00	4,00
6	15	8,93	2,74	15,00	5,00

puede afirmar lo mismo en la diferencia entre los estratos 4, 5 y 6.

### 3.8 Variables de Capital Cultural

Se realizaron pruebas de significancia ANOVA y t, con las variables de capital cultural “estado civil”, “número de hermanos”, “vivienda”, “ingreso promedio mensual”.

#### 3.8.1 Estado civil

Los datos reportados para la población total clasificada según “estado civil” fue de 2.120 alumnos. La media fue de 7.26, más alta que para la población total de la prueba (tabla 3.20).

Se realizó una prueba de significancia estadística ANOVA entre las medias de los diferentes estados civiles a un nivel de confianza del 95%. Posteriormente, se analizaron las significancias entre dos grandes grupos que podrían tener significado cultural: uno formado por alumnos que viven con sus padres (casados, unión libre) y otros que viven con alguno de sus padres (separados) en un nivel de confianza del 95%, utilizando una prueba t (tabla 3.21).

### NOVA para los grupos de estado civil

Se presenta una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre los valores de las medias de la variable “estado civil” entre los grupos. La prueba de significancia indica la existencia de factores relacionados con el “estado civil” que podrían estar influyendo, en alguna medida, en el desempeño de los niños en la prueba de pensamiento aleatorio.

### T para los grupos de estado civil

Se clasificaron en dos grupos: el de “casados” y “unión libre” en un grupo llamado “vive con los padres” y el de “separados”.

Se encontró qué:

No existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.358 > 0.05$  entre las medias del estado civil “vive con los padres” y el estado civil “separados”.

En la prueba ANOVA entre todos los grupos de *estado civil* se encuentra una diferencia significativa, sin embargo no se encuentra diferencia en la prueba t entre las dos agrupaciones “vive con los padres” y “separados”. Esto nos permite afirmar que factores relacio-

Tabla 3.20. Población clasificada, promedio y desviación estándar con respecto a la categoría “estado civil”

Estado civil	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Casado	1030	7,76	2,51	17,00	,00
Unión libre	448	7,11	2,35	16,00	1,00
Separados	445	7,44	2,64	18,00	1,00
Viudo (a)	81	6,96	2,36	12,00	1,00
Solteros	116	7,07	2,37	13,00	1,00

Tabla 3.21. Población clasificada, promedio y desviación estándar con relación a dos grupos de la categoría “estado civil”

Agrupación estado civil	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Vive con los padres	1.478	7,57	2,48	17,00	,00
Separados	445	7,44	2,64	18,00	1,00

nados con vivir o no con los padres, no son estadísticamente significativos.

### 3.8.2 Número de hermanos

Los datos reportados para la población total clasificada según “número de hermanos” fue de 2.113 alumnos. La media fue de 7.29, más alta que para la población total de la prueba. Llamen la atención los promedios más elevados para 1 o ningún hermano (tabla 3.22).

### ANOVA entre todos los grupos de número de hermanos

Se encontró que existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de la variable número de hermanos entre los diferentes grupos.

### T para grupos de número de hermanos

Se construyeron tres grupos: uno en el que se encuentran número de hermanos desde 2 hasta más de 6 hermanos, llamado “tiene más de un hermano”, y otros dos, “tiene un hermano” y “no tiene hermanos”, (tabla 3.23).

Se encontró que:

- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de los grupos “tiene un hermano” y “tiene más de un hermano”.
- No existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.501 > 0.05$  entre las medias de los grupos “tiene un hermano” y “no tiene hermanos”.
- No existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.061 > 0.05$  entre las medias de los grupos “tiene más de un hermano” y “no tiene hermanos”.

Dentro de “número de hermanos” por grupos, solo se encontró una diferencia significativa entre los grupos “tiene un hermano” y “tiene más de un hermano”, entre el resto de los grupos no existe diferencia significativa en las medias. Podrían existir factores relacionados con el número de hermanos que inciden en alguna medida en los desempeños de los niños en la prueba, dado por los resultados de la ANOVA, sin embargo en las pruebas t por pares no se encuentran diferencias significativas entre los pares de grupos que nos sugieran factores relacionados con esta variable cultural.

Tabla 3.22. Población clasificada, promedio y desviación estándar con respecto a la categoría “número de hermanos”

Número de hermanos del estudiante	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
1	797	7,76	2,50	18,00	,00
2 - 3	871	7,39	2,52	16,00	,00
4 - 5	178	6,89	2,29	12,00	2,00
Más de 6	53	6,81	2,05	12,00	3,00
Ninguno	222	7,63	2,61	15,00	1,00

Tabla 3.23. Población clasificada, promedio y desviación estándar con relación a tres grupos de la categoría “número de hermanos”

Agrupación número de hermanos	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Tiene un hermano	797	7,76	2,50	18,00	0,00
Tiene más de un hermano	1.102	7,28	2,47	16,00	0,00
No tiene hermanos	222	7,63	2,61	15,00	1,00

### 3.8.3 Tipo de vivienda

Los datos reportados para la población total clasificada según "tipo de vivienda" fue de 1.946 alumnos para *propia o arrendada*. La media fue de 7.64, más alta a la de la población total de la prueba (tabla 3.24).

Se realizó una prueba de significancia estadística ANOVA entre las medias de los diferentes tipos de vivienda a un nivel de confianza del 95%.

#### ANOVA para tipo de vivienda

Se encontró que existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.013 < 0.05$  entre las medias de la variable *tipo de vivienda* entre los grupos propio y arrendada. Se puede afirmar que existen factores relacionados con el *tipo de vivienda* que pueden influir en alguna medida en los desempeños de los niños en la prueba.

### 3.8.4 Ingresos mensuales

Los datos reportados para la población total clasificada según "ingresos mensuales" fue de 2.142 alumnos. La media fue de 7.9, más alta que para la población total de la prueba. El puntaje más alto fue 8.8, fue obtenido por 96 estudiantes que pertenecen *al grupo de mayor ingreso* y el más bajo 6.62, fue obtenido por 572 de estudiantes pertenecientes a familias de *menor ingreso*. Llamen la atención los promedios más elevados para los ingresos mayores y promedios menores para los de menores ingresos (tabla 3.25).

Se realizó una prueba de significancia estadística ANOVA entre las medias de los diferentes ingresos a un nivel de confianza del 95%. Posteriormente, se analizaron las significancias entre tres grandes grupos: entre 0 y \$763.000, entre \$763.000 y \$2.289.000, y más

Tabla 3.24. Población clasificada, promedio y desviación estándar con respecto a la categoría "tipo de vivienda"

La vivienda es :	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Propia	1.267	7,61	2,48	16,00	0,00
Arrendada	679	7,32	2,62	18,00	0,00

Tabla 3.25. Población clasificada, promedio y desviación estándar con respecto a la categoría "ingresos mensuales"

Ingreso promedio mensual de la familia	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
0	81	6,99	2,32	14,00	1,00
Hasta \$ 381.500	572	6,62	2,24	15,00	0,00
Entre \$ 381.500 y \$ 763.000	600	7,30	2,43	17,00	0,00
Entre \$ 763.001 y \$ 1.144.500	329	7,87	2,42	15,00	1,00
Entre \$ 1.144.501 y \$ 1.526.000	157	8,16	2,48	16,00	3,00
Entre \$ 1.526.001 y \$ 1.907.500	112	8,37	2,57	14,00	1,00
Entre \$ 1.907.501 y \$ 2.289.000	66	8,62	2,10	14,00	2,00
Entre \$ 2.289.000 y \$ 2.670.500	55	8,42	2,88	14,00	3,00
Entre \$ 2.670.501 y \$ 3.815.000	74	8,50	2,60	16,00	2,00
Más de \$ 3.815.000	96	8,80	2,78	18,00	1,00

**Tabla 3.26. Población clasificada, promedio y desviación estándar con relación a tres grupos de la categoría "ingresos mensuales"**

Ingreso mensual por grupos	TOTAL DE RESPUESTAS CORRECTAS				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Entre 0 y \$763.000	653	6,67	2,25	15,00	0,00
Entre \$763.001 y \$2.289.000	1.198	7,67	2,48	17,00	0,00
Más \$2.289.001	291	8,61	2,60	18,00	1,00

de \$2.289.000, en un nivel de confianza del 95%, utilizando una prueba t (Tabla 3.26).

### ANOVA para todos los grupos de ingresos promedio mensual

Se encontró que existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de la variable *ingreso promedio* al mes entre sus grupos.

### T para los agrupaciones de ingreso mensual

Se agrupó la variable *ingreso mensual* en 3 categorías.

Se encontró entre los diferentes pares de grupos de ingreso que:

- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de los grupos *ingreso mensual* entre 0 y \$763.000 y entre \$763.001 y \$2.289.000.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de los grupos *ingreso mensual* entre 0 y \$763.000 y más \$2.289.001.
- Existe una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  entre las medias de los grupos ingreso mensual entre \$763.001 y \$2.289.000, y más \$2.289.001.

Los grupos de la variable "*ingreso mensual*" tienen una diferencia significativa entre sus medias, lo cual permite afirmar que hay fac-

tores relacionados con el ingreso mensual que tienen alguna influencia en los desempeños en la prueba de pensamiento aleatorio. De la misma manera existen diferencias significativas estadísticamente entre las medias de los tres grupos seleccionados. Con los datos que se poseen se puede afirmar que factores relacionados con el *ingreso mensual* influyen en alguna medida en el desempeño en la prueba de pensamiento aleatorio.

## 4. Diferencias en los desempeños en la prueba de pensamiento aleatorio grados 5° y 9°

Se realizó una equivalencia entre las pruebas, haciendo uso de factores de conversión de tal manera que se pudieran comparar los rendimientos en los grados quinto y noveno, con respecto a los resultados generales y en cada una de las categorías *azar, combinatoria, estimación probabilística y distribución*. Posteriormente se realizaron pruebas de significancia ANOVA para encontrar si existían o no diferencias significativas entre los grupos de quinto y noveno.

### ANOVA para la diferencia de desempeños en los grados 5° y 9°

Se encontró una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  en la media de respuestas correctas entre los cursos quinto y noveno (tabla 4.1).

Tabla 4.1. Resultado total con base 10, media y desviación estándar de los grados 5° y 9°

GRADO	RESULTADO TOTAL CON BASE 10				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
QUINTO	3.835	4,66	1,70	9,58	0,42
NOVENO	3.784	3,87	1,35	9,47	0,00

Tabla 4.2. Resultado con base 10, media y desviación estándar de los grados 5° y 9° con respecto a la categoría "azar"

GRADO	RESULTADO AZAR CON BASE 10				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
QUINTO	3.835	5,27	2,59	10,00	0,00
NOVENO	3.784	2,40	3,11	10,00	0,00

### ANOVA para la diferencia de desempeños de 5° y 9° en la categoría azar

Se encontró una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  en la media de respuestas correctas azar dentro de los cursos quinto y noveno (tabla 4.2).

### ANOVA para la diferencia de desempeños de 5° y 9° en la categoría combinatoria

Se encontró una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  en la media de respuestas correctas *combinatoria* entre los cursos quinto y noveno (tabla 4.3).

### ANOVA para la diferencia de desempeños 5° y 9° en la categoría de estimación probabilística

Se encontró una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  en la media de respuestas correctas de *estimación probabilística* entre los cursos quinto y noveno (tabla 4.4).

### ANOVA para la diferencia de desempeños 5° y 9° en la categoría de distribución

Hay una diferencia estadísticamente significativa  $0.000 < 0.05$  en la media de respuestas correctas de *distribución* entre los cursos quinto y noveno (tabla 4.5).

Tabla 4.3. Resultado con base 10, media y desviación estándar de los grados 5° y 9° con respecto a la categoría "combinatoria"

GRADO	RESULTADO COMBINATORIA CON BASE 10				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
QUINTO	3.835	2,94	2,55	10,00	0,00
NOVENO	3.784	1,65	2,52	10,00	0,00

Tabla 4.4. Resultado con base 10, media y desviación estándar de los grados 5° y 9° con respecto a la categoría "estimación probabilística"

GRADO	RESULTADO ESTIMACION CON BASE 10				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
QUINTO	3.835	4,51	2,02	10,00	0,00
NOVENO	3.784	2,34	1,83	10,00	0,00

Tabla 4.5. Resultado con base 10, media y desviación estándar de los grados 5° y 9° con respecto a la categoría "distribución"

GRADO	RESULTADO DISTRIBUCION CON BASE 10				
	Recuento	Media	Desviación típica	Máximo	Mínimo
QUINTO	3.835	5,14	2,45	10,00	0,00
NOVENO	3.784	5,38	1,88	10,00	0,00

## 5. Conclusiones pedagógicas y socioculturales

### 5.1 Desempeños generales

- Los ítems de la prueba de grado quinto tienen un carácter cualitativo, y se construyen a partir de las intuiciones primarias y del conocimiento experiencial de los niños; para su ejecución, no requieren de un conocimiento escolar formalizado. Teniendo en cuenta estas características de la prueba, dado que los desempeños de los niños, en forma general, son promedio y la distribución de la población se aproxima a una distribución normal, se puede afirmar, que en general, estos poseen una adecuada base intelectual que podría ser potenciada con la enseñanza escolar del pensamiento probabilístico.
- Los ítems de la prueba de grado noveno requieren para su solución mayormente un conocimiento formalizado, que hace uso de estimaciones cuantitativas, sobre probabilidad. Los desempeños de los estudiantes, en forma general son promedio y aunque la distribución se aproxima a la normal, se sesga a la izquierda indicando que los rendimientos son medios bajos en más de la mitad de la población. Esto indica que la conceptualización y los procesos cognitivos relacionados con pensamiento probabilístico de los estudiantes de noveno grado no están lo suficientemente desarrollados desde los sistemas de enseñanza. Es importante, desde el punto de vista curricular y didáctico, proporcionarles a los estudiantes una serie de experiencias de aprendizaje de la probabilidad en un marco cognoscitivo (conceptos y procesos cognitivos)

y cultural (problemas en diferentes campos, no sólo matemáticos, que hacen uso de la probabilidad).

- Comparativamente, los rendimientos en la prueba son más elevados en grado quinto que en grado noveno. Esto sugiere que se disminuyen los logros de aprendizaje en relación con pensamiento probabilístico a medida que aumenta el desarrollo de los niños o los años de escolarización. Dado que la prueba de quinto se sustenta en un conocimiento experiencial, no formalizado e intuitivo primario y la prueba de noveno en un conocimiento formalizado escolarmente, se hace necesario, curricular y didácticamente, hacer uso del capital intelectual de los niños, crear e implementar escolarmente un conjunto de temáticas y problemas de campos diversos (teoría de juegos, investigación, toma de decisiones, etc.) que hacen uso de la probabilidad tanto a nivel cuantitativo como cualitativo y, en especial, crear intereses cognoscitivos hacia el tema.

### 5.2 Desempeños por categorías

- En el grado quinto los puntajes en un nivel medio alto corresponden a las categorías *azar* y *distribución*, en un nivel medio a la categoría *estimación probabilística* y en un porcentaje bajo a la categoría *combinatoria*. Esto sugiere que la habilidad para resolver problemas de *combinatoria* es la menos desarrollada y que la *distribución*, vista en la prueba fundamentalmente a través de la interpretación de sistemas de datos, es la más desarrollada. Aunque la *combinatoria* en sí misma no es un concepto que hace parte nuclear del pensamiento probabilístico, si es una condición necesaria, en

especial para la definición de espacios muestrales. Esto hace indispensable desarrollar habilidades de solución de problemas que impliquen *combinatorias* en situaciones sencillas y cotidianas. De la misma manera, se deben seguir desarrollando habilidades de distinción de situaciones deterministas y azarosas, lo mismo que de *estimación probabilística* a través de problemas relacionados con estos temas, y que impliquen situaciones cercanas a las experiencias de los niños.

- En el grado noveno los puntajes en un nivel medio corresponden a la categoría *distribución*, en un nivel medio bajo a la categorías *azar* y *estimación probabilística* y en un porcentaje muy bajo a la categoría *combinatoria*. Esto sugiere que la habilidad para resolver problemas, que implican *operaciones de combinatoria*, es la menos desarrollada y que la *distribución*, vista en la prueba a través de la *interpretación de sistemas de datos*, es la más desarrollada. Es importante recordar que aunque la *combinatoria*, en sí misma, no es un concepto que hace parte nuclear del pensamiento probabilístico, si es una condición necesaria, en especial para la definición de espacios muestrales. Esto hace indispensable desarrollar habilidades de solución de problemas que implique razonamiento combinatorio y un uso práctico, no complejo, de los algoritmos de cálculo. De la misma manera, se deben seguir desarrollando habilidades de distinción de situaciones deterministas y azarosas, lo mismo que de *estimación probabilística* a través de problemas relacionados con estos temas, y que impliquen niveles de formalización y uso de algoritmos matemáticos.

- Los desempeños más bajos, tanto en los grados quinto como noveno, son en *combinatoria*, lo que implica que es necesario promover esta habilidad tanto curricular como didácticamente.
- La distribución de los resultados en las categorías de *azar* y *estimación probabilística* en quinto fueron medios o medios altos, pero en noveno fueron medios bajos, lo que implica que las habilidades para resolver problemas en estos campos han disminuido a lo largo de la vida escolar. Esto sugiere que se debe favorecer su desarrollo facilitando el paso: a) de las intuiciones primarias a las intuiciones secundarias y al conocimiento formal y b) de los análisis cualitativos a los análisis cuantitativos.
- Los desempeños en *distribución e interpretación de sistemas de datos* son medios altos en ambos cursos, lo cual indica que las habilidades en este campo son adecuadas, es decir, los niños y jóvenes presentan habilidades relativamente buenas de lectura interpretativa de información gráfica y su relación con información textual. Estas habilidades pueden ser aprovechadas en el aprendizaje de conceptos de probabilidad y estadística.

### 5.3 Desempeños generales por segmentos de la población

- Se realizaron pruebas de significancia estadística ANOVA entre las medias de los diferentes grupos, y pruebas T entre las medias de diferentes pares de grupos, encontrando que tanto en grado quinto como en grado noveno el pertenecer a una localidad, a un sector (no oficial, no oficial convenio, oficial distrital, oficial distrital concesión), a una jornada

(mañana, tarde, única) y a un estrato socioeconómico, puede influir en los desempeños en las pruebas de pensamiento aleatorio. Se presentan diferencias significativas entre las medias de los diferentes grupos y pares de grupos que sugieren esta influencia. Se infiere que factores, en general de carácter sociocultural y económico, tienen influencia en los desempeños escolares de los niños y jóvenes en pensamiento aleatorio. Sería importante investigar factores específicos en los diferentes grupos que expliquen estas diferencias.

- Tanto en grado quinto como en noveno, llama la atención la diferencia entre las medias de los *sectores no oficial y oficial distrital*, entre las *jornadas tarde y la única*. Siendo menos favorecidos los *sectores oficial y la jornada de la tarde*. Sería importante indagar por factores específicos de los *sectores y jornadas*, en especial entre estos grupos.
- Tanto en grado quinto como en noveno, no se presentan diferencias significativas entre los *estratos altos* (4, 5, 6) y sí se encuentran diferencias significativas entre los *estratos bajos* (1, 2, 3). Esto sugiere que factores relacionados con la pertenencia a un *estrato socioeconómico* determinado, son influyentes en los desempeños escolares en pensamiento aleatorio de niños y jóvenes.

#### 5.4 Variables de capital cultural

- Se realizaron pruebas de significancia estadística ANOVA entre las medias de los diferentes grupos, y pruebas T entre las medias de diferentes pares de grupos, encontrando que tanto en gra-

do quinto como en noveno el *número de hermanos*, los *tipos de vivienda* y los *ingresos mensuales*, pueden estar influyendo en los desempeños escolares en pensamiento aleatorio. Estos resultados sugieren que hay factores de carácter económico (tipo de vivienda e ingresos) y social (número de hermanos) que pueden influir en los desempeños en la prueba.

- Tanto en grado quinto como en noveno, no se encontró diferencia significativa entre “vivir con los padres” o no. Se infiere que estos *factores familiares* no son decisivamente influyentes en los desempeños en la prueba y en el colegio.

## 6. Orientaciones curriculares y didácticas

A partir de los resultados de las *pruebas Comprender en pensamiento aleatorio* en los grados 5° y 9°, se pueden retomar cinco ideas básicas que pueden orientar la gestión curricular y la didáctica:

- Los niños de grado 5° (intuiciones primarias, análisis cualitativo, experiencias concretas) tienen mejor desempeño que los jóvenes de grado 9° (conocimiento formalizado, análisis cuantitativo, abstracción).
- Hay una alta variabilidad en los desempeños en ambos grados. Esta puede estar relacionada con el dominio de los procesos cognitivos subyacentes al *pensamiento aleatorio* (reversibilidad, causalidad, proporcionalidad, clasificación, modelización, etc.) o con las experiencias previas de análisis de situaciones aleatorias.

- Las actividades que presentan mayor dificultad en ambos grados, son aquellas que exigen del uso de la *combinatoria*.
- Hay factores sociales y económicos que posiblemente influyen en los desempeños de los niños y jóvenes, lo cual implica mejores intervenciones didácticas que permitan disminuir las desigualdades en oportunidades de aprendizaje.
- En cuanto al tipo de prueba -y los desempeños derivados de su aplicación- se puede inferir que es posible generar tareas (ítems), que eventualmente puedan ser utilizadas en la intervención didáctica, ligadas a la *probabilidad subjetiva*<sup>16</sup> y a la *probabilidad empírica*, y no necesariamente a la *probabilidad formal*.

A partir de estas ideas, es posible plantear una serie de propósitos de carácter educativo que guíen la enseñanza de la probabilidad:

- Favorecer el desarrollo de los procesos cognitivos de reversibilidad, causalidad, proporcionalidad, categorización, planteamiento de hipótesis y análisis de su verosimilitud y modelización que subyacen al *pensamiento aleatorio* en preescolar y educación básica primaria en todas las áreas.
- Favorecer el desarrollo del *pensamiento aleatorio*, a lo largo de la educación básica, regulando desde la enseñanza sesgos subjetivos y mecanización de los procesos de estimación y de cálculo, a partir de las intuiciones primarias y de diferentes situaciones aleatorias presentes en la vida cotidiana y en diferentes áreas de conocimiento. Se aprovechan elementos de la *probabilidad subjetiva y empírica* antes de

entrar a desarrollar componentes sencillos de *probabilidad formal*.

- Desarrollar sistemas de enseñanza (metodologías, recursos informáticos, materiales impresos o digitales, etc.) de amplia cobertura poblacional, que favorezcan el desarrollo del *pensamiento aleatorio* independientemente de las limitaciones económicas o socioculturales de los niños o jóvenes.

La organización curricular y didáctica requerida para favorecer el *pensamiento aleatorio* debe plantear respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Para qué favorecer el pensamiento aleatorio y no sólo el pensamiento determinista?
- ¿Qué conceptos relacionados con el pensamiento aleatorio se deben formar y en qué secuencia didáctica?
- ¿Qué tipos de preguntas y situaciones se deben propiciar a los niños y a los jóvenes que desafíen el desarrollo del pensamiento aleatorio?
- ¿Qué materiales didácticos son oportunos para favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio?
- ¿Cómo se debe evaluar el pensamiento aleatorio de acuerdo al nivel de desarrollo intelectual del niño y el joven, a las oportunidades de aprendizaje ofrecidas escolarmente y al conjunto de experiencias interesantes que surgen en su contexto vivencial y en las diferentes áreas de conocimiento?

De acuerdo con los resultados de aplicación de la prueba, con los propósitos y con las preguntas planteadas, se puede sugerir una organización curricular y didáctica general como la que se plantea en la tabla 6.1.

<sup>16</sup> Godino realiza esta clasificación de los tipos de probabilidad en su libro *Azar y Probabilidad*. Ver bibliografía.

**Tabla 6.1. Propuesta de organización curricular y didáctica**

Componentes curriculares	
<b>Para qué / objetivos generales</b>	<p>El pensamiento aleatorio está presente en una gran cantidad de situaciones de la vida práctica y científica, en diferentes áreas de conocimiento. Tiene su origen en un gran campo cultural como es el juego.</p> <p>Entre los propósitos generales se señalan:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Diferenciar entre sucesos deterministas y aleatorios.</li> <li>• Realizar combinatorias entre diferentes elementos para definir ocurrencias posibles en un espacio muestral.</li> <li>• Estimar la probabilidad de ocurrencia de sucesos.</li> <li>• Interpretar sistemas de datos que describen diferentes fenómenos naturales o sociales.</li> </ul>
<b>Conceptos / Contenidos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Azar.</li> <li>• Frecuencias.</li> <li>• Sucesos equiprobables.</li> <li>• Independencia y dependencia de sucesos.</li> <li>• Secuencias de resultados aleatorios.</li> <li>• Estimación de posibilidad y probabilidad (sesgos).</li> <li>• Operaciones combinatorias.</li> <li>• Sistemas de datos y distribución de muestras y poblaciones.</li> </ul>
<b>Sistemas de enseñanza / Metodologías / Tareas</b>	<p><i>En el preescolar.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Experimentación para estimar posibilidades.</li> <li>• Análisis de posibilidades de ocurrencia de hechos en la narratividad.</li> <li>• Juegos combinatorios sencillos como solución a requerimientos cotidianos.</li> </ul> <p><i>En la educación básica primaria</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Estimación cualitativa de posibilidades y probabilidades en juegos y en situaciones no deterministas.</li> <li>• Cálculo de combinatorias mediante ensayo y error.</li> <li>• Experimentación y sistematización de datos.</li> </ul> <p><i>En la educación básica secundaria</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Juegos con monedas, dados y sistematización de datos.</li> <li>• Experimentos en contextos geométricos.</li> <li>• Proyectos sencillos de investigación de carácter cuantitativo.</li> <li>• Análisis de fenómenos físicos, atmosféricos, epidemiológicos, económicos, biológicos, políticos, etc.</li> <li>• Construcción de árboles, diagramas, tablas.</li> </ul>
<b>Recursos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dependiendo de los grados se utilizan diferentes materiales.</li> <li>• En los niños pequeños debe enfatizarse material que pueda ser manipulado.</li> <li>• En los jóvenes es importante utilizar diferentes casos y simulaciones de fenómenos aleatorios de la vida real. Además de diferentes instrumentos de procesamiento de datos y sistematización gráfica de información.</li> <li>• Muchos de los materiales se pueden basar en diferentes juegos, tales como dados, bolas en urnas, ruletas, barajas de cartas. De la misma manera se pueden utilizar tablas de números aleatorios, máquinas de Galton, tiro al blanco, plantillas para el dibujo de funciones y modelos, instrumentos de medidas, calculadoras gráficas, computadores, ficheros de datos, recursos de Internet para la localización de información, software para el procesamiento de información, etc.</li> </ul>
<b>Evaluación</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La evaluación, más que identificar dominios de contenidos temáticos debe ser un instrumento de promoción de procesos cognitivos y conceptos relacionados con el pensamiento aleatorio (representaciones internas). Igualmente, debe identificar y promover la construcción de conceptos como azar, estimación probabilística, combinatoria y distribución y los procesos cognitivos de reversibilidad, causalidad, categorización, modelización, proporcionalidad, inferencia, deducción e inducción.</li> <li>• Promover los intereses cognoscitivos hacia la probabilidad y la estadística desafiando al alumno con problemas interesantes relacionados con diferentes campos de conocimiento.</li> <li>• Favorecer la capacidad de comunicar ideas matemáticas haciendo uso de diferentes representaciones culturales externas, textuales o gráficas.</li> </ul>

## Bibliografía

Batanero, M.C.; Godino, J.D. Y Navarro-Pelayo, V. *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis. (1994).

Fischbein, E. *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel. (1975).

Godino, J. Batanero, M. Cañizales, M. *Azgar y probabilidad*. Madrid: Editorial Síntesis. (1996).

Piaget, J. Inhelder, B. *The origen of the ifea of chance in Children*. Toront: W.W Norton Company. (1975).

Hacking, I. *El surgimiento de la probabilidad*. Madrid: Gedisa. (1995).

Vergnaud, G. *Psicología cognitiva y del desarrollo y didáctica de las matemáticas, en: Temas actuales sobre psicopedagogía y didáctica II Congreso Mundial Vasco*. ( 1987).



Educazio, Kultura eta Kirola Departamentua

Departamento de Educación, Cultura y Deporte  
C/ Leizola, 1 - 48940 Leizola (Bizkaia)  
Teléfono: 94 420 20 00



[www.imprenta.gov.co](http://www.imprenta.gov.co)  
PBX (0571) 457 80 00  
Diagonal 22 B No. 67-70  
Bogotá, D.C., Colombia