ELEMENTOS DE LA HEURÍSTICA DE ARQUÍMEDES IDENTIFICADOS EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO EN LA COMPARACIÓN DE MAGNITUDES

Presentado por: CARLOS ANDRÉS CASTAÑEDA MONCADA

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
BOGOTÁ- COLOMBIA
2018

ELEMENTOS DE LA HEURÍSTICA DE ARQUÍMEDES IDENTIFICADOS EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO EN LA COMPARACIÓN DE MAGNITUDES

Presentado por: CARLOS ANDRÉS CASTAÑEDA MONCADA
Director: RODOLFO VERGEL CAUSADO

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
BOGOTÁ- COLOMBIA

2018

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mis padres Carlos Alberto Castañeda Ramírez y Elvia Moncada de Castañeda por ser mi apoyo en todas las circunstancias de mi vida, a mis hermanos Wilmar Ernesto Castañeda y Sandra Patricia Castañeda Moncada por toda su colaboración y a mi esposa Luisa Patricia Lozano Alvarado por ser mi motivación y fuerza en este importante proceso académico y profesional, a Dios y a la vida por permitirme culminarla satisfactoriamente…

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar gracias a la Secretaria de Educación de Bogotá por apoyar económicamente la financiación de la Maestría, a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas mi alma máter por aceptarme y aportarme en mi desarrollo profesional, a los Profesores Edgar Alberto Guacanme Suárez y John Helver Bello Chávez por sembrar en mí el interés por la História de las Matemáticas, Al profesor Rodolfo Vergel Causado por creer en mi a pesar de las circunstancias, al Colegio José Martí I.E.D por facilitarme los espacios y las herramientas para el desarrollo de la investigación y finalmente a los estudiantes de la promoción 2018 quienes me enseñaron bastante y enriquecieron mi quehacer como docente.

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

INDICE DE FIGURAS

Resumen

Se presenta el trabajo de investigación desarrollado en el marco de la Maestría en Educación, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. La experimentación se desarrolló en el segundo semestre del 2016, con doce estudiantes de grado noveno, el interés principal de este trabajo de grado consistió en reconocer si los estudiantes se aproximaron a un modelo de pensamiento de manera espontánea, a partir del diseño y aplicación de una secuencia de seis actividades que incorporó elementos de la heurística de Arquímedes, en la comparación de magnitudes apoyados en la experimentación física y la geometría dinámica. La metodología en la que se enmarcó este trabajo fue en la investigación cualitativa desde Denzin & Lincoln (1994). Como resultados de la investigación se logró la identificación y descripción de las heurísticas de los estudiantes donde fue posible evidenciar aproximaciones a los elementos de la heurística de Arquímedes en la comparación de magnitudes, relacionando las acciones de los estudiantes dentro de cinco estrategias que se destacaron en el desarrollo de las actividades. Finalmente pudo concluirse que el diseño y la implementación de la secuencia de actividades se estructuró a partir de dos elementos de la heurística de Arquímedes, las hipótesis mecánicas y las hipótesis composicionales, las primeras le pusieron el énfasis a la experimentación a partir de nociones y proposiciones de estática que aparecieron de manera espontánea en la implementación de las actividades. Las segundas, permitieron que los estudiantes pusieran en juego la composición de áreas por cuerdas o líneas paralelas bajo algunos elementos de la geometría euclidiana

Palabras claves: Historia de las Matemáticas, Heurística de Arquímedes, comparación de magnitudes, geometría dinámica.

Abstract

The research work developed within the framework of the Master's Degree in Education of the Universidad Distrital Francisco José de Caldas is presented. It was developed in the second semester of 2016, with twelve ninth grade students, the main interest of this degree work was to recognize if students approached a model of thought spontaneously, from the design and application of a sequence of six activities that incorporated elements of Archimedes' heuristics, in the comparison of magnitudes supported by physical experimentation and dynamic geometry. The methodology in which this work was framed was in qualitative research from Denzin & Lincoln (1994). As a result of the research, identification and description of students' heuristics was achieved where it was possible to demonstrate approximations to the elements of Archimedes heuristics in the comparison of magnitudes, relating the actions of students within five strategies that were highlighted in the development of activities. Finally, it could be concluded that the design and implementation of the sequence of activities was structured from two elements of Archimedes heuristics, the mechanical hypotheses and the compositional hypotheses, the former placing emphasis on experimentation from notions and propositions of static that appeared spontaneously in the implementation of activities. The second ones allowed the students to put into play the composition of areas by strings or parallel lines under some elements of euclidean geometry.

Keywords: History of Mathematics, Heuristics of Archimedes, comparison of magnitudes, dynamic geometry.

Resumo

O trabalho de pesquisa desenvolvido no âmbito do Mestrado em Educação da Universidad Distrital Francisco José de Caldas é apresentado. Foi desenvolvido no segundo semestre de 2016, com alunos doze alunos da nona série, o principal interesse desse trabalho foi reconhecer se os alunos se aproximavam de um modelo de pensamento espontaneamente, a partir do projeto e aplicação de uma seqüência de seis atividades que incorporaram elementos das heurísticas de Arquimedes, na comparação de magnitudes suportadas pela experimentação física e geometria dinâmica. A metodologia em que este trabalho foi enquadrado foi na pesquisa qualitativa de Denzin & Lincoln (1994). Como resultado da pesquisa, foi realizada a identificação e a descrição das heurísticas dos estudantes onde foi possível demonstrar aproximações dos elementos das heurísticas de Arquimedes na comparação de magnitudes, relacionando as ações dos estudantes dentro de cinco estratégias destacadas em o desenvolvimento de atividades. Finalmente, pode-se concluir que o desenho e implementação da seqüência de atividades foi estruturado a partir de dois elementos das heurísticas de Arquimedes, as hipóteses mecânicas e as hipóteses de composição, a primeira colocando ênfase na experimentação de noções e proposições de estática que apareceu espontaneamente na implementação de atividades.

Os segundos permitiram que os alunos colocassem em prática a composição das áreas por cordas ou linhas paralelas sob alguns elementos da geometria euclidiana..

Palavras-chave: História da Matemática, a comparação Heurística Archimedes de magnitudes, geometria dinâmica.

INTRODUCCIÓN

El trabajo tiene como intención mostrar el proceso desarrollado en la Maestría en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en la línea de profundización. Éste pretende reconocer si los estudiantes se aproximaron a un modelo de pensamiento de manera espontánea[1], a partir del diseño y aplicación de una secuencia de seis actividades que incorporó elementos de la heurística[2] de Arquímedes en la comparación de magnitudes apoyados en la experimentación física y la geometría dinámica con seis grupos de estudiantes de grado noveno.

La investigación presenta un reporte en relación con los hallazgos encontrados al identificar elementos de la heurística de Arquímedes en estudiantes de grado noveno, al desarrollar una secuencia de actividades en la comparación de magnitudes, donde fue posible aproximarse a algunos elementos de la heurística, relacionando las acciones de los estudiantes dentro de cinco estrategias que se destacaron en las actividades, asociándolas con hipótesis mecánicas y composicionales, buscando describir heurísticas en los seis grupos de trabajo.

Los antecedentes y referentes teóricos permitieron reconocer la importancia de usar la Historia de las Matemáticas en el aula, buscando aproximarse a una forma de pensar particular como fue el caso de Arquímedes, quien con ingenio nos mostró que las Matemáticas son una construcción humana que, vía experimentación, le permitió teorizar y hacer aportes importantes en diferentes campos del conocimiento.

En el desarrollo de las actividades asociadas con hipótesis mecánicas e hipótesis composicionales y la combinación de estas, fue posible aproximarse a algunos elementos de la heurística de Arquímedes, de manera espontánea en la comparación de magnitudes.

---

[1] En adelante se usará el término "espontáneo(a)" para referirse a lo que fue posible observar en las acciones de los estudiantes que sin conocer la teorización hecha por Arquímedes, se aproximaron a algunos de los elementos de la heurística de Arquímedes, poniendo en juego creatividad y formas alternativas de experimentar, que surgieron a lo largo del desarrollo de las actividades.

[2] El término "heurística", es asumido en el sentido propuesto en el apartado 2.1.5.1 como formas de hacer, razonar y validar argumentos, a partir de la experimentación en la solución de un problema. Esta forma de proceder llevó a pensar a lo largo de la historia, que los antiguos griegos utilizaban formas de hacer o de abordar la solución de problemas, con métodos que no estaban enunciados en sus trabajos y cuya heurística o manera de descubrir estaba oculta.

Se asumió una investigación de tipo descriptiva y exploratoria, reconociendo que las experiencias en nuestro país donde la Historia de las Matemáticas es usada y llevada al aula a partir del diseño y aplicación de una secuencia de actividades son escasas o poco documentadas. Así que la intención es aportar en relación con uno de los tantos usos que puede asignársele al llevar la HM al aula, a partir de entender una forma de pensar o de estudiar un hito particular entre el amplio mar de posibilidades que proporcionan las Matemáticas.

Partiendo de lo anterior se presentan cuatro capítulos, los cuales se describen a continuación:

Capítulo uno: Contextualización de la investigación

Este apartado hace referencia a los fundamentos de la investigación, partiendo de la contextualización y planteamiento del problema que contribuyeron a justificar la intención de desarrollar el proyecto de investigación, también se presentan los objetivos general y específicos, así como los antecedentes que refieren investigaciones acerca de la Historia de las Matemáticas, la comparación de magnitudes y apoyo de software de geometría dinámica, finalizando con los aspectos metodológicos de la propuesta y las fases de la investigación.

Capítulo dos: Referentes teóricos y metodológicos

En este apartado se muestran los elementos de la heurística de Arquímedes usados para estructurar la secuencia de actividades, luego se presentan los referentes metodológicos en los que aparece la descripción en relación con el diseño y la implementación de la secuencia de actividades desde la parte experimental y apoyo de Geogebra; continúa con la presentación de los instrumentos de recolección de información, terminando con la organización, sistematización y análisis preliminar de datos.

Capítulo tres: Análisis de la información

En este apartado se presentan las formas de acción vinculadas con una forma particular de la heurística de Arquímedes, donde fue posible reconocer en las estrategias utilizadas por los estudiantes, elementos presentes de la heurística en la comparación de magnitudes a partir de las hipótesis mecánicas y composicionales.

Para ello se ubicaron las acciones de los seis grupos de trabajo, en cinco estrategias que permitieron organizar los datos, para asignarle uno o varios elementos de la heurística de Arquímedes como postulados, proposiciones que permitieron identificar formas de acción similares que se aproximaran a las usadas por Arquímedes en la comparación de magnitudes. Para ello se hizo un análisis a nivel individual por actividad, en cada uno de los seis grupos y se finalizó con un análisis grupal por actividad, a partir de las producciones escritas de los estudiantes.

Capítulo cuatro: Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones que lograron construirse a partir del proceso de investigación, respecto a los dos objetivos específicos en relación con el diseño-implementación de la secuencia de actividades y la descripción de las heurísticas de los estudiantes en la comparación de magnitudes planteados en la investigación, para finalmente abordar el objetivo general en la identificación de elementos de la heurística de Arquímedes, que fue posible reconocer en las heurísticas de los estudiantes de grado noveno.

CAPÍTULO 1: CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado se presenta una descripción del proceso de diseño de la investigación, a partir de dos elementos importantes como lo son: la contextualización desde dos miradas y el planteamiento del problema como insumo para el proceso de investigación. Además se muestran los objetivos generales y específicos de la investigación para lograr reconocer si los estudiantes se aproximaron a elementos de la heurística de Arquímedes de manera espontánea en la comparación de magnitudes.

Seguidamente se presentan los antecedentes que sirven a su vez de justificación para el planteamiento del problema e insumo para las demás fases del proceso de investigación. Estos antecedentes corresponden a experiencias llevadas al aula donde se incorporó la Historia de las Matemáticas, la comparación de magnitudes y el apoyo de la geometría dinámica. Finalmente se presenta el cronograma desarrollado con las actividades específicas de cada fase para alcanzar lo propuesto en esta investigación.

1.1. Contextualización del problema

En mi reflexión como docente reconozco a diario dificultades que presentan los estudiantes en relación con la comparación de magnitudes, la aplicación de fórmulas que no entienden y las pocas experiencias apoyadas con material concreto o software, que les permite mostrar de manera espontánea las formas o estrategias usadas para abordar un problema. Impulsado por estas dificultades, se tomó una forma de pensar reconocida por la Historia de las Matemáticas, particularmente la heurística de Arquímedes que muestra cómo combinando nociones y proposiciones de estática con algunos elementos de la geometría Euclidiana, a partir de la descomposición de figuras en otras de orden inferior o del mismo tipo, logró resolver problemas de áreas y volúmenes.

A continuación se puntualizará desde la Historia de las Matemáticas, a partir de experiencias que fueron llevadas al aula donde se pusieron en juego elementos de la historia y luego desde algunas de las dificultades que reportaron algunas pruebas y estudios en relación con la comparación de magnitudes

1.1.1 Desde experiencias llevadas al aula con elementos de la Historia de las Matemáticas

El enfoque de la propuesta, partió del reconocimiento que históricamente se le atribuyó al trabajo de Arquímedes, en particular de su heurística desde una forma de pensar o de proceder que se mantiene en espacios culturales diferentes, incluso de manera anacrónica, en este sentido González (2004):

> La Historia de la Matemática permite conocer las cuestiones que dieron lugar a los diversos conceptos, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades que involucraban, los problemas que resolvían, el ámbito en que se aplicaban, los métodos y técnicas que desarrollaban, cómo fraguaban definiciones, teoremas y demostraciones, la ilación entre ellos para forjar teorías, los fenómenos físicos o sociales que explicaban, el marco espacial y temporal en que aparecían, cómo fueron evolucionando hasta su estado actual (p 18).

Lo anterior muestra la importancia de incorporar la Historia de las Matemáticas (HM[3]) en relación con la Educación Matemática, trabajando con situaciones de tipo histórico en el aula de clase, no como cúmulo de hechos anecdóticos sino como insumo para acercarse a una forma de pensar, a un método o a una técnica que enriqueció el pensamiento matemático.

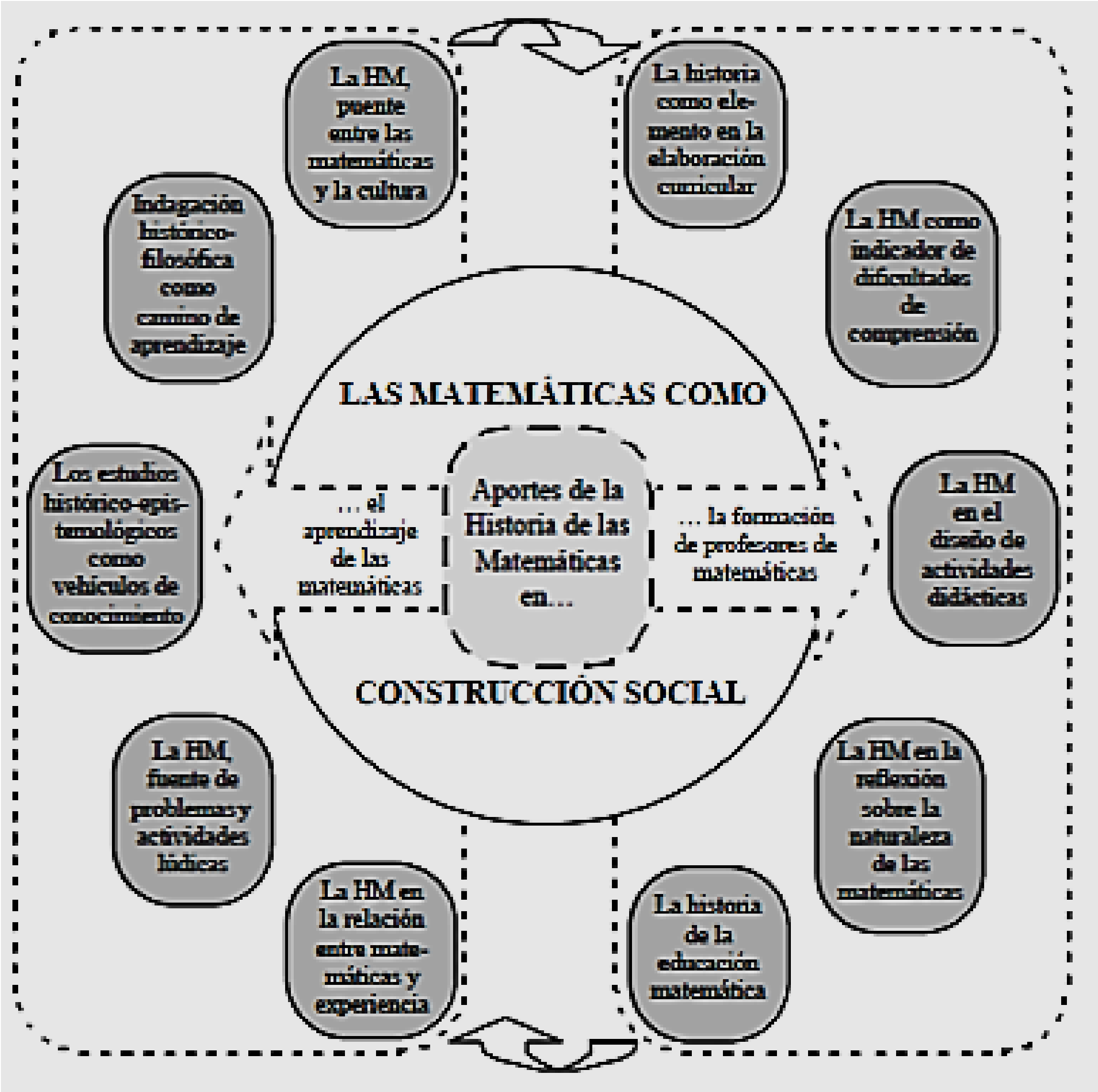
A continuación se presentan algunos trabajos en relación con experiencias donde se destaca el uso de la HM. El trabajo de Fernández (2001), hace un breve recorrido histórico de diferentes iniciativas que han relacionado la HM con la enseñanza, mostrando cómo la HM enriquece el proceso de enseñanza aprendizaje y humaniza el quehacer matemático. Definitivamente es el docente quien debe tomar la decisión respecto a cómo va a ser incorporada o que uso le va a dar a la HM y mostrar a sus estudiantes la profundidad o simplicidad con la que se desea trabajar.

---

[3] En el documento el término Historia de las Matemáticas referirá a lo planteado por Fauvel (1991) quien propuso once líneas de trabajo para usar la Historia de las Matemáticas, en particular para este trabajo se partió de usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos en situaciones de tipo histórico llevadas al aula para acercarse al pensamiento matemático. En adelante usaré la abreviatura HM.

A nivel nacional la literatura reporta algunos estudios respecto a los usos de HM en la Educación Matemática, en este sentido Anacona (2003) presenta en la figura 1 el diagrama denominado “Intervención de la reflexión histórica en el ámbito educativo”.

Figura 1. Intervención de la reflexión histórica en el ámbito educativo.



> La figura bosqueja las posibles formas de intervención de la reflexión histórica en el ámbito educativo, en dos escenarios. Uno ligado a procesos de aprendizaje de conceptos o teorías matemáticas y otro ubicado en la formación inicial y continuada de profesores de matemáticas (Anacona, 2003, p. 36).

En este trabajo se profundiza en la parte izquierda del diagrama centrado en el aprendizaje de las Matemáticas en la relación entre matemáticas y experiencia, debido a que fue para la propuesta muy importante re-crear elementos históricos de la heurística, a partir del desarrollo de la secuencia de actividades que le permitió a los estudiantes atravesar de manera espontánea por algunos elementos de la heurística de Arquímedes.

En este sentido se reconoce que:

> En un discurso netamente formal de las matemáticas, se eliminan las trazas de la actividad humana que las produjo. Precisamente, uno de los grandes propósitos de la Historia de las Matemáticas es reconstruir la heurística de tales procesos, para mostrar que son el producto del razonamiento humano en el marco de un contexto sociocultural (Anacona, 2003, p. 41).

Como uno de los propósitos de la HM es reconstruir las trazas de la actividad humana, se enfatiza a nivel histórico en la heurística usada por Arquímedes. Se toma como ejemplo algunos apartados del “Libro sobre equilibrio de los planos I”, en los postulados y las proposiciones iniciales y el “Método” en la proposición 2, porque con solo estudiar una parte es posible develar su heurística o forma de pensar para dar solución a diversos problemas.

En particular es el “Método”, la pieza del rompecabezas que hila y da a conocer la forma de pensar de Arquímedes en sus demás trabajos. La importancia de este texto radica en el hecho de ver en el método investigativo vía mecánica, la potencia de la heurística como forma de pensar, validar y demostrar proposiciones. En general este consiste en:

> … primero, establece proporciones geométricas entre segmentos. Después, las transfiere a un hipotético esquema mecánico de carácter estático. A continuación, identifica líneas y pesos, y conjetura que todas las líneas de una determinada figura plana constituyen esa figura y que, asimismo, todos los planos de un sólido componen ese sólido. Por último, concluye la cuadratura o cubatura requerida (Yuste, 2009, p. 75).

Lo presentado anteriormente ejemplifica, según Yuste (2009), la forma como Arquímedes hilaba y organizaba sus demostraciones vía mecánica. Llevar este tipo de heurísticas al aula de clase, a partir de actividades que se aproximen a trabajar sobre uno o algunos elementos de la formas de razonar o pensar de Arquímedes, le permitiría al estudiante hacer parte activa en la construcción de su conocimiento, participando en la innovación y en el cambio con actividades de tipo histórico que atrapen su atención y que le permitan explorar otras formas de aprender y de construir heurísticas como herramienta en la solución de situaciones.

En este recorrido por algunas reflexiones en relación con los aportes de la HM en el aprendizaje de las Matemáticas, se reconoce la importancia del uso de la HM partiendo del trabajo sobre la génesis y los procesos que dieron paso a la elaboración de lo que hoy consideramos objetos matemáticos. Desde esta visión la HM en relación con la Educación Matemática permite:

-Entender diferentes formas de pensar a través de la historia.

-Identificar dificultades en la construcción de ideas-nociones matemáticas a partir de la historia.

-Reflexionar sobre las habilidades que pueden trabajarse en el momento de abordar e intentar entender un problema específico en la historia.

-Comparar lo antiguo con lo actual, estableciendo un valor para las técnicas modernas.

Estos elementos dotarán de sentido al quehacer tanto del docente de Matemáticas como a los estudiantes, permitiéndoles cambiar la perspectiva sobre la cual ven las Matemáticas, los procesos, habilidades y las heurísticas de los estudiantes.

Hasta este punto se ha hecho un recorrido, resaltando la importancia de vincular la HM en el aula con el Pensamiento Matemático, pero se hace igual de importante el reconocimiento de referentes desde otra de las vertientes de la propuesta; es decir desde el componente geométrico-métrico.

1.1.2 Desde algunos resultados de estudios en la comparación de magnitudes

Particularmente desde la comparación de magnitudes, los resultados de pruebas nacionales e internacionales, muestran por ejemplo las pruebas Saber entre el 2005 y el 2009 que el 75% de los estudiantes de Básica Primaria y el 78% de Básica Secundaria no alcanzan los desempeños planteados en los Estándares Básicos de competencias matemáticas. Profundizando en estos resultados en el componente geométrico-métrico, específicamente en la comparación de magnitudes; se presenta que:

> "…desde la escuela la comparación de magnitudes, carece de la comprensión de las características o atributos importantes de los objetos, tales como el reconocimiento visual, el análisis o caracterización de sus propiedades, la relación entre ellas y por último el desarrollo de secuencias lógicas que impliquen el conocer la noción, el significado y la comprensión del objeto matemático en cuestión y sus relaciones" (Gómez, 2011, p. 14).

Lo anterior evidencia dificultades que presentan los estudiantes colombianos, en el momento de enfrentarse a la solución de situaciones que involucran formas de razonamiento asociadas a la comprensión de características, propiedades de los objetos y la comparación de magnitudes

Para Colombia los resultados en TIMSS 2007, indican que los estudiantes colombianos, tanto en grado cuarto como en octavo, presentan dificultades en el manejo de conocimientos matemáticos básicos. En octavo el 61% tuvo logros inferiores a los descritos en la prueba para este grado, el 28% se ubicó en el nivel bajo, en tanto que el 9% en el medio, el 2% en el alto y ninguno en el avanzado. Un factor que puede ser asociado a las dificultades de los estudiantes es mostrado por el Reporte International de Matemáticas de las pruebas TIMSS en el capítulo 5 "*The Mathematics Curriculum*":

> En la mayoría de los establecimientos educativos se incluyen solo el 33% de los temas, dejando por fuera de los planes de estudios un 77% aproximadamente del contenido. El porcentaje del contenido enseñando corresponde a las temáticas sobre ángulos, las relaciones entre ellos, las propiedades de las formas geométricas y las figuras planas como triángulos y rectángulos, otros temas incluidos, aunque en menor proporción, tienen que ver, primero con las medidas de áreas irregulares, plano cartesiano, líneas de rotación y simetrías, reflexiones y rotaciones en uno y dos dimensiones, seguido con la medida de longitudes, áreas y volúmenes, perímetros, el teorema de Pitágoras, y las relaciones entre dos y tres dimensiones aún a menor escala. Esto nos da un panorama más amplio de algunos factores que determinan los resultados de Colombia en este componente (Gómez, 2011, p. 18).

En general se han evidenciado las dificultades a nivel nacional e internacional, así como factores asociados que influyeron directamente en el desempeño de los estudiantes y sobre todo en la ausencia de estrategias de inventiva y recursividad humana.

> Generalmente, en la escuela se instruye mayormente en temas como el cálculo de perímetros de figuras planas, y relaciones entre ángulos, sin darle mucha importancia a las transformaciones y la generalización al espacio tridimensional, observando que se dedica la mayor parte del tiempo al componente numérico, de hecho, actualmente la enseñanza de la geometría es más numérica y de aplicación de fórmulas que de descubrimiento y elaboración de supuestos comprobables, tal y como la vemos desde los ítems evaluados por el ICFES (Gómez, 2011, p.55).

Lo anterior permite evidenciar que en relación con la comparación de magnitudes, el trabajo se enfoca por lo general a la aplicación de fórmulas dejando de lado el descubrimiento, lo tangible, lo comprobable y las formas de razonamiento a los que recurren los estudiantes.

1.2. Planteamiento del problema

Lo presentado hasta el momento en el apartado, muestra un panorama en relación a: experiencias llevadas al aula donde se incorporó la Historia de las Matemáticas, resultados de pruebas y estudios sobre comparación de magnitudes destacando las dificultades que se presentan los estudiantes en términos de la aplicación de fórmulas que no entienden dejando de lado el descubrimiento y la ausencia de heurísticas o formas de razonamiento a las que recurren los estudiantes para dar solución a un problema. En síntesis, el interés principal de esta propuesta de investigación es reconocer si los estudiantes se aproximan a heurísticas parecidas a las usadas por Arquímedes de manera espontánea, a partir del diseño y aplicación de una secuencia de actividades que incorpora elementos de la heurística de Arquímedes, en la comparación de magnitudes apoyados en la experimentación física y la geometría dinámica con estudiantes de grado noveno.

Es así que esta propuesta busca dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué elementos de la heurística usada por Arquímedes es posible reconocer en los estudiantes de grado noveno de intuitiva, en el desarrollo de una secuencia de actividades en la comparación de magnitudes, apoyados en la experimentación física y la geometría dinámica?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Identificar qué elementos de la heurística de Arquímedes es posible reconocer en los estudiantes de grado noveno, en el desarrollo de una secuencia de actividades en la comparación de magnitudes apoyados en la experimentación física y el apoyo de Geogebra.

1.3.2 Objetivos específicos

-Diseñar e implementar una secuencia de actividades en el aula, que incorpore elementos de la heurística de Arquímedes en la comparación de magnitudes, apoyados en la experimentación física y la geometría dinámica.

-Describir las heurísticas de los estudiantes de grado noveno en la comparación de magnitudes, observadas en el desarrollo de la secuencia de actividades.

1.4. Antecedentes

El interés investigativo de esta propuesta se movió bajo tres grandes ejes organizados de manera jerárquica. En orden de importancia Historia de las Matemáticas en el proceso de enseñanza, comparación de magnitudes y apoyo en la geometría dinámica. A continuación presentaré los documentos y síntesis en relación con lo que plantea cada uno, aunque pueden encontrarse algunos que apunten a los tres ejes ya mencionados.

1.4.1 Desde la HM en la enseñanza de las matemáticas

En esta revisión sobre documentos relacionados con la Historia de las Matemáticas en el proceso de enseñanza, se encontraron los siguientes trabajos:

En el esbozo de algunos de los cuestionamientos que se abordaron en el estudio de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI), Fauvel & Keynes (1997) propusieron el análisis de doce preguntas enfocadas hacia el estudio de factores que involucran el papel de la HM, en el mejoramiento del proceso de enseñanza- aprendizaje de la matemática, en diferentes áreas, en estudiantes de diferentes etapas, medios y conocimientos. Entre las preguntas planteadas se destacan algunas que van en la línea de interés de la propuesta como por ejemplo: ¿cuáles son las relaciones entre el rol o roles que atribuimos a la historia y los caminos para introducirla o usarla en la educación?, ¿cuáles son las consecuencias para la organización y la práctica de clase?, ¿cuál es la experiencia nacional de incorporación de la HM en un documento curricular nacional y en una guía de política central?, estas preguntas fueron el punto de partida para la agenda del Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) en Japón en el año 2000.

Del estudio anterior, se obtiene el libro *History in Matematics Education*, (Fauvel & Maanen, 2002), en el cual se discute cómo la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas pueden ser mejorados con la integración de la HM en el aula, a través de la implementación de lecciones, tareas, actividades de aula, proyectos, evaluaciones etc. Profundizando en los resultados del estudio, el libro alude a la integración de la HM en el aula, al reporte de experiencias de aula, la integración de la HM perspectivas de investigación, el uso de textos originales escritos por grandes matemáticos del pasado etc. En general el texto permite develar una perspectiva de la relación entre la HM-Educación Matemática.

Siguiendo la línea de trabajo el artículo de la revista *Educational Studies in Mathematics*, "*A categorization of the "whys" and"hows" of using history in mathematics education*", Jankavist (1997), propone una forma de organizar y estructurar la discusión de por qué y cómo utilizar la HM en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como las interrelaciones entre los argumentos para el uso de la historia y los enfoques para hacerlo.

Otro aporte para la investigación es el artículo titulado "La historia de las Matemáticas en el aula", en Uno revista de didáctica de las Matemáticas, Fernández (2001) el cual presenta un recorrido entre la relación de la Historia de las Matemáticas y su enseñanza en España, reportando además experiencias que se han hecho fuera del país desde *National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM), *International Congress on Mathematical Education* (ICME). Puntualmente presenta ejemplos de cómo usar la HM en el aula, apoyándose en las posibles líneas de actuación de los docentes propuestos por Fauvel (1991).

En relación con experiencias de aula a nivel extranjero enfatizo en las siguientes:

El uso de la HM para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato (Salinas 2010). El propósito de este trabajo es presentar los resultados de un experimento de enseñanza, el cual utiliza la HM como recurso didáctico. Se aplica esta estrategia en un curso de bachillerato para introducir a los alumnos en el aspecto deductivo de la geometría euclidiana.

Historia, matemáticas y realidad. El caso de la medida en la formación matemática de futuros maestros (Figueiras 2003). Corresponde a una investigación con estudiantes del magisterio que cursan la asignatura matemáticas I en la Universidad Autónoma de Barcelona. El objetivo específico de la investigación fue analizar qué elementos para la reflexión, acerca de la naturaleza y la metodología matemática, aporta una perspectiva histórica, y cómo a partir de dichos elementos los estudiantes dan sentido a su actividad.

En síntesis la investigación propuso analizar cambios teniendo en cuenta cómo los estudiantes se relacionan con la actividad matemática. Como conclusiones atribuyen que la perspectiva histórica permite que modifiquen o maticen sus creencias, haciendo la actividad matemática más rica y compleja.

Historia y enseñanza de la matemática. Aproximaciones de las raíces cuadradas (Miralles 2005). En este trabajo se muestra la importancia de relacionar la HM con la enseñanza de las matemáticas, argumentando, como lo dice Miralles (2005) que “el objetivo central de la enseñanza de la matemáticas es el aprendizaje de las formas de razonamiento, y el conocimiento de su evolución histórica deberá ser un elemento de primera magnitud para esta enseñanza”; además, dicho conocimiento permitirá conocer la génesis de los conceptos y los problemas o necesidades existentes que en su momento les dieron origen. Ahora bien, el artículo muestra un ejemplo que pretende ilustrar una manera de utilizar la Historia en la enseñanza de la matemática; el ejemplo específico es el de estudiar los métodos para la determinación de aproximaciones racionales de las raíces cuadradas con estudiantes de primer curso de la Universidad Autónoma de Barcelona; allí se quiere mostrar un tema cuya aplicación ya no es importante con la aparición de las calculadoras, pero cuya importancia conceptual sigue vigente.

Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva (Olave 2005). Este documento corresponde al reporte de una experiencia que sin tener como intención inicial un enfoque histórico, resulta encontrando hallazgos importantes de los estudiantes respecto a heurísticas propuestas usadas por ellos para hallar el área bajo la curva, similares a la heurística usada por Arquímedes al solucionar este mismo problema. Como hallazgo importante de esta investigación se destaca la comparación del trabajo de los estudiantes con el realizado por Arquímedes. La intención de este trabajo es plantear una secuencia de actividades para introducir la integral definida teniendo en cuenta los aportes de la HM y tomando como punto de partida las estrategias espontáneas de los estudiantes.

En relación con experiencias de aula en nuestro país enfatizo en las siguientes:

Una experiencia de formación en “Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas” Guacaneme, Angel y Bello (2013). Presentan una experiencia en un programa de postgrado para la formación de profesores de matemáticas en el campo de estudio de la relación “Historia de las Matemáticas – Educación Matemática”. En esta experiencia se aborda el estudio de algunos asuntos matemáticos relacionados con la idea de curva, el papel de artefactos en la solución de problemas y en la construcción del conocimiento matemático y algunas implicaciones y posibilidades de participación de la Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas. Como conclusiones de esta experiencia destacan que el estudio de HM se convierte en fuente de herramientas para que el docente reflexione en relación con elementos que es su quehacer intervienen. Otro de los aportes corresponde a la identificación de una amplia literatura en la relación HM-EM, y el estudio de una pequeña muestra en la que se reconocen propuestas de colegas en su mayoría de otros países que han diseñado, implementado y evaluado, destacando así la posibilidad de replicarlas, adaptarlas en el contexto nacional.

El papel de la historia del álgebra en un curso de didáctica para la formación inicial de profesores de matemáticas (Triana y Manrique 2013). Se reporta el trabajo de grado realizado en el marco de una maestría, cuyo centro de interés y objeto de estudio fue caracterizar el papel y el uso que se hace de la Historia del Álgebra en el espacio académico “Enseñanza y aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra” para la formación inicial de profesores de Matemáticas (FIPM). El reporte del trabajo, enfatiza que el reconocimiento del desarrollo histórico de un determinado concepto, puede brindar valiosas herramientas a un profesor para cuestionar el para qué, por qué enseñar y cómo enseñar.

Construcción de actividades basadas en los acercamientos de la civilización China a la noción de aproximación (Estrada y Castiblanco 2009). En esta ponencia presentada en el 10º Encuentro de Matemática Educativa, se presentan algunos acercamientos de la civilización China a partir de la HM, diseñan actividades en relación con la noción de aproximación, y con base en estos se muestra parte de una actividad que busca fortalecer la comprensión de esta noción básica al cálculo. Este trabajo es un producto parcial del grupo de estudio en Historia de la Matemática del Departamento de Matemáticas del Colegio Gimnasio Moderno. En este momento el grupo centra su atención en el estudio de desarrollos históricos, que estén relacionados con nociones básicas del Cálculo como aproximación, variación, optimización y predicción, así como en el diseño de actividades que favorezcan la comprensión de estas nociones.

Arquímedes, Matemáticas y máquinas simples (Castañeda y Parra 2013), desarrollado por dos profesores de secundaría. Este trabajo consitió en hacer un estudio del libro "El Método" de Arquímedes, específicamente de dos proposiciones, con la intención de entender la heurística de Arquímedes que combinaba elementos de la geometría griega y la mecánica, para calcular áreas y volumenes de sólidos. Como instrumento de apoyo fue usado software de geometría dinámica para modelar las proposiciones, potenciando en los docentes la inventiva y recursividad humana. El trabajo llegó hasta esa etapa, cuestionándose acerca del impacto que podrían tener los aprendizajes al ser llevados al aula de clase.

1.4.2 Desde la comparación de magnitudes

En este sentido[4] se destaca el trabajo de Godino, Batanero y Font (2003), "Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros" y específicamente el capítulo V "Didáctica de la medida de magnitudes para maestros". Allí los autores reconocen la importancia del trabajo en relación con la comparación de magnitudes, enfocando la propuesta al reconocimiento y aplicación de destrezas prácticas por parte de los estudiantes, y no al mero cálculo o aplicación de fórmulas de manera directa.

Del trabajo denominado "No es lo que parece, de perímetros, áreas y volúmenes" Nobel & Di Franco (2013) en el VII CIBEM en la modalidad de comunicación breve, presenta una propuesta que se desarrolla en el marco de investigación de las Prácticas Intensivas en la Formación de Profesorado, de la Universidad Nacional de la Pampa. Como intención de este trabajo, está el aporte de elementos para la comprensión de una complejidad ya presente en relación con las vinculaciones que se construyen entre perímetros y áreas y entre áreas y volúmenes. Particularmente enfatizan en el análisis de la producción de estudiantes de diferentes niveles educativos.

[4] Se advierte que se citan algunos trabajos y autores en relación con la importancia de los hallazgos en la comparación de magnitudes, pero nuestra mirada se basa única y exclusivamente en la comparación de magnitudes propuesta por Arquímedes se describe en los apartados posteriores.

Como resultado de un trabajo que conjuga elementos de la HM y la comparación de magnitudes, se reporta la tesis de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander "Entendiendo el concepto de volumen usando ideas del principio de Cavalieri y material manipulable" (Arango, L & Trujillo, A. 2010). Esta da respuesta a la pregunta ¿Cómo los estudiantes de grado octavo comprenden el concepto de volumen usando las ideas de Cavalieri a partir de la manipulación de material concreto? El estudio concluye que el uso de material concreto encaminado a trabajar conceptos matemáticos, a partir de las ideas del principio de Cavalieri para el trabajo de calcular volúmenes de los sólidos que construyeron, permitieron a los estudiantes olvidarse un poco de las fórmulas enseñadas y pasar a trabajar con los conocimientos previos y algunas características de los sólidos.

El trabajo "De la generación Espontánea de las fórmulas de volumen a su construcción" Estrada (2008), presentado en las memorias del XIII Encuentro de Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, se muestra que las fórmulas de volumen del prisma, pirámide y esfera no se justifican adecuadamente a los estudiantes. Esta afirmación la sustenta a partir de un análisis de lo que aparece en los textos que tradicionalmente dominan la enseñanza y de su experiencia como docente. En la segunda parte presenta su propuesta para construir fórmulas del volumen de un prisma y una pirámide cualquiera, del área del círculo y la semiesfera y con base en esta última, obtener el volumen de la esfera.

A continuación se presentaran algunas experiencias relacionadas con apoyo de la geometría dinámica, en el proceso de enseñanza aprendizaje.

1.4.3 Desde la geometría dinámica

En particular son bastantes los seminarios, coloquios, encuentros que convocan a la comunidad académica a compartir experiencias en torno al reconocimiento y la potencia de la geometría dinámica como herramienta de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto de docentes como de estudiantes. Al respecto la literatura reporta innumerables aportes dentro de los que destaco:

Memorias del Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia, (MEN.2002). El proyecto surge como una estrategia para mejorar la calidad de la Educación Matemática y modernizar ambientes escolares. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia adelantó desde el año 2000 este proyecto, con el cual se buscó aprovechar el potencial educativo que brindan las tecnologías computacionales, específicamente las calculadoras gráficas y algebraicas. Un componente fundamental del proyecto es la formación de docentes, a través de la cual se esperaban cambios en las prácticas educativas usuales que permitieran modificar sustancialmente el currículo. La columna vertebral del proyecto es la formación permanente, intensiva y continuada de los docentes, centrada en la reflexión sobre su propia práctica en el salón de clase y en las posibilidades del recurso tecnológico.

Actas de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra. Este evento llevado a cabo en el año 2012 en Montevideo (Uruguay) tuvo como objetivos afianzar los vínculos de la comunidad Geogebra de la región, a través de la presentación y discusión de experiencias y resultados de investigaciones, apuntando a la generación de un ambiente que promoviera la formación de redes y comunidades de aprendizaje alrededor de Geogebra a nivel nacional y regional, así como la consolidación de las ya existentes. Otro de los objetivos consistió en brindar un espacio académico para la discusión y presentación de experiencias didácticas y de investigación en el uso y aplicación de nuevas herramientas y recursos en los diferentes niveles y contextos educativos. Entre la amplia variedad de trabajos presentados en la conferencia, destaco el trabajo denominado "conceitos aliados a novas tecnologias: geogebra e o cálculo da área de um círculo" (Souza, Santos, y Souza 2012) por la pertinencia y vinculación de la HM con los ambientes de la geometría dinámica. La propuesta combina la recuperación histórica de un método gráfico y la representación tecnológica actual, favoreciendo la interrelación entre la expresión matemática, su aplicación y construcción, enfatizando en un conocimiento autónomo del estudiante y no la memorización de fórmulas.

1.5. Aspectos metodológicos

Partiendo del objetivo general del trabajo, enfocado en identificar qué elementos de la heurística de Arquímedes es posible reconocer en los estudiantes de grado noveno, en el desarrollo de una secuencia de actividades en la comparación de magnitudes apoyados en la experimentación física y el apoyo de Geogebra, se estableció la metodología cualitativa de tipo descriptivo exploratorio. Como técnica se hizo uso de los registros documentales producto del desarrollo de la secuencia de actividades por parte de los estudiantes (presentadas en el capítulo 2, apartado 2.4.2 Recolección de los registros documentales.).

La investigación se ubica en lo que para (Denzin y Lincoln, 1994) es la investigación cualitativa: multimetódica, naturalista e interpretativa. Es decir, que las investigadoras e investigadores cualitativos indagan en situaciones naturales, intentando dar sentido o interpretar los fenómenos en los términos entregados a partir de lo construido en el marco teórico. Esta perspectiva recoge y comparte elementos característicos de otros autores; por ejemplo, partir del estudio de la realidad, de la indagación en situaciones naturales, de dar sentido y significado a la acción y discurso del otro, buscando rescatar lo esencial, a partir de reconocer en las acciones de los estudiantes elementos similares a los usados por Arquímedes en su heurística.

Esta investigación partió del análisis cualitativo bajo tres componentes principales (Strauss 2002), el primero los datos, provenientes de los registros documentales producto del desarrollo de la secuencia de actividades, el segundo los procedimientos que permitieron interpretar y organizar los datos a partir de codificar, que incluyó conceptualizar, reducir, elaborar y relacionar los datos y finalmente el tercer componente, los informes escritos. El proceso que se siguió para abordar los dos primeros componentes se describe en el apartado 2.4.2 denominado análisis preliminar.

1.6. Fases de la investigación

En la primera Fase Planeación, se consideró el proceso de fundamentación conceptual en el que se acopió y estudió literatura para los referentes teóricos que sustentaron el objeto de estudio, “la heurística de Arquímedes en la comparación de magnitudes”, el apoyo de geometría dinámica y la secuencia de actividades de acuerdo con los trabajos desarrollados por Herrera (2007), Castro (2007), Medina (1985), Torres (2010), Vega (1896), Babini (1948), Heath (1921).

En la segunda Fase desarrollo metodológico y comunicación de resultados, se diseñaron e implementaron las actividades de la secuencia, los registros documentales de los estudiantes como herramienta para sistematizar la secuencia didáctica en relación con la puesta en juego de algunos de los elementos de la heurística de Arquímedes en la comparación de magnitudes, apoyados en la experimentación física y la geometría dinámica.

En la tercera Fase de Sistema de evaluación, luego de la aplicación de la propuesta, se realizó la descripción, análisis y reporte de las acciones de los estudiantes que serían agrupadas en estrategias donde se reconoció que usaban elementos de la heurística de Arquímedes en la comparación de magnitudes.

A continuación, se realiza una descripción en la tabla 1 de cada una de las fases de desarrollo de la propuesta:

Tabla 1. Fases y etapas de la investigación.

Fase I. PLANEACIÓN	
FASE FUNDAMENTACIÓN	• Identificación de antecedentes y referentes teóricos de trabajos en relación con la heurística de Arquímedes. • Reportes de experiencias respecto al diseño y aplicación de actividades de aula apoyadas en software de geometría dinámica. • Elección del grupo de estudiantes de grado noveno y trabajo de inducción de software de geometría dinámica.
Fase II. DESARROLLO METODOLÓGICO	
FASE DE DISEÑO DE LA SECUENCIA	• Diseño de las actividades de la secuencia, apoyada particularmente en los resultados de la fase I. • Continuar con el trabajo de inducción al software de geometría dinámica con los estudiantes.
Fase III. COMUNICACIÓN DE RESULTADOS	
FASE DE APLICACIÓN DE LAS TAREAS DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES	• Aplicación de la secuencia de actividades. • Registro documental de la aplicación de la secuencia de actividades, para posterior sistematización.

FASE IDENTIFICACIÓN DE ELEMENTOS DE LA HEURISTICA DE ARQUÍMEDES	• Identificación de elementos de la heurística de Arquímedes a partir del análisis de las estrategias de los estudiantes en la comparación de magnitudes.
Fase IV. SISTEMA DE EVALUACIÓN	
FASE DE REPORTE Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	• Sistematización y análisis de los datos recogidos a partir de los registros documentales.
FASE CONSTRUCCIÓN INFORME FINAL	• Reportar las estrategias de los estudiantes que se aproximan con algún elemento de la Heurística de Arquímedes en la comparación de magnitudes.

CAPÍTULO 2: REFERENTES TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

2.1 Referentes teóricos

Aquí se hace un recorrido en torno a la heurística de Arquímedes, a partir de autores como Torres (1997), Baleiro (2004), Vega (1986), Castro (2007), Yuste (2009).etc. Se pretenden mostrar los aspectos teóricos, referentes conceptuales que permitieron el desarrollo del trabajo, entre ellos la trascendencia que tuvo el Método como síntesis documentada del trabajo investigativo de Arquímedes vía mecánica. A partir de esta síntesis fue posible develar algunos aspectos de la forma de pensar de Arquímedes frente al Método mecánico y la comparación de magnitudes, a partir de dos elementos destacados de la mecánica, el centro de gravedad y la ley de palanca, bajo los planteamientos del libro sobre el equilibrio de los planos I.

En el Método de los teoremas mecánicos, se mencionan algunos elementos matemáticos en la solución de nuevos problemas, teorizados por Arquímedes en el Libro sobre el equilibrio de los planos I y haciendo uso de la heurística lo llevó a la comparación de magnitudes; segmentos, áreas y volúmenes.

2.1.1 La importancia de la experimentación en Arquímedes

Históricamente fue reconocido el legado de Arquímedes en una doble actividad como matemático, desde la invención y la demostración asignando a la experimentación un lugar importante a la hora de conjeturar y verificar dentro de su método heurístico, que combinado con los desarrollos geométricos euclidianos lograron dar solución a diferentes situaciones. En una carta escrita por Arquímedes dirigida a Eratóstenes, reconoció la importancia de la vía heurística:

> Estoy convencido de que el método no es menos útil para la demostración de los teoremas. Pues algunas de las cosas que se me hicieron claras por vía "mecánica", se demostraron más tarde de forma geométrica, porque el modo de observación de este tipo carece de fuerza probatoria. Pues es más fácil realizar la demostración cuando previamente se ha obtenido una idea de la cuestión por vía "Mecánica",

> que cuando no se cuenta con este conocimiento previo" (Heiberg, 1909, p. 8).

De esta forma Arquímedes relata y le da a conocer a Eratóstenes su método de investigación vía mecánica, caracterizado por el uso de postulados y proposiciones provenientes de la experimentación con centros de gravedad y puntos de equilibrio, desconocido por muchos y con rastros para algunos de su posible existencia. Fue hasta 1906 cuando Heiberg en una situación particular, encontró la memoria metodológica que permitiría develar la forma como Arquímedes abordaba la solución de problemas planteados en la época.

2.1.2 La heurística como forma de pensar ¿Qué es lo que permite hacer la heurística?

Como se ha reconocido anteriormente, Arquímedes llevaba una doble actividad como matemático, desde la invención y la demostración, particularmente este trabajo hace referencia a la heurística de Arquímedes a partir del trabajo de Guevara (2005) quien por su parte propone tres vertientes en la metodología empleada por Arquímedes:

> en las leyes geométricas; una intermedia, de factibilidad del resultado comprobado a través de instrumentos; y finalmente, la demostración empleando —en algunos casos— el método de exhaución que proporcionaba la demostración formal de lo que se auguraba en la fase previa —es decir, la de invención. Pero en sus trabajos sólo se encontraba la exposición de la última etapa, es decir, el enunciado y la demostración, quedando oculto el proceso creativo que daba lugar al enunciado (Guevara, 2005, p.13).

Dentro de estas tres vertientes, interesa para este trabajo el proceso creativo oculto, sin desconocer las otras dos vertientes que permiten caracterizar los elementos puestos en juego por Arquímedes a la hora de solucionar situaciones. En este sentido se reconoce que en ese proceso creativo caracterizado por presentar nuevas formas de pensar, diferentes a las conocidas para la época y que iban en contravía por el uso de máquinas o instrumentos para su demostración, Guevara (2005) destaca que “lo que otros despreciaron: lo infinitesimal, lo mecánico, lo instrumental, así como todo lo que le presentó su entorno real y que lo consideraba como un potencial elemento para su investigación; en esta dirección se tiene que aprovechó los casos de lo irregular, lo tangible y todo lo que pudiera ser construible" (p. 14), lo anterior permite evidenciar en la heurística de Arquímedes acciones y formas de abordar una situación tomando a la experimentación como fuente de conocimiento y recurso para la solución de una situación. Este método de investigación innovador incluso para nuestros días, denominado el Método, muestra cómo a partir de procedimientos mecánicos no rigurosos, logró hallazgos de valiosa importancia que posteriormente fueron demostrados formalmente. En general la heurística de Arquímedes Guevara (2005) combinaba elementos de la mecánica y la geometría posibilitando observar los métodos utilizados en sus invenciones matemáticas.

Hasta este momento se ha hecho un recorrido reconociendo en la heurística de Arquímedes su potencial, pero surge una inquietud sobre qué elementos se destacaron y cómo fueron utilizados por Arquímedes para llegar a resultados tan destacados. Para buscar dar respuesta a esta pregunta, partiremos del reconocimiento del Método como una recopilación hecha por Arquímedes de su método de investigación, para darlo a conocer a Eratóstenes. Dentro de este trabajo Arquímedes reconoce en el prefacio tres aspectos clave Vega (1986):

1. La diferencia entre una consideración de resultados geométricos por vía mecánica y una demostración geométrica.
2. Un orden cronológico entre ambos procedimientos que marca la anterioridad del hallazgo "mecánico", al menos por lo que se refiere a ciertas proposiciones expresas.
3. Dos servicios heurísticos del método mecánico, uno principal, es el abordaje de diversas cuestiones matemáticas o la determinación del centro de gravedad. Las dos primeras tienen raigambre tradicional; la tercera responde en cambio a una investigación original y típicamente arquimediana (p.397).

Estos tres aspectos destacan en la vía mecánica elementos de la heurística de Arquímedes. En el primero se recurre a la mecánica como medio de experimentación, bajo algunos principios teorizados por Arquímedes en el libro Sobre el equilibrio de los planos I, para posteriormente acudir a la geometría euclidiana, reconociendo que para Arquímedes era más fácil demostrar a partir de adquirir cierto conocimiento mecánicamente que sin tener una idea previa. En el segundo se parte de hallazgos de la mecánica (libro sobre el equilibrio de los planos I y II), para posteriormente apoyarse en la demostración geométrica, y finalmente en la tercera donde entra a jugar el centro de gravedad y la estrategia de encontrar el área de una figura curvilínea en relación a una figura rectilínea.

En la heurística de Arquímedes se reconocen algunos elementos que aparecen en el preámbulo del Método según Vega (1986) el Método, en su estructura interna, incluye dos tipos de consideraciones o hipótesis:

> "1. Hipótesis mecánicas propiamente dichas"baricéntricas" en términos de Dijksterhuis, i.e. consistentes en nociones y proposiciones de estática acerca de centros de gravedad, palancas y condiciones de equilibrio.
>
> 2. Hipótesis composicionales, "de indivisibles" en términos de Dijksterhuis, que envuelven la composición de áreas por cuerdas o líneas paralelas a una línea dada, y la de volúmenes por planos o secciones paralelas a una dada. (p.413).

Estos dos tipos de hipótesis usadas por Arquímedes en su heurística, corresponden con los lemas teorizados por Arquímedes vía mecánica (González 1993):

> 1. Si de una magnitud se quita otra magnitud, y un mismo punto es el centro de gravedad de la magnitud entera y de la que se ha quitado, el mismo punto es centro de gravedad también de la magnitud restante.
> 2. Si de una magnitud se quita otra magnitud, y la magnitud entera y la que se ha quitado no tienen el mismo centro de gravedad, el centro de gravedad de la magnitud restante se encuentra sobre la prolongación de la recta que une los centros de gravedad de la magnitud entera y la magnitud quitada, situado a una distancia cuya razón con la recta que

> une dichos centros de gravedad es la misma que la del peso de la magnitud quitada con el de la magnitud restante.
> 3. Si los centros de gravedad de tantas magnitudes como se quiera se encuentran sobre una misma recta, el centro de gravedad de la magnitud compuesta de las magnitudes consideradas estará también sobre la misma recta.
> 4. El centro de gravedad de una recta cualquiera es su punto medio.
> 5. El centro de gravedad de un triángulo cualquiera es el punto en que se cortan las rectas que unen los ángulos del triángulo con los puntos medios de los lados.
> 6. El centro de gravedad de un paralelogramo cualquiera es el punto en el cual convergen las diagonales.
> 7. El centro de gravedad de un círculo es el mismo centro del círculo (p. 1125).

Estos lemas básicamente describen propiedades de los centros de gravedad. Para nuestro caso enunciaremos únicamente los siete primeros que corresponden al trabajo con figuras planas y que coinciden con el trabajo propuesto para ser desarrollado por los estudiantes en la secuencia de actividades. En estos lemas es posible identificar elementos básicos de la teorización hecha por Arquímedes que consigna en el Método y en el Libro sobre el equilibrio de los planos I, según Castro (2007):

> 1. Todas las figuras tienen peso.
> 2. El peso de cada figura es igual a su magnitud geométrica; por ejemplo, el peso de una línea es su longitud, el peso de una superficie es su área, etc.
> 3. Todas las figuras tienen centro de equilibrio, o como se llama modernamente centro de masa, por ejemplo, el centro de masa de un círculo es su centro geométrico, similarmente, el centro de masa de un triángulo equilátero es su centro geométrico.
> 4. Cada figura, según el caso, se puede descomponer en infinitas figuras del mismo tipo y de orden inferior. Por ejemplo, un círculo es la unión de todas sus cuerdas paralelas a una cuerda dada. Este último principio fue la fuente de inspiración para el posterior trabajo de Cavalieri. Como

> todas las figuras tienen peso, utilizando una balanza y equilibrando figuras se puede determinar magnitudes…(p.23).

Lo presentado hasta el momento permite vislumbrar la heurística de Arquímedes a partir de lemas, proposiciones y resultados vía mecánica, producto de la experimentación. Estos le permitieron salir de la tradición de la época griega, llegando a demostraciones nunca antes vistas, a partir del uso de instrumentos que mecánicamente le permitieron llegar a hallazgos sorprendentes incluso para la época. En general la heurística de Arquímedes según Yuste (2009):

> Traslada su investigación a una máquina simple, como la balanza, comprobando las relaciones de equilibrio existentes en ella e introduciendo medidas unitarias de peso; éstas, en el contexto de la geometría, son los indivisibles: las líneas y los planos; pero con espesor o anchura, lo cual los hace distintos a los definidos por Euclides. Expresado de modo sucinto, el método de Arquímedes es el siguiente: primero, establece proporciones geométricas entre segmentos. Después, las transfiere a un hipotético esquema mecánico de carácter estático. A continuación, identifica líneas y pesos, y conjetura que todas las líneas de una determinada figura plana constituyen esa figura y que, asimismo, todos los planos de un sólido componen ese sólido. Por último, concluye la cuadratura o cubatura requerida (p.75).

Esta forma de pensar combinaba con astucia elementos de la mecánica con la geometría, relacionando a partir de la ley de la palanca y el centro de gravedad acciones con figuras planas que debían ser equilibradas, sin olvidar rasgos y características físicas de las mismas tales como la asociación entre área y peso (pesar geométricamente áreas, volúmenes) o la determinación del centro de gravedad (en los que se tiene en cuenta la concentración del peso) a partir de elementos de la geometría euclidiana.

A continuación ampliaremos el trabajo a partir de un par de ejemplos donde se combinan los elementos fundamentales de la mecánica usados por Arquímedes (ley de la palanca y centro de gravedad) en la solución de situaciones donde es puesta en juego su heurística.

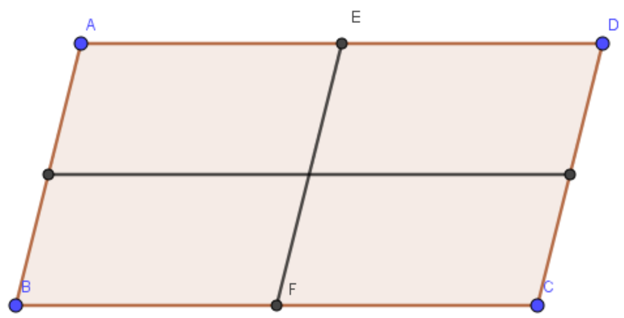
2.1.3 El centro de gravedad como medio para comparar magnitudes

En seguida se presentan dos proposiciones trabajadas por Arquímedes en su libro sobre el equilibrio de los planos I. Apoyados en Geogebra se pretende ejemplificar y destacar algunos de los elementos de la heurística, advirtiendo que se está haciendo un tratamiento con herramientas que proporciona el software y que estas no corresponden al método de funcionamiento propuesto por Arquímedes en su época; solo recurrimos a estas como forma de aterrizar y entender tan importante propuesta de investigación, que permita posteriormente encontrar rastro de si verdaderamente los estudiantes transitan por algunos de los elementos de la heurística o se acercan.

2.1.3.1 Sobre el equilibrio de los planos. Proposición 9

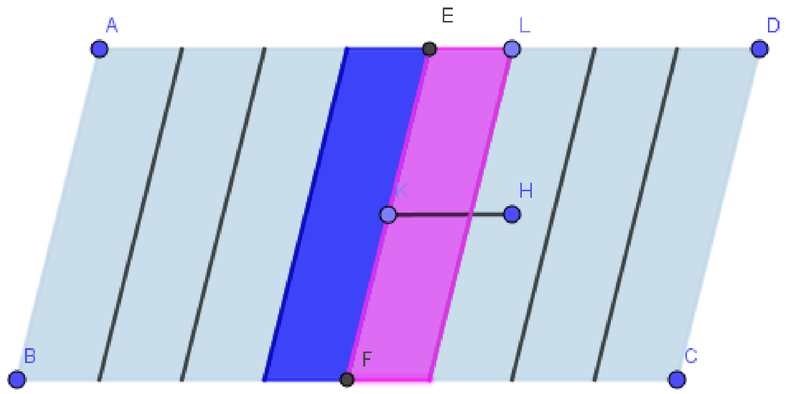
En esta proposición Arquímedes demostró que el centro de gravedad de un paralelogramo está en la recta que une los puntos medios de los lados opuestos.

Figura 2. Construcción en Geogebra del centro de gravedad de un paralelogramo.



En esta proposición Arquímedes quería probar que el centro de gravedad del paralelogramo ABCD está en la línea EF. Para ello parte que el paralelogramo compuesto por infinitos segmentos que tienen su centro de gravedad en la recta EF, concluyendo que el centro de gravedad de todos los segmentos está sobre la recta EF. La manera en la que Arquímedes razona es la siguiente Montesinos (2003):

Figura 3. Construcción en Geogebra del centro de gravedad de un paralelogramo prueba.



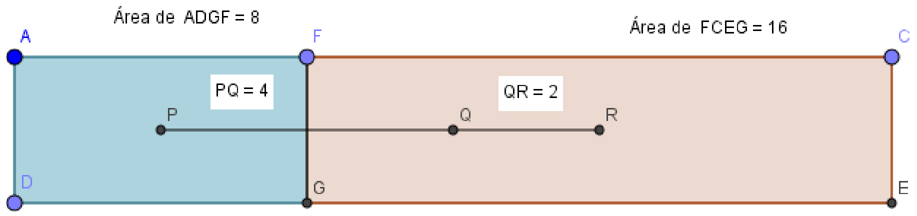
Supongamos que el centro de gravedad no está en EF, sea éste H. Tracemos HK paralela a AD y a BC, que corta a EF en K. Entonces es posible por bisección determinar el segmento EL de manera que EL < KH. Ahora dividimos EA en las mismas partes que ED y trazamos paralelas a AB y DC. Tenemos así un número par de paralelogramos iguales, tal que sus centros de gravedad estarán situados a igual distancia a lo largo de una recta; por lo tanto, el centro de gravedad de todo el conjunto estará situado en la línea que une los centros de gravedad de los dos centrales [Prop. 5 -Corolario 2 del Libro I de *Sobre el equilibrio de los planos*]; pero esto es imposible porque H está fuera de los dos paralelogramos centrales. Obsérvese cómo negando lo que queremos demostrar y aplicando la bipartición *un número finito de veces*, encontramos una contradicción que nos permite afirmar la veracidad de la proposición. Podemos decir que esta sencilla demostración resume de manera admirable la noción de "rigor matemático" en Arquímedes (p 37).

Esta forma de razonar permite ejemplificar la manera como Arquímedes parte de lo que quiere demostrar, en este caso que el centro de gravedad no está en EF. Luego muestra una descomposición del paralelogramo en igual número de partes respecto a la recta EF (en este caso hace las veces de punto de apoyo), mostrando así que los centros de gravedad estarán situados a igual distancia de la recta. De esta forma llega a una contradicción que permite determinar el centro de gravedad del paralelogramo, por la intersección ya sea de las rectas construidas a partir de los puntos medios de los lados opuestos o por la intersección de las diagonales construidas en el paralelogramo. Para el caso de las diagonales, construye una de ellas que le permite dividir el paralelogramo en dos triángulos que tienen igual cantidad de área. Nuevamente utiliza la diagonal como fulcro y los centros de gravedad de los triángulos para hallar el punto donde debe apoyarse el triángulo para permanecer en equilibrio.

2.1.3.2 Sobre el equilibrio de los planos proposición 8

En esta proposición se muestra el uso geométrico de la balanza se enuncia de la siguiente forma tal como aparece en el Libro I sobre el equilibrio de los planos: Si AB es una magnitud cuyo centro de gravedad es C, y AD es una parte de la misma, cuyo centro de gravedad es F, entonces el centro de gravedad de la diferencia estará en el punto G de FC tal que:

Figura 4. Construcción en Geogebra proposición 8 libro I.



En la figura 4, se observa una construcción en Geogebra que permite ejemplificar algunos resultados del trabajo de Arquímedes en la proposición 8, al respecto Montesinos (2003) presenta sus consideraciones:

> Si aprovechamos las posibilidades dinámicas de Geometer's Skechpad y desplazamos el punto D, podemos ver que se conserva la igualdad de razones enunciada, lo que nos permite pasar de una relación entre áreas a una relación entre segmentos, es decir, comparamos (medimos) áreas a través de la comparación (medida) de segmentos. Esto puede ser considerado como una reducción de un problema más complicado a otro más sencillo (p.38).

En esta proposición se muestra el uso geométrico de la balanza, donde la comparación de magnitudes se da a partir de pesar geométricamente figuras, es decir a partir de la asociación que logra hacer entre área y peso para transferir a su hipotética balanza, en este caso áreas. Arquímedes logra llegar o reducir el problema de la comparación de áreas a la comparación de segmentos, aquí se evidencia nuevamente la combinación mecánica y geometría, por un lado se hace uso de la ley de la palanca y el centro de gravedad, por el otro al cálculo de áreas y comparación de magnitudes a partir de la comparación entre la longitud de segmentos.

Hasta el momento se ha presentado como desde la mecánica Arquímedes recurrió a la ley de la palanca y al centro de gravedad con herramientas de su método heurístico. En seguida se profundiza a partir de algunas consideraciones de estos dos importantes elementos de la mecánica usada por Arquímedes en sus descubrimientos.

2.1.4 Ley de la palanca

La ley de la palanca fue sin lugar a dudas uno de los aportes más significativos, conocidos y aplicados aún en la actualidad. Al parecer como lo afirma Sherman (1999) "Arquímedes desarrolla la ley como el primer paso en su teoría del centro de gravedad. En lugar de decirlo como un hecho, lo deriva de principios más básicos en el estilo de la geometría de Euclides, escrita una generación o dos antes que él" (p 7). Esta teorización alcanzada por Arquímedes fue plasmada en sus trabajos, bajo principios que consideraron condiciones de equilibrio y desequilibrio con palancas (de brazos iguales y desiguales), a las que se querían equilibrar (con pesos iguales y desiguales). Producto de esta teorización surgieron los postulados y las proposiciones, reportadas en libro Sobre el equilibrio de los planos I Torres (1997):

> **Postulado 1** Pesos iguales a distancias iguales están en equilibrio, y pesos iguales a distancias desiguales no están en equilibrio, y hay inclinación hacia el lado del peso que está a mayor distancia.
>
> **Postulado 2** Si dos pesos a distancias cualesquiera están en equilibrio y a uno de ellos se le añade algo, entonces dejan de estar en equilibrio y hay inclinación hacia el lado del peso al que se le ha añadido.

Postulado 3 De manera similar, si se quita algo a alguno de los pesos, entonces dejan de estar en equilibrio y hay inclinación hacia el peso no disminuido.

Postulado 4 Los centros de gravedad de figuras planas iguales que superpuestas coinciden, también coinciden.

Postulado 5 Los centros de gravedad de figuras desiguales, pero semejantes, están situados semejantemente.

Postulado 6 Si dos pesos están en equilibrio a cierta distancia, entonces otros pesos equivalentes a aquéllos también estarán en equilibrio a la misma distancia.

Postulado 7 En cualquier figura cuyo perímetro es cóncavo, el centro de gravedad se encuentra dentro de la figura.

Proposición 1 Pesos que se equilibran a distancias iguales son iguales.

Proposición 2 Pesos iguales a distancias desiguales, no van a estar en equilibrio, se van a inclinar hacia el lado del peso mayor.

Proposición 3 Pesos desiguales se van a equilibrar a distancias desiguales, el mayor peso estando a una distancia menor.

Proposición 8 Si AB es una magnitud cuyo centro de gravedad es C, y AD es una parte de la misma, cuyo centro de gravedad es F, entonces el centro de gravedad de la diferencia estará en el punto G de FC tal que: GC:CF = (AD):(DE)

Proposición 9 El centro de gravedad de cualquier paralelogramo está sobre la línea recta que une los puntos medios de los lados opuestos.

Proposición 10 El centro de gravedad de un paralelogramo es el punto de intersección de sus diagonales

Lema 6 El centro de gravedad de un círculo, es también el punto que es el centro del círculo (p.85)

2.1.5 Centro de gravedad

Hasta el momento se ha hecho mención al término centro de gravedad y tal como lo hizo Arquímedes en sus tratados parecía ya definido dentro de la comunidad científica. Los griegos trabajaron respecto a tres definiciones que para Arquímedes al parecer le eran familiares, advirtiendo que éstas son de tipo físico y no matemático Sherman (1999):

> 1. El punto en el cual el objeto puede ser suspendido y permanecer inmóvil, sin importar en qué posición se coloca.
> 2. El punto común a todas las líneas verticales a través de puntos de suspensión.
> 3. El punto común a todas las líneas en las que el objeto se equilibra (p.16)

Ninguna de estas definiciones pudo haberle servido a Arquímedes en su método de investigación heurístico, por el contrario, su definición de centro de gravedad requería de propiedades para poder calcularlo teóricamente, los tres principios son Sherman (1999):

> I. Los centros de gravedad de figuras congruentes o similares están situados de manera similar.
> II. El centro de gravedad de una figura convexa se encuentra dentro de la figura.
> III. Si un objeto se corta en dos piezas, su centro de gravedad, C, se encuentra en la línea segmento que une los centros de gravedad de las piezas (p.17).

Estas propiedades pueden mostrarse por ejemplo para el caso de un triángulo equilátero, donde el centro de gravedad podría obtenerse usando el primer principio de las figuras congruentes construido a partir de las líneas que unen cada vértice al punto medio del lado opuesto (mediana), o como el centro de rotación que coincide con el centro de gravedad. Partiendo de estas propiedades Arquímedes llegó a valores teóricos del centro de gravedad para figuras de una, dos y tres dimensiones Torres (2010):

> Figuras de una dimensión
> Centro de gravedad de una línea recta: El centro de gravedad de cualquier línea recta es el punto de bisección de la línea recta (El Método).
> Figuras de dos dimensiones
> El centro de gravedad de un paralelogramo es el punto de intersección de sus diagonales (Libro sobre el equilibrio de los planos I, proposición 10)

> El centro de gravedad de cualquier paralelogramo es el punto en el que las diagonales se encuentran (El Método).
>
> Centro de gravedad de un triángulo: se encuentra en la intersección de las líneas trazadas que van de los dos ángulos hacia los puntos medios de los lados opuestos (Libro Sobre el equilibrio de los planos, Libro I, Proposición 14)
> El centro de gravedad de cualquier triángulo se encuentra en la intersección de las líneas trazadas desde dos ángulos hacia los puntos medios de los lados opuestos respectivamente (El Método).
>
> Centro de gravedad de un círculo es el punto que también es el centro (El Método) (p.135).

2.1.6 Apoyo del software Geogebra

En este apartado se presenta una aproximación en relación con el software Geogebra, pero antes de avanzar en torno a la importancia de este instrumento en la propuesta, se advierte que la decisión de trabajar con este software obedeció: primero, a la posibilidad de contar en la institución con una sala de portátiles con el software libre instalado y, segundo, con poder replicar una experiencia de trabajo con Geogebra, en la Especialización en Educación Matemática con énfasis en Historia de las Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional, que le aportó a mi saber matemático a partir de la incorporación de este instrumento en el aula en el contexto de la HM.

Hablar del apoyo del software Geogebra implica considerar desde la postura de Borwein (2004; citado por Acosta, 2005):

> La utilización de computadoras en la investigación Matemática como una práctica legítima, para lo cual propone definir las matemáticas experimentales como aquellas que:
> 1. Utilizan la computadora para generar datos y poner a prueba sus conjeturas.

> 2. Hacen énfasis en los procesos de construcción del conocimiento más que en su formalización.
> 3. Reconocen las ventajas de la formalización del conocimiento, pero no consideran dicha formalización como condición indispensable para la investigación y reconocen la legitimidad del conocimiento validado por la experiencia, en espera de una posible formalización (p.124).

Esta postura combinada con el apoyo del software Geogebra en el desarrollo de la secuencia de actividades, permite:

- Estudiar relaciones de tipo geométrico-mecánico, ley de la palanca, centro de gravedad y algunos elementos de la geometría euclidiana.
- Articular relaciones de tipo geométrico que Arquímedes usaba en su trabajo.
- Crear relaciones de dependencia entre los objetos construidos, manteniendo invariantes las propiedades iniciales, a pesar de animar algunos puntos móviles en la construcción.
- Ampliar las consideraciones de tipo experimental y dotar de significado el estudio de algunas proposiciones y postulados del libro Sobre el equilibrio de los planos I.

En general acciones como las ya mencionadas, mediadas por el interés de estudiar una forma de pensar, permiten indagar sobre los principios de la mecánica (ley de la palanca y centro de gravedad) y elementos de la geometría euclidiana que influyeron de manera significativa en el proceso de estudio del Método de los teoremas mecánicos de Arquímedes.

Hasta este momento se han mostrado algunos elementos para definir las matemáticas experimentales apoyadas en el uso de computadores, pero de igual manera es pertinente definir la geometría dinámica experimental según Acosta (2005)

> Como una práctica geométrica que privilegia la observación y manipulación de los objetos geométricos en la pantalla de la computadora, con la intención de emitir conjeturas sobre las

> propiedades geométricas de dichos objetos, conjeturas que se ponen a prueba mediante el arrastre, la medición y la construcción de objetos auxiliares (p 5)

El apoyo de Geogebra transforma de manera determinante acciones que a lápiz y papel resultarían más complejas. Por ejemplo al representar gráficamente la construcción hecha por Arquímedes de la cubatura de la esfera en lápiz y papel y compararla con una representación hecha en Geogebra, en la primera es posible utilizando elementos de la geometría euclidiana, demostrar las proporciones y las relaciones de manera estática. En cambio en la segunda, además de verificar dichas proporciones, es posible ver que se cumple para un número más amplio de casos; modificando un elemento de la construcción y observando cómo se mantienen constantes las relaciones, en este caso numéricas propuestas en la demostración.

2.2 Referentes metodológicos

2.2.1 Elementos de la heurística de Arquímedes usados en la secuencia de actividades

Lo mostrado hasta el momento, permitió estructurar y organizar el diseño de la secuencia de actividades identificando los elementos que caracterizaron la teorización que Arquímedes hizo al respecto y que apareció en el libro del "Método" y en "Sobre equilibrio de los planos I y II", Castro (2007).

Producto de esta estructura y organización, se obtuvo el diseño de seis actividades, las dos primeras corresponden a los elementos de la heurística de Arquímedes desde las hipótesis mecánicas. Dichas hipótesis se nutren de nociones y proposiciones de la estática acerca de centros de gravedad, palancas y condiciones de equilibrio que experimentalmente pueden ser puestas a prueba con el apoyo de instrumentos que permiten, manipular, mover, interactuar, conjeturar, etc.

La tercera actividad corresponde a los elementos de la heurística de Arquímedes desde las hipótesis composicionales apoyadas en software de geometría dinámica, que se valen de la composición de áreas por cuerdas o líneas paralelas a una dada teniendo en cuenta elementos de la geometría euclidiana como puntos medios, construcción e intersección de diagonales, descomposición de figuras planas, etc.

Las tres actividades restantes corresponden a la combinación de hipótesis mecánicas y composicionales apoyados en Geogebra, las actividades combinan elementos de la Mecánica con la Geometría, relacionando a partir de la ley de la palanca y el centro de gravedad acciones con figuras planas que deben ser equilibradas, sin olvidar rasgos y características físicas tales como la asociación entre área y peso o la determinación del centro de gravedad a partir de la geometría euclidiana.

En la tabla 2 se organizó información sobre la secuencia de actividades

Tabla 2. Secuencia de actividades.

Intervención en el aula

ELEMENTOS DE LA HEURISTICA DE ARQUÍMEDES	TIEMPO	ACTIVIDAD	METODOLOGÍA	MATERIAL DE APOYO	HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
HIPÓTESIS MECÁNICAS	(2 sesiones de 90 minutos)	**1.** Eureka...	Grupo 3 estudiantes-socialización	Base, figuras planas, regla	Arquímedes libro Sobre el equilibrio de los planos
		2. Dame un punto de apoyo y moveré el mundo		Balanza, clips	
HIPÓTESIS COMPOSICIONALES	(1 sesión de 90 minutos)	**3.** Puede hallarse virtualmente el centro de gravedad		Geogebra	Arquímedes libro Sobre el equilibrio de los planos
COMBINACIÓN HIPÓTESIS MECÁNICAS HIPÓTESIS COMPOSICIONALES	(3 sesiones 90 minutos)	**4.** Sobre el equilibrio de los planos	Individual-socialización	Construcción Geogebra	Libro I, proposición 8 Sobre el equilibrio de los planos
		5. La balanza geométrica		Construcción Geogebra	Libro I, proposición 8 Sobre el equilibrio de los planos
		6. La cuadratura de la esfera		Applet Geogebra, construcciones auxiliares	Libro el Método, proposición 8

La tabla 2 condensa información sobre, las seis actividades diseñadas para ser desarrolladas con los estudiantes de grado noveno. Las actividades planeadas fueron desarrolladas en grupos de dos estudiantes, esto con la intención de que pudieran interactuar entre ellos y generar apoyo en las estrategias que pusieron en juego en el desarrollo de cada una de las actividades. Finalmente cada actividad contó con un material de apoyo y un referente teórico desde las fuentes usadas para su diseño.

2.3 Descripción de los instrumentos de recolección de la información

A continuación se presentan las seis actividades, la actividad número uno y dos trabaja las hipótesis mecánicas con el apoyo de material concreto a partir de la experimentación y las actividades de la cuatro a la seis que trabajan las hipótesis composicionales, se apoyaron en el software Geogebra.

2.3.1 Actividades basadas en hipótesis mecánicas

En este trabajo las actividades basadas en hipótesis mecánicas, hicieron parte de las actividades que desarrollaron los estudiantes apoyados en el uso de material concreto, sobre el cual podían manipular de manera física y poner en juego nociones y proposiciones de la estática tales como centros de gravedad, ley de palanca y condiciones de equilibrio, para dar solución a las situaciones planteadas en la guía del estudiante.

2.3.1.1 Guía del estudiante actividad número uno

Esta guía de trabajo tenía como objetivo encontrar de manera experimental, el lugar donde debía apoyarse cada figura geométrica para que se mantuviera en equilibrio. Para ello se hizo entrega de cinco figuras elaboradas en cartón y un soporte como punto de apoyo.

Figura 5. Guía del estudiante número uno.

EUREKA… (Arquímedes)

<u>Materiales:</u> Soporte de madera o base, figuras geométricas en cartón, lápiz, regla, plastilina, cuerda, tuerca.

Cada grupo tendrá seis figuras geométricas diferentes, cada vez que logren ponerlas en equilibrio sobre el tornillo deben decir eureka !!!

Luego de realizar la experiencia, responda las siguientes preguntas:

1. Describan el proceso que realizaron para mantener las figuras sobre el tornillo.

2. ¿Cómo explican que cada figura pueda mantenerse en equilibrio sobre el tornillo?

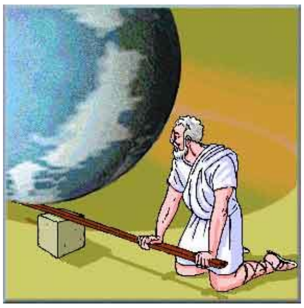
3. Utilizando algunos de los materiales con los que cuentan, ¿cómo podrían utilizarlos para determinar el lugar o los lugares donde deben apoyar la figura para que se mantenga en equilibrio?

4. Describan el proceso que debe realizarse para equilibrar:
    a. El paralelogramo
    b. El círculo
    c. El triángulo
    d. La figura irregular
    e. El cuadrado

2.3.1.2 Guía del estudiante actividad número dos

Esta guía de trabajo tuvo como objetivo experimentar y comprobar los postulados del libro de Arquímedes "Sobre el equilibrio de los planos I", haciendo uso de la palanca en la comparación de magnitudes. Para ello se entregó una balanza y unos clips para que realizaran el proceso de experimentación.

Figura 2. Guía del estudiante número dos.



DAME UN PUNTO DE APOYO Y MOVERÉ EL MUNDO…
(Arquímedes)

EXPERIMENTO 1

a. Observen el instrumento que cada grupo tiene y descríbanlo. Ubiquen un clip a una distancia de 4 cm del punto de apoyo del lado izquierdo del instrumento, y otro clip del mismo peso a una distancia de 6 cm del lado derecho del centro del instrumento.
b. ¿Qué observan, como explican lo que acaba de ocurrir en el experimento?
c. ¿Qué pasará si ubican los clips en otros lugares? , den un ejemplo de donde los ubicaron?
d. ¿Qué deben tener en cuenta para que el instrumento se mantenga en equilibrio?

EXPERIMENTO 2

a. Ubique un clip a una distancia de 4 cm del punto de apoyo del lado izquierdo de la balanza, y otro clip del mismo peso a una distancia de 4 cm del lado derecho de la balanza.
b. ¿Qué observan?, ¿cómo explican lo que acaba de ocurrir en el experimento?
c. Ahora manteniendo las condiciones del literal a, suspendan a cada lado de la palanca tres clips y observen qué ocurre, se mantiene en equilibrio o la balanza se inclina hacia un lado.
d. Retiren los clips de la balanza y ubiquen tres clips a una distancia de 6 cm del punto de apoyo del lado izquierdo de la palanca, y otros tres clips del mismo peso a una distancia de 6 cm del lado derecho de la balanza pero suspendidos de un hilo de diferente longitud.
e. ¿Qué observan?, ¿cómo explican lo que acaba de ocurrir en el experimento?

EXPERIMENTO 3

a. Tomen 5 clips del mismo peso. Ubiquen dos de esos clips en la parte izquierda de la balanza a una distancia de 6 cm respecto al punto de apoyo. Ubiquen los otros tres clips del otro lado de la balanza a una distancia de 6 cm respecto del punto de apoyo. ¿Se mantendrá la balanza en equilibrio o se inclinará hacia algún lado?
b. Tomen 5 clips del mismo peso. Ubiquen dos de esos clips en la parte izquierda de la balanza a una distancia de 6 cm respecto al punto de apoyo. Ubiquen los otros tres clips del otro lado de la balanza a una distancia de 4 cm respecto del punto de apoyo. ¿Se mantendrá la balanza en equilibrio o se inclinará hacia algún lado?
c. Expliquen lo que ocurre en el literal a y compárenlo con lo ocurrido en el numeral b, ¿qué pueden concluir.
d. Retiren todos los clips, ubiquen en el brazo izquierdo de la balanza dos clips a una distancia de 4 cm y en el otro brazo cuatro clips a una distancia de 2 cm. ¿La balanza se mantiene en equilibrio o se inclina hacia algún lado?

e. A partir de lo concluido en el literal c, propongan tres situaciones de equilibrio donde utilicen 12 clips. Sin hacer el experimento dibujen la balanza y señalen dónde deben ubicar los clips para mantener la balanza en equilibrio.

f. Ahora realicen el experimento y verifiquen con su dibujo si la balanza se mantiene en equilibrio. Si en todos los casos lograron mantenerla en equilibrio expliquen por qué, si por el contrario no lo lograron expliquen a qué se debe y cómo lo corregirían.

2.3.2 Actividades basadas en hipótesis composicionales

Las actividades basadas en hipótesis composicionales con el apoyo de Geogebra, hicieron referencia a la posibilidad que tuvo el estudiante de explorar y experimentar de manera virtual con una construcción previamente entregada, haciendo uso de algunas de las herramientas del software para determinar la composición de áreas por cuerdas o líneas paralelas a una línea dada.

2.3.2.1 Guía del estudiante actividad número tres

Esta guía de trabajo buscaba, hallar el centro de gravedad de longitudes y figuras planas utilizando el programa Geogebra como herramienta de apoyo. Previamente se entregó a cada grupo de estudiantes un computador portátil con la construcción y la guía de trabajo.

Figura 3. Guía del estudiante número tres.

¿PUEDE HALLARSE VIRTUALMENTE EL CENTRO DE GRAVEDAD?

Entre al programa Geogebra abra, el archivo denominado actividad para hallar el centro de gravedad, encontrará:
-Un segmento AB de 12 unidades de longitud.
-Un triángulo isósceles
-Un triángulo equilátero
-Un rectángulo
-Un romboide
-Un círculo de radio 3 unidades,

1. Usando las herramientas encuentre el centro de gravedad de cada uno de los objetos construidos. Escriba en la guía el proceso realizado para encontrar el centro de gravedad de cada objeto y explique cómo justifica que ese es el centro de gravedad.

2. Luego cambie a color rojo el punto que representa el centro de gravedad de cada objeto.

3. En resumen el centro de gravedad de una línea recta es

El centro de gravedad de un paralelogramo es ________________________________

El centro de gravedad de un triángulo es _____________________________________

El centro de gravedad de un círculo es _____________________________________

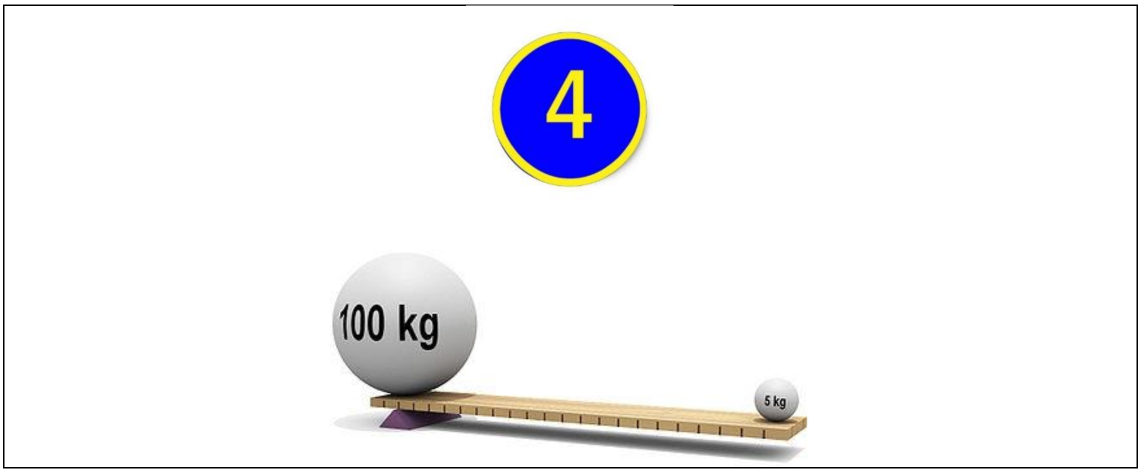
2.3.3 Actividades basadas en la combinación de hipótesis mecánicas y composicionales

Las actividades que corresponden a la combinación de hipótesis mecánicas y composicionales, combinan elementos de la Mecánica con la Geometría, relacionando a partir de la ley de la palanca y el centro de gravedad acciones con figuras planas que deben ser equilibradas, sin olvidar rasgos y características físicas tales como la asociación entre área y peso o la determinación del centro de gravedad a partir de elementos de la geometría euclidiana.

2.3.3.1 Guía del estudiante actividad número cuatro

Esta guía de trabajo tuvo como objetivo, trabajar la proposición 8 del libro "Sobre el equilibrio de los planos I", en la que Arquímedes utilizó la ley de la palanca.

Figura 4. Guía del estudiante número cuatro.



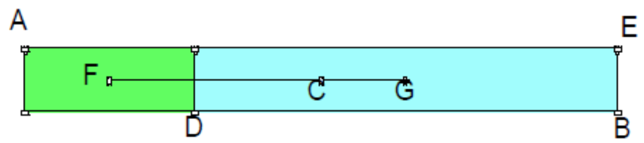
SOBRE EL EQUILIBRIO DE LOS PLANOS

A continuación se presenta la proposición 8 del Libro I, sobre el equilibrio de los planos:

SOBRE EL EQUILIBRIO DE LOS PLANOS . LIBRO I.

Proposición 8.- Si AB es una magnitud cuyo centro de gravedad es C, y AD es una parte de la misma, cuyo centro de gravedad es F, entonces el centro de gravedad de la diferencia estará en el punto G de FC tal que :

GC:CF = (AD):(DE)



Abra el archivo de Geogebra llamado "Actividad uso geométrico de la balanza.ggb"
Utilizando las herramientas de Geogebra, mida las longitudes de los segmentos PQ y QR, calcule el área de los polígonos ACFE y EFDB.
Ahora utilizando la construcción complete la tabla y con la herramienta elige y mueve, tome el punto F y desplácelo por el segmento AC.

LONGITUD PQ	AREA ADGF	LONGITUD QR	AREA FCEG
5,5			
5			
4,5			
4			
3,5			
3			
2,5			
2			
1,5			
1			
0,5			

1. ¿Qué relación observa entre la longitud PQ y el área ADGF?
2. ¿Qué relación observa entre la longitud QR y el área FCEG?
3. ¿Qué relación observa entre las longitudes PQ y QR con las áreas FCEG Y ADGF?

2.3.3.2 Guía del estudiante actividad número cinco

Esta guía de trabajo tuvo como objetivo simular en el software Geogebra una balanza para verificar algunas proposiciones del equilibrio de los planos.

Figura 5. Guía del estudiante número cinco.

LA BALANZA GEOMÉTRICA

1. Abra el archivo "prueba movimiento actividad uso geométrico de la balanza.ggb" y describa lo que observa en la construcción a medida que mueve el punto D.

2. Mueva ahora el punto T, y nuevamente el punto D, ¿se mantienen las relaciones de la construcción o varían?

3. Repita el proceso con el punto U, y mueva el punto D, ¿qué observa?

4. A medida que mueve el punto D, ¿cómo explica que la balanza siempre se encuentre en equilibrio?

5. La balanza sostiene dos paralelogramos, ¿qué puede decir de sus centros de gravedad, que condición deben cumplir para que se mantengan en equilibrio?, o los puedo sostener de cualquier parte.

6. ¿Qué pasa cuando las dos áreas son iguales?, ¿Qué pasa cuando las dos longitudes son iguales?

7. ¿Cuándo la longitud QS es el doble de la longitud SR, que pasa con las áreas?

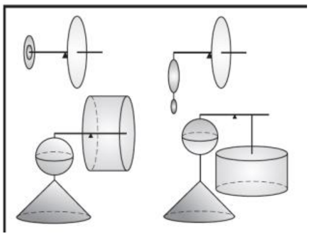
8. ¿Cuál es la condición o las condiciones para que la longitud del brazo de la balanza con su correspondiente área se mantengan en equilibrio con el otro brazo y su correspondiente área?

2.3.3.3 Guía del estudiante actividad número seis

Esta guía de trabajo tuvo como objetivo, simular en el software Geogebra la proposición 2 del Libro del Método de Arquímedes, buscando entender como Arquímedes ponía en juego su heurística.

Figura 6. Guía del estudiante número seis.

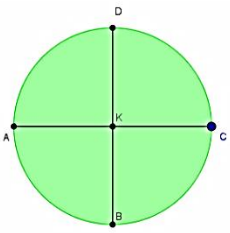
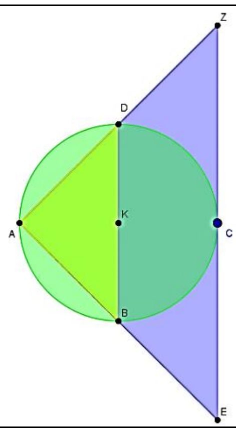
LA CUADRATURA DE LA ESFERA

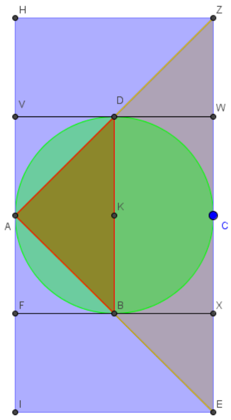
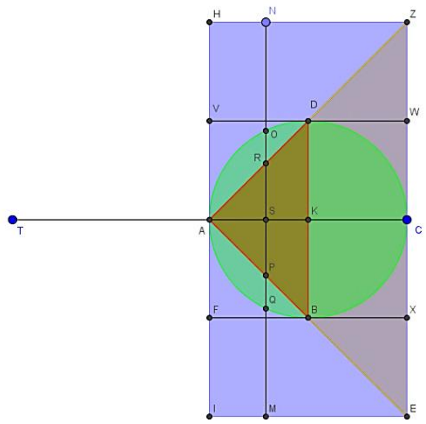


ESTUDIO DE LA CUADRATURA DE LA ESFERA (VOLUMEN DE LA ESFERA) DEL MÉTODO

Arquímedes lo que propone es representar en dos dimensiones la esfera, el cono y el cilindro, pero pensando en tres dimensiones. Inicialmente partimos de reconocer los elementos de la construcción:

En el menú vista, con la herramienta protocolo de construcción, revise cada uno de los elementos de la construcción

1. 	2. 

<table>
<tr><td>Se observa el círculo máximo de la esfera ABCD y sus diámetros AC y BD, y de radio r.</td><td>Tenemos dos conos ADB e AZE con vértices en A. La altura del primer cono es r, en cuanto a la altura del segundo cono es 2r. La base del primer cono es un círculo de radio r, en cuanto que la base del segundo cono es un círculo de radio 2r.</td></tr>
<tr><td>3.

</td><td>4.

</td></tr>
<tr><td>Rectángulos FVXW e IEZH generan dos cilindros con alturas iguales a 2r. Bases como círculos centrados en A de radios r y 2r, respectivamente.
.</td><td>Se representa una palanca por medio de un segmento TC con punto medio A, tal que TA = AC = 2r</td></tr>
</table>

Ahora lo que haremos es verificar con casos específicos las relaciones que planteó Arquímedes para llegar a calcular el volumen de la esfera.

1. Haciendo una construcción auxiliar verifique las siguientes relaciones

$$AQ^2 = AC \cdot AS \qquad AQ^2 = QS^2 + SP^2$$

$$MS \cdot SP = AC \cdot AS = AQ^2 = QS^2 + SP^2$$

¿Qué observa luego de realizar la construcción?
Si compara el cuadrado AQ con el rectángulo de lados AC y AS, que puede decir, si mueve el punto N de la construcción qué ocurre.
¿Qué relación se puede establecer entre el cuadrado AQ, y los cuadrados QS y SP?
¿Qué relación puede establecer entre el rectángulo de lados AS y AC con el rectángulo de lados MS y SP?
Haciendo una construcción auxiliar verifique las anteriores relaciones

$$AT/AS = MS/SP = MS^2/(MS \cdot SP) = MS^2/(QS^2 + SP^2)$$

¿Qué
observa luego de realizar la construcción?
Si compara la longitud del segmento AT con la longitud del segmento AS y hace lo mismo con las longitudes de los segmentos MS y SP qué puede decir, ¿existe alguna relación?

Realice el mismo proceso entre el cuadrado MS y el rectángulo de lados MS y SP, que puede decir respecto a sus áreas.

Finalmente compare el área del cuadrado MS entre la suma de las áreas de los cuadrados QS y SP.
Luego de comparar cada una de las relaciones que cree usted que es lo que Arquímedes está haciendo.

2. Ahora Arquímedes parte de los círculos c(MN), c(QO), c(PR) de diámetros MN, QO, PR,

Realice la construcción auxiliar de cada uno de los círculos teniendo en cuenta su diámetro.
Al observar en detalle los círculos que acaba de construir a partir de sus diámetros, explique cuál corresponde al cono, el cilindro y la esfera.
Ahora usando la construcción auxiliar verifique la siguiente relación, puede hacer uso de la herramienta área y la hoja de cálculo.

$$\frac{c(MN)}{c(QO)+c(PR)}$$

¿Qué es lo que está verificando Arquímedes en esta relación?
Luego de identificarlos mueva el punto N de la construcción, ¿qué observa?, ¿se mantiene lo que explicó anteriormente?, en su guía dibuje cómo quedarían todos los círculos si los apilara.

3. Hasta el momento Arquímedes ha mostrado tres relaciones. Teniendo en cuenta lo presentado hasta el momento qué puede decir de las siguientes relaciones, que es lo que Arquímedes está comparando.

$$\frac{AT}{AS}=\frac{MS^2}{QS^2\ +SP^2}=\frac{MN^2}{QO^2\ +PR^2}=\frac{c(MN)}{c(QO)+c(PR)}$$

Explique detalladamente en cada una de las relaciones ¿qué es lo que se está comparando?

4. Arquímedes, haciendo uso de las propiedades de la palanca <u>establece que el círculo c(MN) del cilindro, "permaneciendo en su lugar" estará en equilibrio respecto del punto A (fulcro de la palanca) con los círculos c(QO), c(PR) trasladados y colocados sobre el punto T , de tal manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea T</u> .

   Como medio de verificación de lo presentado en la última parte, abra el archivo de Geogebra llamado "cubatura de la esfera prueba círculos", mueva el punto N de la construcción y explique en detalle lo que observa, ¿qué es lo que se está comparando?

   Ahora habilite la pestaña vista-hoja de cálculo y registre en cada columna los datos de las longitudes y las áreas.

   ¿Cómo utilizando el principio de la palanca estudiado por Arquímedes y las herramientas del programa Geogebra puede verificar el enunciado que está subrayado, explique y describa el proceso que realizó?

   ¿Cómo describiría usted el método utilizado por Arquímedes para comparar magnitudes?

2.4 Organización, sistematización y análisis preliminar de datos

A continuación se presenta el proceso desarrollado en la organización, sistematización y análisis preliminar de los datos. Inicialmente fueron tomados los registros documentales de los estudiantes plasmados en las guías de trabajo, transcribiendo y organizando en tablas las respuestas de cada una de las preguntas planteadas en la secuencia de actividades; en algunos casos se contó con registro en video, pero la intención no era realizar transcripciones de los mismos sino usarlos en caso de necesitar profundizar en algún aspecto de la información documental. Seguidamente se muestra el paso de la sistematización a los análisis preliminares, esto a través de un ejemplo de uno de los grupos de estudiantes, para finalmente terminar con el análisis a partir de una descripción profunda de las estrategias utilizadas por los estudiantes, buscando en todo momento reconocer cuáles de esas estrategias se acercan o cómo se corresponden con algún elemento de la heurística de Arquímedes.

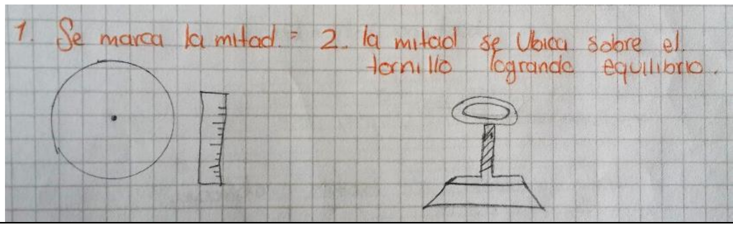
2.4.1 Recolección de registros documentales

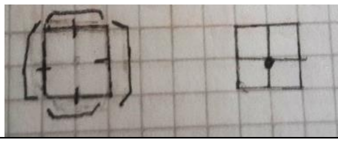
La secuencia de actividades fue aplicada a un curso de grado noveno con un total de 25 estudiantes; las seis actividades se desarrollaron en 6 sesiones de 90 minutos cada una en grupos de dos estudiantes. En las dos primeras actividades fueron entregadas la guía de trabajo y material de apoyo para realizar el proceso de experimentación física; en las actividades restantes, se entregó, además de las guías de trabajo, un computador portátil, para que los estudiantes trabajaran con el software Geogebra. Como producto de las seis sesiones se obtuvieron los registros documentales, pero solo seis grupos lograron terminar las seis actividades, es importante tener en cuenta que el criterio para la selección de los grupos de estudiantes con los que se construyó el análisis de la información, obedeció a la necesidad de transitar por cada una de las actividades, con la intención de identificar elementos asociados a la heurística de Arquímedes presentes en el diseño y desarrollo de las actividades.

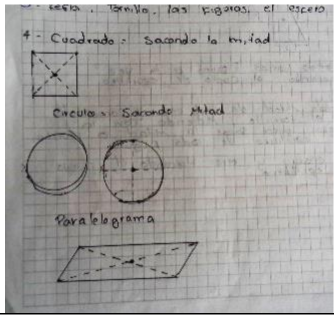
A manera de ejemplo, en la tabla 3 fue posible observar la correspondencia entre algunos de los elementos de le heurística de Arquímedes y las estrategias presentadas por los estudiantes de manera espontánea, permeados por la posibilidad de realizar la experimentación física y virtual con el apoyo de Geogebra.

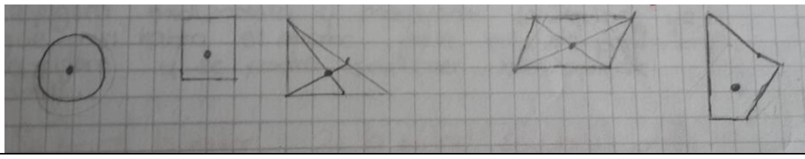
Tabla 3. Aproximación a los elementos de la heurística de Arquímedes con estrategias de los estudiantes.

<table>
<tr><th>ELEMENTOS DE LA HEURISTICA DE ARQUIMEDES</th><th>ESTRATEGIAS DE LOS ESTUDIANTES EN LA COMPARACIÓN DE MAGNITUDES ASOCIADA A LA HEURISTICA DE ARQUÍMEDES</th></tr>
<tr><td>Lema 6:
El centro de gravedad de un círculo es el punto que también es el centro del círculo.</td><td>Podríamos determinar la mitad de la figura midiéndola y marcando la mitad ya que casi habrá el mismo peso en cada parte de la figura y se podrán sostener bien sobre el tornillo.


</td></tr>
<tr><td>Proposición 9:
El centro de gravedad de cualquier paralelogramo es el lugar donde se encuentran los puntos medios de los lados opuestos.</td><td>A cada figura se le saca la mitad en los lados y se unen los puntos de cada lado y donde se interceptan las líneas es el punto de equilibrio.

</td></tr>
<tr><td>Proposición 10:
El centro de gravedad de un paralelogramo es el punto de intersección de las diagonales.</td><td>Calculando la mitad el peso se divide en partes iguales y cada peso debería ir en cada lado para que mantenga el equilibrio.
Sacando mitad de cada uno y poniendo en el tornillo, midiendo con la regla para sacar la mitad o punto de equilibrio de cada figura.


</td></tr>
<tr><td>Arquímedes fue el primero en probar teóricamente que el centro de gravedad de cualquier triángulo coincide con la intersección de sus medianas.</td><td>Con la regla buscamos la circunferencia de las figuras como pues hallando la mitad de las figuras. (Hacen la representación de las cinco figuras entregadas).

</td></tr>
<tr><td>Proposición 1 sobre el equilibrio de los planos.
Pesos que se equilibran a distancias iguales son iguales</td><td>Observamos que se mantiene en equilibrio porque tienen el mismo peso y la misma distancia del punto de apoyo.</td></tr>
<tr><td>Proposición 3 sobre el equilibrio de los planos:
Pesos desiguales se van a equilibrar a distancias</td><td>Al estar en la misma porción una mayor que otro en el primero se desequilibra porque hay más peso que el otro pero en el otro al estar más cerca con los tres y el otro más lejos con dos tienen equilibrio, lo que significa que la distancia es la que importa.</td></tr>
</table>

desiguales, el mayor peso estando a una distancia menor.	

Haciendo el mismo ejercicio mostrado anteriormente con cada uno de los grupos en la búsqueda de formas de acción similares, en relación con la aproximación a algunos elementos de la heurística de Arquímedes, surgieron los primeros análisis.

2.4.2 Análisis preliminar

Luego de realizar la correspondencia entre la aproximación a algunos de los elementos de la heurística de Arquímedes, versus acciones de los estudiantes, se presentan las estrategias identificadas en la comparación de magnitudes, lo que aparece en color amarillo, verde claro, morado, rojo y azul corresponde a una estrategia inicial. A lo largo del primer análisis, algunas estrategias se fueron ampliando dependiendo de las acciones mostradas por los estudiantes en el uso de las herramientas de Geogebra, éstas ampliaciones corresponden con lo subrayado en color verde oscuro:

1. Ubica por ensayo y error el centro de gravedad, teniendo en cuenta implícitamente la forma de la figura que se quiere equilibrar.

2. Descompone la figura dada en otras conocidas para poder estimar visualmente a partir de la aproximación de la cantidad de área. Compara las partes entre sí para determinar que son iguales.

3. Usa elementos geométricos como estrategia para determinar el centro de gravedad en la comparación de magnitudes. Usa herramientas de geometría dinámica para establecer comparaciones entre longitudes y áreas.

4. Encuentra el centro de gravedad y usa implícitamente la ley de la palanca en la comparación de magnitudes. Transfiere a una hipotética balanza y compara la figura relacionando peso con área.

5. Determina el centro de gravedad explicitando la comparación a partir de la relación (longitud-peso/longitud-área)-Ley de la palanca.

Combinando las estrategias anteriores con las tablas 4, 5 y 6 del el libro “Sobre el equilibrio de los planos I”, puntualmente con los siete postulados, seis proposiciones, un lema y lo condensado por Castro (2007) respecto al trabajo de Arquímedes en el

“Método” y “Sobre el equilibrio de los planos I”, se obtuvieron los primeros análisis; ver Tabla 7.

Tabla 4. Postulados libro “Sobre el equilibrio de los planos I-hipótesis mecánicas”.

Postulado 1	Pesos iguales a distancias iguales están en equilibrio, y pesos iguales a distancias desiguales no están en equilibrio, y hay inclinación hacia el lado del peso que está a mayor distancia.
Postulado 2	Si dos pesos a distancias cualesquiera están en equilibrio y a uno de ellos se le añade algo, entonces dejan de estar en equilibrio y hay inclinación hacia el lado del peso al que se le ha añadido.
Postulado 3	De manera similar, si se quita algo a alguno de los pesos, entonces dejan de estar en equilibrio y hay inclinación hacia el peso no disminuido.
Postulado 4	Los centros de gravedad de figuras planas iguales que superpuestas coinciden, también coinciden.
Postulado 5	Los centros de gravedad de figuras desiguales, pero semejantes, están situados semejantemente.
Postulado 6	Si dos pesos están en equilibrio a cierta distancia, entonces otros pesos equivalentes a aquéllos también estarán en equilibrio a la misma distancia.
Postulado 7	En cualquier figura cuyo perímetro es cóncavo, el centro de gravedad se encuentra dentro de la figura.

Tabla 5. Proposiciones[5] libro “Sobre el equilibrio de los planos I”.

Proposiciones 1	Pesos que se equilibran a distancias iguales son iguales.
Proposiciones 2	Pesos iguales a distancias desiguales, no van a estar en equilibrio, se van a inclinar hacia el lado del peso mayor.
Proposiciones 3	Pesos desiguales se van a equilibrar a distancias desiguales, el mayor peso estando a una distancia menor.
Proposiciones 8	Proposición 8.- Si AB es una magnitud cuyo centro de gravedad es C, y AD es una parte de la misma, cuyo centro de gravedad es F, entonces el centro de gravedad de la diferencia estará en el punto G de FC tal que : GC:CF = (AD):(DE)
Proposiciones 9	El centro de gravedad de cualquier paralelogramo está sobre la línea recta que une los puntos medios de los lados opuestos.
Proposiciones 10	El centro de gravedad de un paralelogramo es el punto de intersección de sus diagonales.
Lema 6	El centro de gravedad de un círculo, es también el punto que es el centro del círculo.

[5] Las proposiciones 1 y 8 corresponde a las hipótesis mecánicas, las proposiciones 9, 10 y el lema 6 corresponden a hipótesis composicionales.

Tabla 6. El "Método" y en "Sobre equilibrio de los planos I y II", Castro (2007).

H0[6]	Todas las figuras tienen peso.
H1	El peso de cada figura es igual a su magnitud geométrica; por ejemplo, el peso de una línea es su longitud, el peso de una superficie es su área, etc.
H2	Todas las figuras tienen centro de equilibrio, o como se llama modernamente centro de masa, por ejemplo, el centro de masa de un círculo es su centro geométrico, similarmente, el centro de masa de un triángulo equilátero es su centro geométrico.
H3	Cada figura, según el caso, se puede descomponer en infinitas figuras del mismo tipo y de orden inferior. Por ejemplo, un círculo es la unión de todas sus cuerdas paralelas a una cuerda dada.
H4	Como todas las figuras tienen peso, utilizando una balanza y equilibrando figuras se puede determinar magnitudes…".

Con estas primeras estrategias fueron tomadas las tablas de cada grupo, buscando cuáles se acercaron o aproximaban a un elemento de la heurística de Arquímedes, una muestra de dicho procedimiento fue tomando del trabajo desarrollado por uno de los grupos.

Tabla 7. Estrategias vs forma particular de la heurística de Arquímedes grupo 1.

NÚMERO DE LA ACTIVIDAD	ESTRATEGIAS	ANÁLISIS INICIALES (Grupo 1)	FORMA PARTICULAR HEURISTICA DE ARQUÍMEDES
1	1,2,3, 5	1. Los estudiantes explicitan que en el momento de equilibrar las figuras, estas se pueden clasificar en fáciles (cuadrado/círculo) y difíciles (polígono irregular/paralelogramo)	**Heurística propia.**
		2. Equilibran las figuras de tal manera que cada lado quedara con el mismo peso dependiendo de la figura. Al explicar porque las figuras se mantienen en equilibrio sobre el tornillo, responden que siempre buscan la mitad, pero advierten que encontrar la mitad no siempre es fácil hay algunas figuras en las que la mitad no está donde parece, además hay figuras que tienen partes más pesadas y partes más ligeras lo que complica su equilibrio. En el caso del polígono irregular buscan extender el proceso de las diagonales, trazando desde cada vértice al punto medio del lado opuesto	**H2, H3**

[6] Para efectos de poder referir de manera rápida en los análisis de cada grupo en relación con los elementos de la heurística de Arquímedes presentados por Castro, se codificaron en H0, H1…H4.

		pero no obtienen los resultados esperados; mantener la figura en equilibrio. En relación con centro de gravedad los estudiantes identifican que hay un único lugar donde es posible equilibrar la figura, enfatizan en que debe ser la mitad ya que en otros lugares no quedan equilibrados (aquí implícitamente se establece una comparación de peso entre la misma magnitud de tal forma que el peso se distribuya uniformemente).	
		3. Toman las figuras y haciendo uso de la regla, la cuerda encuentra los puntos medios de cada lado encontrando el punto de intersección, o construyendo las diagonales. Se aproximan a lo planteado por Arquímedes en el libro sobre el equilibrio de los planos. Es importante destacar que en la representación gráfica se observa la intención de representar los puntos medios de los lados como estrategia para encontrar puntos de intersección que determinen el centro de gravedad.	**Lema 6** **Proposición 9 y 10.**
		5. Los estudiantes enuncian que pesos iguales a distancias iguales se mantienen en equilibrio.	**Postulado 1**
2	4, 5	4. A mayor longitud del punto de apoyo, mayor peso, aunque se enuncia de manera intuitiva Además, reconocen que luego de tener la balanza en equilibrio y retirar de cada lado un clip, sigue manteniéndose en equilibrio porque al quitarle un peso de cada lado es lo mismo que con tres clips solo que con dos.	**Proposición 8** **Postulado 3**
		5. Establecen que la cantidad de peso que se coloca a un lado debe ser equivalente al colocado en el otro y lo evidencian a partir de una comparación en la balanza, donde equilibran en el brazo izquierdo dos clips uno a 5cm y otro a 2 cm con un clip ubicado en el lado derecho a 7cm.	**Postulado 1** **Proposición 1 y 8**
3	3,4	3. 4. Combina las dos estrategias, con el uso de las herramientas de Geogebra punto medio y punto de intersección. Lo que hace el grupo implícitamente es una distinción en la comparación en el momento en el que trazan las diagonales y colorean el rectángulo. Esta estrategia es complementada usando herramientas de Geogebra para hallar el área y compararlas, previamente determinan el centro de gravedad dividiendo por la mitad y transfiriéndolo a una hipotética balanza "imaginemos que el área pesa igual". 3. En el caso del triángulo determinan los puntos medios de dos de sus lados y los unen con su correspondiente vértice, la intersección de los dos segmentos determina el centro de gravedad de la figura. Para el círculo construyen dos diámetros, dividiendo el círculo en cuatro partes iguales,	**Lema 6, Proposición 9 y 10** **H2** **H2** **H1**

		señalan dos secciones A y B diciendo que son iguales. 4. Para la línea recta la dibujan y en el centro de esta ubican el centro de gravedad.	
4	5	5. Al preguntar por lo que observan en la construcción, establecen que se necesitan dos pesos iguales para que se equilibren. A manera de reflexión es importante destacar que los estudiantes llevaron más a completar la tabla que en mostrar las estrategias para comparar áreas y longitudes.	**Postulado 1**
5	5	5. Reconocen que la longitud de los brazos es constante, deben sumar siempre 6. En la ley de la palanca reconocen que a mayor área mayor peso, pero además la relación con la longitud de los brazos "relación mayor distancia-menor peso, menor distancia-mayor peso", esta relación se da en la observación que hacen los estudiantes en la construcción al mover el punto D, en un caso particular determinan que el cuadrado más pequeño está más lejos del punto de apoyo y el más grande está más cerca del punto por lo tanto el área del objeto que está más lejos tiene menor peso al área del que está más cerca.	**Postulado 1** **H1** **Proposición 8**
6	3	3. Comparación por compensación "intercambio de tamaños" pero las áreas permanecen iguales. Los estudiantes reconocen la relación de los rectángulos AS AC con el otro rectángulo MS SP, mientras se mueve el punto N, uno rectángulo se hace más corto y el otro más ancho. Si la N se mueve ambos rectángulos cambian de tamaños pero la relación se mantiene en sus mismas áreas.	**Proposición 8**

CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

3.1 Formas de acción vinculadas con una forma particular de la heurística de Arquímedes

En las estrategias utilizadas por los estudiantes, fue posible reconocer elementos presentes en la heurística de Arquímedes en la comparación de magnitudes tales como hipótesis mecánicas, hipótesis composicionales o la combinación de estas, muestra de ello fue la correspondencia entre algunas de las acciones de los estudiantes con una proposición, un postulado o un lema.

A manera de contextualización se hizo un recorrido para los seis grupos por la secuencia de actividades de manera general, esto a partir de la tabla 8. Muestra en color azul claro las actividades basadas en las hipótesis mecánicas, en naranja claro las actividades basadas en las hipótesis composicionales y en verde claro las actividades basadas en la combinación de los dos tipos de hipótesis. Cada actividad se asoció con una o más estrategias, estas fueron el resultado de realizar la correspondencia entre la forma particular de los elementos de la heurística de Arquímedes en relación con las acciones de los estudiantes. Lo que aparece resaltado con azul oscuro correspondió a los elementos de la heurística de Arquímedes que se repitieron más de una vez y que permitieron identificar posteriormente tipos de heurísticas en los seis grupos de estudiantes. Luego se profundizó en cada una de las actividades, relacionando las estrategias en la comparación de magnitudes con la forma particular de los elementos de la heurística de Arquímedes, a partir de las producciones escritas de los estudiantes. Este recorrido se hizo desde la experimentación en términos de la comparación para las actividades uno y dos, y desde el apoyo con Geogebra en las actividades restantes.

3.1.1 Grupo uno

Se observó de manera general que el grupo de estudiantes pasó en las seis actividades por las cinco estrategias, pero fue en la parte de las hipótesis mecánicas donde transitaron en su totalidad por las cinco. En las actividades restantes apoyadas en Geogebra, fue posible observar el paso por las estrategias 3, 4 y 5. En relación con la forma particular de los elementos de la heurística de Arquímedes se destacó el postulado 1 que mostró la relación de pesos iguales a distancias iguales para permanecer en el equilibrio, y las proposiciones 8, 9 y 10, que relacionaron pesos y distancias desiguales que se mantuvieron en equilibrio y estrategias para determinar el centro de gravedad de un paralelogramo respectivamente.

Tabla 8. Resumen por actividad, estrategias y forma particular de la heurística de Arquímedes.

NÚMERO DE LA ACTIVIDAD	ESTRATEGIAS EN LA COMPARACIÓN DE MAGNITUDES	FORMA PARTICULAR- ELEMENTOS HEURISTICA DE ARQUÍMEDES
1	1.	Heurística propia.
	2.	H2, H3
	3.	Lema 6, Proposición 9, Proposición 10.
	5 .	Postulado 1
2	4.	Proposición 8, Postulado 3
	5.	Postulado 1, Proposición 1, Proposición 8
3	3. 4.	Lema 6, Proposición 9, Proposición 10
	3.	H2
	4.	H1
4	5.	Postulado 1
5	5.	Postulado 1, H1, Proposición 8
6	3.	Proposición 8

3.1.1.1 Desde las hipótesis mecánicas en términos de la comparación de magnitudes

Actividad uno

Desde la experimentación en la tabla 9, se observaron amplias y variadas estrategias propuestas por los estudiantes para realizar comparación de magnitudes. Contextualizando la actividad número uno, donde se proponía equilibrar figuras elaboradas en cartón sobre un tornillo, surgieron las primeras formas de comparación.

Tabla 9. Registro del estudiante. Actividad Nº1, pregunta 1.

PREGUNTA/ ACTIVIDAD Nº1	RESPUESTAS ESTUDIANTES GRUPO 1
1. Describan el proceso que realizaron para mantener las figuras sobre el tornillo.	Pues equilibramos las figuras tal que cada lado quedara con el mismo peso dependiendo de la figura… a la vez que las figuras varían, unas se nos hicieron más fáciles tales como el cuadrado y el círculo y otras más complicadas como el polígono irregular y el paralelogramo.

En la tabla 9 los estudiantes explicitaron que en el momento de equilibrar las figuras, estas se podían clasificar en fáciles (cuadrado/círculo) y más complicadas (polígono irregular/paralelogramo) aquí surgieron los primeros análisis de los estudiantes producto de la posibilidad de realizar la experimentación. Recordemos que para Arquímedes era más fácil hacer pruebas por "vía mecánica" para obtener una idea de la cuestión (Heiberg, 1909), para posteriormente acudir a formas geométricas de demostración. Esta manera de encontrar implícitamente el centro de gravedad de las figuras entregadas, no correspondió con una forma particular de los elementos propuestos por Arquímedes, pero sí con lo que se denominó heurística propia ensayo y error.

Se observó que las acciones de los estudiantes estuvieron relacionadas con la estrategia 1[7], donde para hallar el centro de gravedad, clasificaron las figuras dependiendo de la forma y la dificultad o facilidad para distribuir el peso, y mantenerla en equilibrio.

Complementando la estrategia 1, al responder la pregunta ¿cómo explican que cada figura pueda mantenerse en equilibrio sobre el tornillo?:

Tabla 10. Registro del estudiante. Actividad Nº1, pregunta 2.

2. ¿Cómo explican que cada figura pueda mantenerse en equilibrio sobre el tornillo?	Pues manteniéndola en equilibrio poniendo en su mitad, pero encontrar la mitad no siempre es fácil hay algunas figuras que la mitad no está donde parece y además las figuras tienen partes más pesadas y partes más ligeras lo que complica su equilibrio.

En la tabla 10 se evidenció que los estudiantes, equilibraron las figuras de tal manera que cada parte en la que fue dividida quedara con el mismo peso dependiendo de la figura. Al explicar porque las figuras se mantuvieron en equilibrio sobre el tornillo, dijeron que había figuras que tenían partes más pesadas y partes más ligeras lo que complicaba su equilibrio. Esta estrategia puede asociarse con lo propuesto por Castro (2007), específicamente con lo que he denominado H2. Implícitamente los estudiantes asumieron

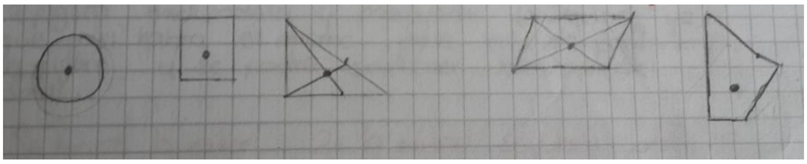
[7] De aquí en adelante se resalta cada una de las cinco estrategias con el color asignado en el apartado 2.4.2, con la intención que sea más claro para el lector identificar cuál o cuáles estrategias fueron puestas en juego por los estudiantes.

que todas las figuras tenían centro de equilibrio, pero para encontrarlo en las figuras como el círculo y el triángulo equilátero, el centro de gravedad consistía en encontrar el centro geométrico o según el grupo "la mitad". Esta forma de comparación combinó el postulado 1 y H3, equilibrando visualmente pesos respecto al punto de apoyo, asociando cantidad de volumen con el peso de dicha región.

En relación con el centro de gravedad, los estudiantes identificaron que había un único lugar donde fue posible equilibrar la figura; enfatizaron en que debía ser la mitad ya que en otros lugares no quedaron equilibrados (aquí implícitamente se estableció una comparación de peso entre la misma magnitud de tal forma que el peso se distribuyó uniformemente). En esta dirección se aplicó H3, recurriendo a la descomposición de figuras del mismo tipo como forma de comparación, relacionando a su vez la asociación entre área y volumen en los que se tuvo en cuenta la concentración de volumen a partir de la determinación del centro de gravedad.

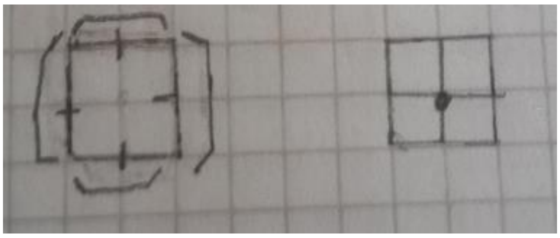
Puntualmente la estrategia 3 presentada por los estudiantes, mostró un gráfico donde fue posible reconocer acciones producto de la experimentación y de lo que se viene describiendo anteriormente:

Figura 7. Registro del estudiante. Representación gráfica centros de gravedad.



Comenzaré de izquierda a derecha en la figura 7, relacionando lo que se observó en la representación hecha por el grupo de estudiantes con la forma particular de los elementos de la heurística de Arquímedes. La primera representación correspondió a un círculo, al cual se le ubicó en el centro geométrico el lugar donde debía apoyarse para mantenerlo en equilibrio, aunque no se representó su radio, este apareció implícitamente como el lugar que correspondía a la mitad; en palabras de Arquímedes lo propuesto por los estudiantes se acercó mucho al lema 6. En la segunda y cuarta representación aparecieron dos paralelogramos, en el caso del cuadrado se determinó el centro geométrico que coincidió con el centro de gravedad, implícitamente en la gráfica se observó que la construcción de las diagonales y su intersección dividieron el paralelogramo en dos triángulos que tenían igual cantidad de área. Esta forma de trabajo, presentada por los estudiantes, se acercó a la estrategia reportada en la proposición 9 del libro Sobre el equilibrio de los planos, al respecto el grupo propuso:

Figura 8. Registro del estudiante. Representación gráfica centros de gravedad cuadrado.



En la figura 8 gráficamente se observaron dos procesos; el primero que destacó los cuatro lados y el punto medio de este, el segundo en el que se construyeron los puntos medios y se unieron con su opuesto, la intersección permitió determinar el centro de gravedad del cuadrado. Es importante destacar que la comparación en la escuela a veces no se da entre la misma magnitud perdiendo la posibilidad de comparar los atributos de una figura o un sólido consigo misma. En el caso del paralelogramo se observó la construcción de las diagonales y la intersección de estas como el centro de gravedad de la figura. Esta estrategia coincidió con la proposición 10, que pasó de comparar visualmente, a construir las diagonales y descomponer la figura en cuatro figuras congruentes, distribuyendo el peso y la cantidad de área de manera uniforme. Históricamente Arquímedes fue el primero en proveer teóricamente que el centro de gravedad de un círculo era su centro y que el centro de gravedad de un paralelogramo era la intersección de las diagonales, aunque los estudiantes no lo hayan enunciado de esta forma, fue posible identificar que la acción de trazar llevó a pensar que a partir de la experimentación los estudiantes hayan llegado a resultados similares, sin conocer en profundidad el trabajo de Arquímedes.

En la tercera representación, se observó la intención del estudiante de mostrar una estrategia; en el caso del triángulo para representar el centro de gravedad como la intersección de los puntos medios de dos de sus lados. Aquí se evidenció trazas del postulado 10, que aunque correspondió al proceso para hallar el centro de gravedad de un paralelogramo a partir de los puntos medios de sus lados, se extendió al caso de los lados del triángulo, en cuya intersección correspondió al centro de gravedad.

Las acciones presentadas hasta el momento, correspondieron en alguna medida con los valores teóricos propuestos por Arquímedes para figuras de dos dimensiones, recurriendo a elementos de la geometría Euclidiana para determinar el centro de gravedad.

En el caso del polígono irregular no se observó una estrategia clara en términos de construir diagonales o puntos medios de cada lado, pero por el lugar donde se ubicó el punto pareció que se estaba compensando el peso entre cada región de la figura dada.

En el caso del polígono irregular buscaron extender el proceso de las diagonales, trazando desde cada vértice al punto medio del lado opuesto, pero no obtuvieron los resultados esperados, mantener la figura en equilibrio.

Actividad dos

Continuando con el enfoque experimental, en esta actividad se propuso el trabajo con una balanza y clips como contrapesos para establecer condiciones de equilibrio. El objetivo; aproximar a los estudiantes a algunos de los elementos de la heurística a partir de las hipótesis mecánicas. Se presentan estrategias mostradas por los estudiantes en el desarrollo de la actividad:

Al pedir a los estudiantes que ubicaran un clip a 4cm del punto de apoyo del lado izquierdo y otro clip a una distancia de 6cm del lado derecho, determinaron que entre más lejos del punto de apoyo, el objeto adquiría más peso, acercándose a lo presentado por Arquímedes en la proposición 2. Esta forma de trabajo presentada por los estudiantes coincidió con la estrategia 4, observando que implícitamente había una relación entre el peso y la distancia de la balanza para determinar condiciones de equilibrio.

Tabla 11. Registro del estudiante. Actividad Nº2, experimento 1.

b. ¿Qué observan, como explican lo que acaba de ocurrir en el experimento?	Que entre más lejos del punto de apoyo el objeto adquiere más peso.

En la tabla 11 se observó que en este caso a mayor longitud del punto de apoyo, mayor peso esto mostró que había reconocimiento de la distancia como elemento para multiplicar el peso; es decir que implícitamente reconocieron que la combinación entre una longitud mayor, permite que se rompan las condiciones de equilibrio y la balanza se incline hacia el lado donde está la mayor distancia. Aunque se enunció de manera espontánea tuvo elementos puestos en juego por Arquímedes en esta teorización que sin duda recorrió el camino llevado por los estudiantes a partir de la experimentación.

Al indagar por las condiciones para mantener en equilibrio la balanza, los estudiantes propusieron:

Tabla 12. Registro del estudiante. Actividad Nº2, experimento 2.

d. ¿Qué deben tener en cuenta para que el instrumento se mantenga en equilibrio?	Que la cantidad de peso que coloque en un lado debe ser equivalente al colocado en el otro, ejemplo si coloco dos puntillas al lado izquierdo una a 5cm y otro a 2cm, en el lado derecho para que quede equilibrado se tendría que colocar una puntilla a 7cm.

En la tabla 12 pudo observarse que el grupo presentó una forma de comparación en la que equilibró dos pesos en el lado izquierdo, con uno en el lado derecho, reconociendo que el peso que se colocó en cada lado debía ser equivalente. Aquí se evidenció la estrategia 5, donde establecieron que la cantidad de peso que se colocó a un lado debía ser equivalente al colocado en el otro y lo evidenciaron a partir de una comparación en la balanza, donde equilibraron en el brazo izquierdo dos clips; uno a 5 cm y otro a 2 cm con un clip ubicado en el lado derecho a 7 cm. Esta forma de comparar magnitudes poco usuales pero espontánea, logró capturar elementos de la ley de la palanca, explicitando en cierta medida la relación peso distancia, acercándose a la proposición 8, en la que los pesos fueron compensados por las distancias.

Al preguntar sobre qué pasaría si se quitara de cada lado un clip estando en equilibrio la balanza, los estudiantes plantearon:

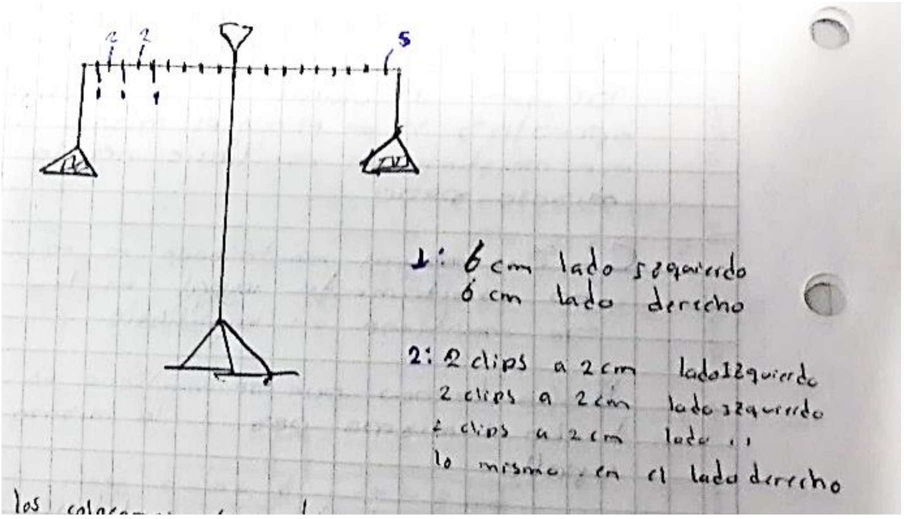
Tabla 13. Registro del estudiante. Actividad 1, experimento 2.

f. Finalmente retiren de cada lado de la balanza un clip y observen lo que pasa.	Siguen quedando en equilibrio porque las proporciones no cambian porque les quitamos un peso d cada lado así que es lo mismo que los tres clips solo que con dos.

En la tabla 13 el grupo enunció que luego de realizar el experimento observaron que era lo mismo que los tres clips solo que con dos; se identificaron formas de razonamiento similares a lo teorizado en el postulado del postulado 2, donde reconocieron que al quitar de cada lado el mismo peso las condiciones de equilibrio se mantendrían.

Finalmente en el tercer experimento, en el literal d se propuso que el grupo ubicara 2 clips a una distancia de 4 cm y 4 clips en el lado derecho a una distancia de 2 cm. De esta forma lograron equilibrar la balanza, reconociendo que el peso se repartía con la distancia. La intención de esta parte de la actividad, buscaba que los estudiantes identificaran la relación peso distancia propuesta en el proposición 8. Al proponerles que repitieran la experiencia con 12 clips, 6 de cada lado, presentaron condiciones de equilibrio que iban en la dirección del postulado 1 y no en el camino de la proposición 8. Esto pudo observarse en el trabajo del grupo:

Figura 9. Registro del estudiante. Representación gráfica de la balanza condiciones de equilibrio.



En la figura 9 la comparación de magnitudes propuesta por los estudiantes buscó la compensación a lado y lado, partiendo de la relación igual peso-igual longitud (postulado 1).

3.1.1.2 Desde las hipótesis composicionales en términos de la comparación de magnitudes

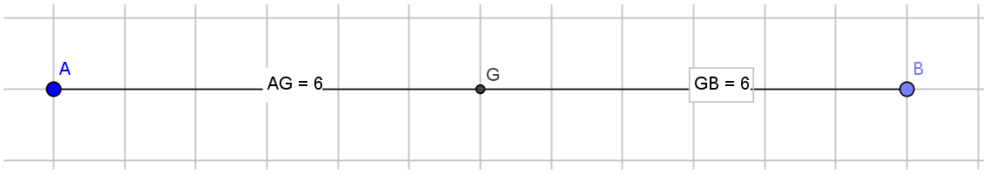
Actividad tres

En esta actividad fue entregado un computador portátil con el programa Geogebra y una guía de trabajo. La intención de la actividad consistía en determinar el centro de gravedad de un segmento, un paralelogramo, un triángulo y un círculo. Es importante mencionar que el hecho de pasar de la experimentación física en las actividades 1 y 2, al apoyo con Geogebra permitió que los estudiantes tuvieran elementos de referencia desde los postulados, proposiciones, lema y elementos de la heurística de Arquímedes en la comparación de magnitudes, porque determinar el centro de gravedad no se restringe únicamente a encontrar un único lugar donde equilibrar una figura, incluyó comparar magnitudes y establecer condiciones de equilibrio a partir de la relación distancia-peso.

Aunque la intención de este trabajo de investigación no fue entrar a evaluar la incidencia del apoyo de Geogebra en la comparación de magnitudes, se enfatizó en observar las acciones y el uso de algunas herramientas que permitieron reconocer algunos de los elementos similares a las teorizadas por Arquímedes.

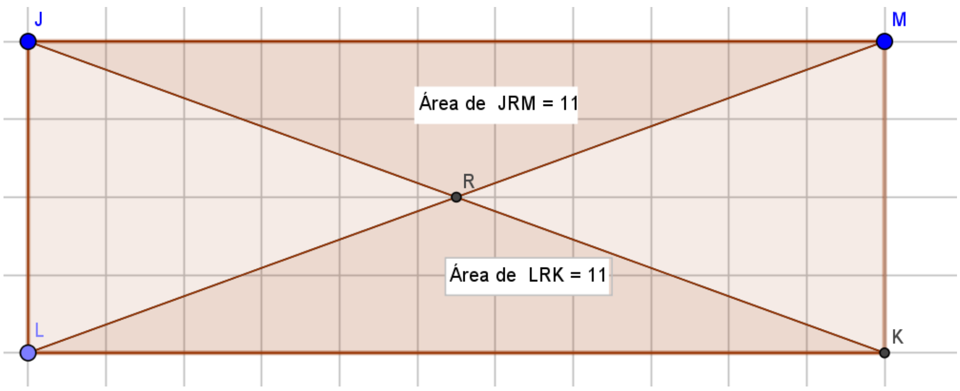
Para el caso del segmento, hicieron uso de la herramienta punto medio y determinaron que el punto negro correspondía al centro de gravedad porque estaba a la misma distancia de los extremos, aunque no lo dijeron explícitamente nuevamente apareció el postulado 1, esto se observó en la figura 11.

Figura 10. Representación en Geogebra, segmento AB.



Para el caso del paralelogramo construyeron las diagonales y determinaron el punto de intersección.

Figura 11. Representación en Geogebra, paralelogramo.

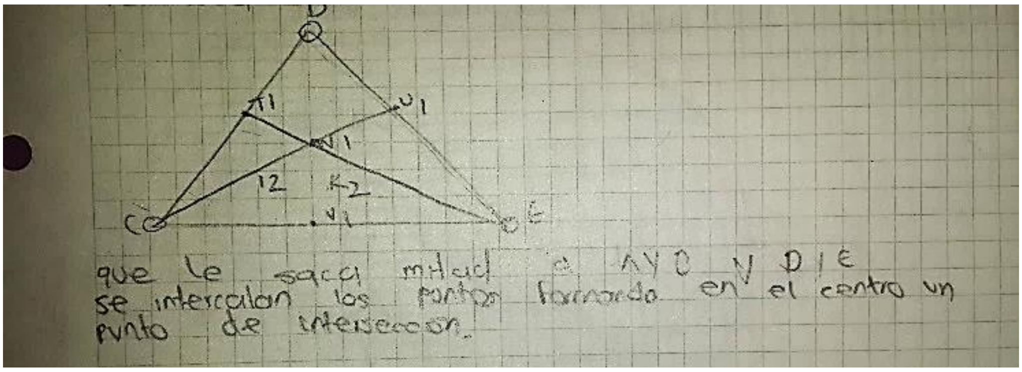


En la figura 12 se observó cómo determinaron el centro de gravedad haciendo uso de las herramientas de Geogebra, segmento, punto medio y punto de intersección. Se observó que combinaron las estrategias 3 y 4, implícitamente haciendo una distinción entre cada una de las regiones que quedaban determinadas cuando trazaron las diagonales y hallaron el punto de intersección; esta forma presentada por los estudiantes correspondió con el postulado 10 y en el momento en el que colorearon los triángulos, coincidieron con H3, descomponiendo la figura en figuras del mismo tipo. Esta estrategia fue complementada usando la herramienta para hallar el área, determinando cuatro triángulos y concluyendo que “cada parte de la figura mide igual… el área es 11”, previamente determinaron el centro de gravedad dividiendo por la mitad y transfiriéndolo a una hipotética balanza “imaginemos que el área pesa igual”. Esta relación que establecieron entre área y peso, puede explicarse retomando a Castro (2007).

Aquí nuevamente se presentó una forma de comparación descrita en la actividad 1, esta básicamente consistía en descomponer la figura en figuras del mismo tipo, haciendo uso de elementos básicos de la Geometría como la construcción de diagonales, puntos medios, puntos de intersección, entre otros, para luego determinar el centro de gravedad y posteriormente transferir implícitamente a una hipotética balanza; así como lo hacía Arquímedes determinando el área o el volumen de la figura o el sólido estudiado (Yuste 2009).

En el triángulo, hicieron uso de las herramientas punto medio, segmento y punto de intersección:

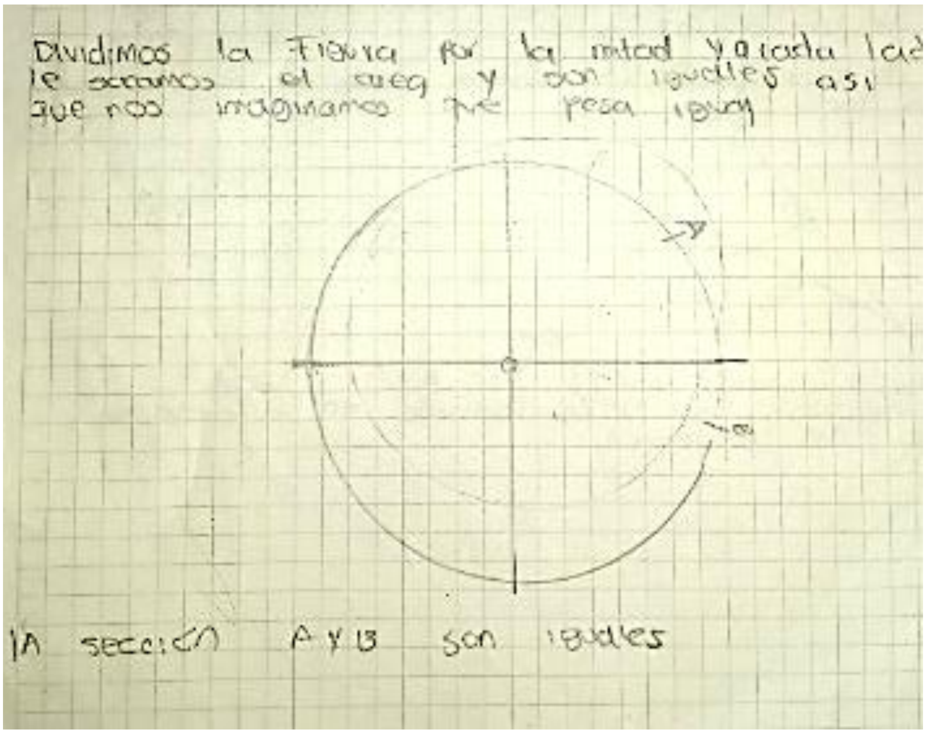
Figura 12. Representación en Geogebra, triángulo.



En la figura 12 la estrategia usada correspondió con la número 3, pero fue ampliada por el apoyo de Geogebra, lo que quiso decir que además de dividir la figura como lo hicieron en la actividad uno de manera física, aquí lo hicieron usando las herramientas que proporcionaba el software. En resumen para el caso del triángulo determinaron los puntos medios de dos de sus lados y los unieron con su correspondiente vértice. La intersección de los dos segmentos estableció el centro de gravedad de la figura, determinando que el centro de gravedad de un triángulo era su centro geométrico, tal como lo estableció H2.

Para el círculo construyeron dos diámetros perpendiculares, dividiendo el círculo en cuatro partes iguales, señalando dos secciones A y B afirmando que eran iguales.

Figura 13. Registro del estudiante. Centro de gravedad círculo.



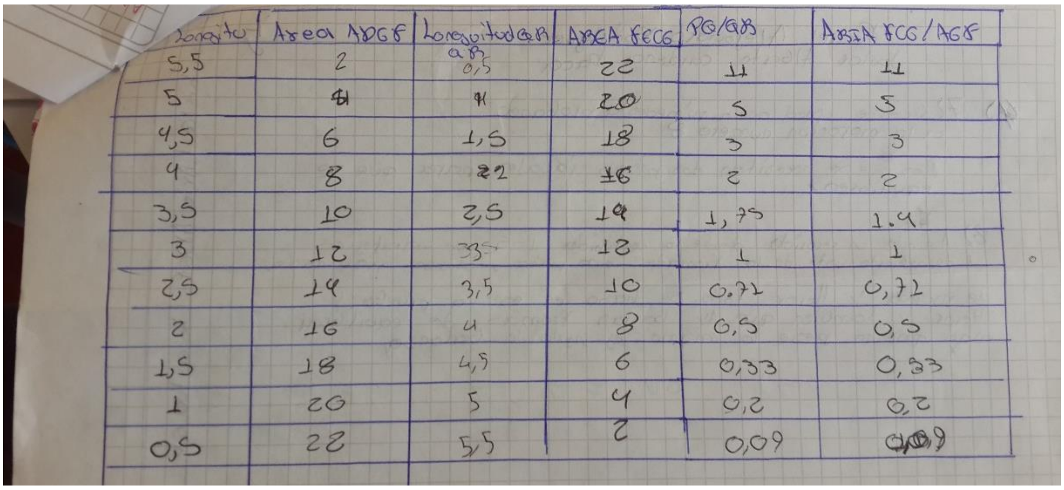
En la figura 13 aunque los estudiantes no lo enunciaron, gráficamente se observó que determinaron el centro del círculo, coincidiendo con lo planteado en lema 6 y H2, donde el centro de gravedad era también el punto que era el centro del círculo. Aquí apareció de nuevo la idea de pesar lo mismo, la relación área-peso, desde lo planteado en H1, el peso de cada figura es igual a su magnitud geométrica; por ejemplo, el peso de una línea es su longitud, el peso de una superficie es su área, etc.

3.1.1.3 Desde la combinación de hipótesis mecánicas y composicionales en términos de la comparación de magnitudes

Actividad cuatro

Esta actividad buscaba trabajar la proposición número 8, partiendo de una construcción en Geogebra; la intención de experimentar de manera virtual con la ley de la palanca a partir del uso de las herramientas del software, específicamente para calcular longitud y área, permitió completar la tabla:

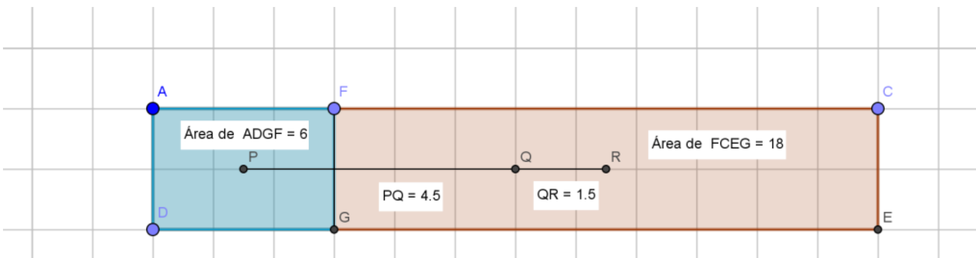
Figura 14. Registro del estudiante. Relación longitudes áreas.



Longitu	Area ADGF	Longuitud QR	AREA FECG	PQ/QR	AREA FCG/AGF
5,5	2	0,5	22	11	11
5	4	1	20	5	5
4,5	6	1,5	18	3	3
4	8	2	16	2	2
3,5	10	2,5	14	1,75	1.4
3	12	3	12	1	1
2,5	14	3,5	10	0,71	0,71
2	16	4	8	0,5	0,5
1,5	18	4,5	6	0,33	0,33
1	20	5	4	0,2	0,2
0,5	22	5,5	2	0,09	0,09

En la figura 14 los estudiantes completaron la tabla a medida que hicieron uso de la construcción de Geogebra, iban moviendo el punto F, modificando los valores para los segmentos PQ y QR, las áreas ADGF y FCEG.

Figura 15. Representación Geogebra, proposición 8.



Al preguntar a los estudiantes por lo que observaron en la figura 15, establecieron que se necesitaban dos pesos iguales para que se equilibraran, postulado 1. Esta manera de trabajar en la actividad mostró elementos que permitieron relacionar las acciones de los estudiantes con la estrategia 5, donde al parecer la única condición para mantener el equilibrio consistía en tener pesos iguales. Como manera de verificación explicaron, si se movía el punto F, tanto las áreas como las longitudes tendrían los mismos valores.

A manera de reflexión es importante destacar que los estudiantes llevaron más a completar la tabla, que en mostrar las estrategias para comparar áreas y longitudes. Postulado 1.

Actividad cinco

Esta guía de trabajo tenía como objetivo, simular en el software Geogebra una balanza para verificar algunas proposiciones del equilibrio de los planos. La construcción tenía tres puntos que podían animarse; al mover los puntos U y T se alargaban los segmentos que sostenían a los paralelogramos en su centro de gravedad, al mover el punto D, cambiaban de tamaño los paralelogramos y la longitud de los brazos de la balanza. Las primeras acciones de los estudiantes correspondieron a mover dichos puntos para explorar la construcción y así poder dar respuesta a las preguntas planteadas en la actividad.

Al indagar por lo que ocurría a medida que movía el punto D, ¿cómo explica que la balanza siempre se encuentre en equilibrio?, el grupo respondió:

Tabla 14. Registro del estudiante. Actividad Nº 2, pregunta 4.

4. A medida que mueve el punto D, cómo explica que la balanza siempre se encuentre en equilibrio.	Es porque el cuadrado más pequeño está más lejos del punto de gravedad y el más grande está más cerca del punto por lo tanto el cuadrado que está más cerca tiene menos peso que el que está más lejos.

En la tabla 14, fue posible verificar que se enunció en palabras de los estudiantes el principio de la ley de la palanca, coincidiendo con la estrategia 5, donde el grupo explicó la relación "área del cuadrado-peso del cuadrado- distancia del punto de apoyo", a su vez se acercaron con lo teorizado por Arquímedes en la proposición 3 y H1. Aquí es importante reconocer que la experimentación hecha por el grupo en las actividades uno y dos, proporcionaron elementos a los estudiantes para enunciar de manera similar como lo hizo Arquímedes, en la teorización presentada en el libro "Sobre el equilibrio de los planos I". La estrategia 5, se relacionó con H1 cuando los estudiantes asociaron el peso del cuadrado con su magnitud geométrica que era el área, con H2 en el momento en que tuvieron en cuenta el centro de gravedad de los paralelogramos, y con H4 cuando al establecer condiciones de equilibrio fue posible determinar magnitudes, que para el caso del grupo era más claro cuando el peso y la distancia eran iguales.

Al profundizar por la condición o condiciones respecto a las longitudes de los brazos y sus correspondientes áreas para mantener las condiciones de equilibrio reconocieron que:

Tabla 15. Registro del estudiante. Actividad Nº 2, pregunta 8.

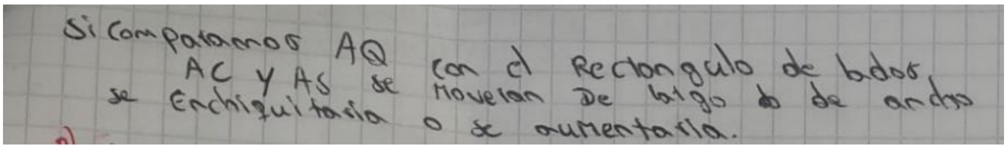
8. ¿Cuál es la condición o las condiciones para que la longitud del brazo de la balanza con su correspondiente área se mantengan en equilibrio con el otro brazo y su correspondiente área?.	Condición de cumplir que la suma de las dos (QS) y (SN) deben sumar 6. Que la longitud correspondiente al punto de apoyo de los dos lados tiene que ser igual a la longitud completa del brazo de la balanza.

En la tabla 15 se evidenció el hallazgo hecho por los estudiantes respecto a que las longitudes de los brazos eran constantes, debían sumar siempre 6, al parecer obedeció a que hubo un reconocimiento más notorio de las longitudes que de las áreas; es decir que la suma de las longitudes de los segmentos QS y SN se compensaba a medida que se movía el punto D de la construcción, pero lo mismo no ocurrió con las áreas, no notaron que la suma de las áreas debía ser igual a 24. Fue confuso observar que hubo acciones del grupo que explicitaron la relación área-peso-longitud; a mayor área mayor peso, la relación con la longitud de los brazos “relación mayor distancia-menor peso, menor distancia-mayor peso”, pero en el caso de la actividad no profundizaron en la compensación de las áreas y mucho menos en áreas-longitudes. Esta apreciación se reporta a partir de mover el punto D. En un caso particular determinaron que el cuadrado más pequeño estaba más lejos del punto de apoyo y el más grande estaba más cerca del punto, por lo tanto el área del objeto que estaba más lejos tenía menor peso en relación con el área del objeto que estaba más cerca.

Actividad seis

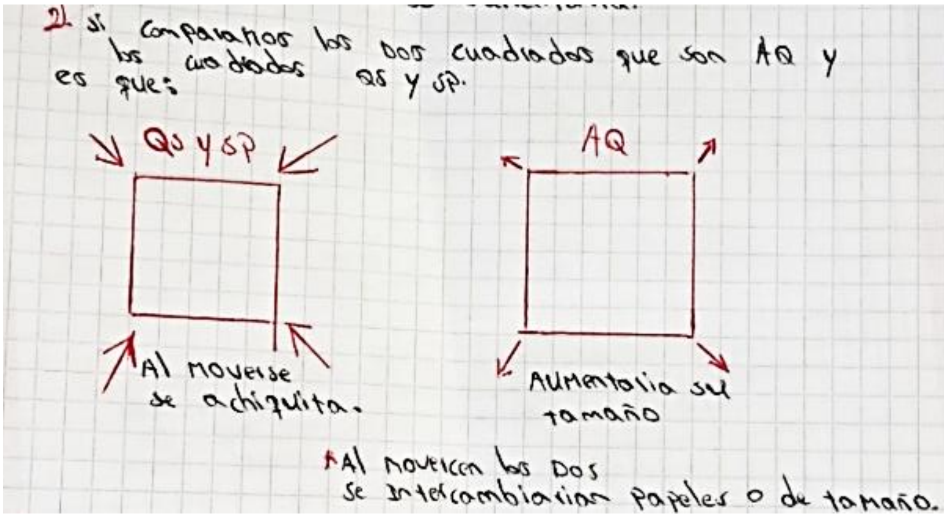
La actividad buscaba trabajar la proposición número dos del libro del Método de Arquímedes, en la parte inicial desde la comparación de áreas. En relación con la pregunta ¿Qué observa luego de realizar la construcción?, si compara el cuadrado AQ con el rectángulo de lados AC y AS, qué puede decir, sí mueve el punto N de la construcción qué ocurre?

Figura 16. Registro del estudiante. Actividad Nº 7, pregunta a.


Si comparamos AQ con el Rectangulo de lados AC y AS se movieran De largo de ancho se Enchiquitaria o se aumentaria.

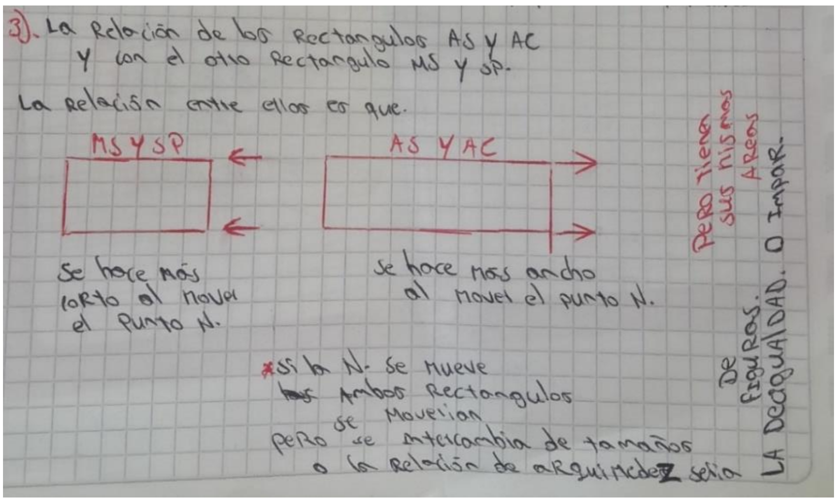
En la figura 16, el grupo de estudiantes realizó una construcción auxiliar en la que a partir de la longitud AQ, construyeron un cuadrado, y con las longitudes AC y AS un rectángulo que cambiaba a medida que el punto N se animaba. A partir de lo anterior se observó que la comparación de magnitudes estaba dada en términos de la compensación de tamaños, mientras uno aumentaba el otro disminuía, pero las áreas permanecían iguales. Esta forma de acción presentada puede corresponder con lo planteado por Arquímedes en la proposición 8, donde la comparación de magnitudes tiene en cuenta la compensación de las áreas a partir de la distancia respecto del punto de apoyo y el centro de gravedad. Para ampliar lo propuesto por el grupo en la pregunta anterior fue necesario presentar lo respondido en la pregunta b, donde se indagó por la relación que pudo establecerse entre el cuadrado AQ, y los cuadrados QS y SP.

Figura 17. Registro del estudiante. Actividad Nº 7, pregunta b.



En la figura 17 se observó que lo propuesto por el grupo siguió la dirección ya planteada respecto al reconocimiento de la compensación de las áreas a pesar de tener diferente forma, aunque se evidenció que no se explicitó el uso de la balanza, sí se estaba haciendo uso de esta en el momento en el que el punto N fue animado y el cuadrado y el rectángulo se volvieron dependientes. Esta forma de abordar la actividad se enmarca en la estrategia 5, en la que la comparación se da por compensación "intercambio de tamaños" pero las áreas permanecen iguales.

Figura 18. Registro del estudiante. Actividad Nº 7, pregunta c.



En general en la figura 18 se observó que la comparación estuvo dada en relación con la compensación, a medida que la longitud de uno de sus lados cambiaba, aumentaba o disminuía el lado de la otra figura, reconocieron que a pesar de este cambio las figuras se volvían desiguales es decir no tenían la misma forma, pero sí la misma área.

Implícitamente, la forma en la que compararon magnitudes los estudiantes se acercó bastante a la teorización que hizo Arquímedes. Entre los elementos más representativos de la heurística de Arquímedes que fueron puestos en juego por los estudiantes, se destacó contrapesar las figuras a partir de colocarlas de manera que tuvieran como diámetro o eje común la misma línea recta que actuaba como los brazos de la balanza. Las figuras son seccionadas por planos, generalmente perpendiculares a dicho eje, creando infinitas rebanadas de forma que los centros de gravedad estuvieran sobre el eje común (hipótesis composicionales).

3.1.2 Grupo dos

Tabla 16. Resumen por actividad, estrategias y forma particular de la heurística de Arquímedes.

NÚMERO DE LA ACTIVIDAD	ESTRATEGIAS	ANÁLISIS INICIALES (Grupo 2)	FORMA PARTICULAR HEURISTICA DE ARQUÍMEDES
1	1, 4	1.	Proposición 9, Proposición 10
		4.	H0 y H3, Lema 6, H4
2	4, 5	4.	Proposición 2
		5.	Proposición 1, Proposición 2, Proposición 3, Postulado 6, H4, Heurística propia tres formas de comparar.
3	3,4	3. 4.	Lema 6, proposición 9, Proposición 10, H1, H0, H2, H4
4	4 1	4.	Proposición 8
		1.	H2
5	5	5.	Proposición 3, Proposición 8
6	3	3.	No hay una estrategia que se aproxime a la propuesta por Arquímedes en la comparación de magnitudes.

En la tabla 16 se observó de manera general, que el grupo de estudiantes pasó en las seis actividades por cuatro de las cinco estrategias, pero fue en la parte de las hipótesis mecánicas donde transitaron solo por tres de ellas. En las actividades restantes apoyadas en Geogebra, fue posible observar el paso por las estrategias 1, 3, 4 y 5. No fue posible observar la estrategia número dos, que corresponde las hipótesis composicionales, se descomponía la figura en otras conocidas para determinar el centro de gravedad y la comparación de pesos. En relación con la forma particular de los elementos de la heurística de Arquímedes, se destacaron las proposiciones 1, 2 y 3 que mostraban la relación de pesos iguales a distancias iguales, pesos y distancias desiguales que se mantuvieron en equilibrio, y las proposiciones 9 y 10, como estrategias para determinar el centro de gravedad de un paralelogramo.

3.1.2.1 Desde las hipótesis mecánicas en términos de la comparación de magnitudes

Actividad uno

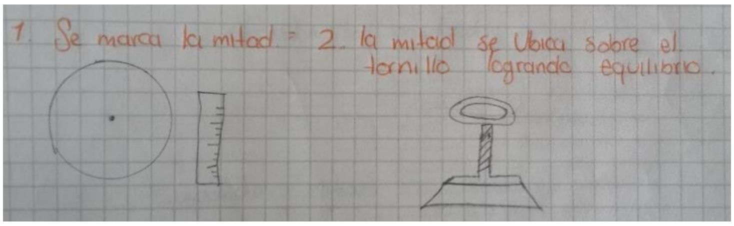
Contextualizando la actividad número uno, donde se propuso equilibrar figuras elaboradas en cartón sobre un tornillo, surgieron las primeras formas de comparación

Tabla 17. Registro estudiante. Actividad Nº1, pregunta 1.

PREGUNTA/ ACTIVIDAD Nº1	RESPUESTAS
1. Describan el proceso que realizaron para mantener las figuras sobre el tornillo.	Tratar de que todos los lados de cada figura iguales, es decir hallar el centro de cada figura y ponerla sobre el tornillo así toda quedará equilibrada. La gravedad o al tener el mismo peso a cada lado haga que se estabilice y no se vaya hacia algún lado.

En la tabla 17 los estudiantes pusieron en juego la estrategia 1 donde marcaban la mitad para determinar el centro de gravedad, así al colocarla sobre el tornillo toda quedaba equilibrada. Desde la forma particular de la heurística de Arquímedes, la acción llamada marcar la mitad podía corresponder con la proposición 9, donde determinar el punto medio era la estrategia para hallar el centro de gravedad. El equilibrio estuvo presente en esta estrategia y dependió directamente de la distribución que se hacía del peso respecto del punto de apoyo; implícitamente se observó que el peso se asoció con la cantidad de área, porque encontrar la mitad era visualizar que a lado y lado la figura estuviera ubicada simétricamente para que no se inclinara para ningún lado. Esta idea de la mitad, fue profundizada cuando respondieron la pregunta respecto a cómo utilizando algunos materiales como regla, la cuerda etc. podrían utilizarlos para determinar el centro de gravedad.

Figura 19. Registro estudiante. Centro de gravedad del círculo.



Para el caso del círculo, tal como se observó en la figura 19, tomaron como instrumento la regla y buscaron determinar la mitad. Probaron el hallazgo experimentando con el tornillo, afirmando que el círculo quedaba con la misma cantidad de peso a los lados, manteniéndose estable. Aunque a simple vista no se vio, fueron los radios los que determinaron el centro de gravedad (lema 6), fue posible reconocer que todas las figuras tenían peso, es decir lo planteado en H0, de igual manera que el círculo podía descomponerse en infinitas figuras del mismo tipo y de orden inferior (H3).

La forma en la que equilibraron las figuras determinó el centro de gravedad o punto de equilibrio; para lograrlo midieron la figura, fundamentaron esto diciendo que habría el mismo peso en cada parte de la figura y así podría sostenerse sobre el tornillo manteniéndose en equilibrio “Comparación de pesos en relación con la misma figura”.

Esta forma de equilibrar siguió lo planteado en la estrategia 4 y fue complementada por H4, reconociendo que todas las figuras tenían peso y que haciendo uso de una balanza era posible equilibrar figuras y determinar magnitudes.

Actividad dos

Continuando con el enfoque experimental, en esta actividad se propuso el trabajo con una balanza y clips como contrapesos para establecer condiciones de equilibrio. El objetivo aproximar a los estudiantes por el camino de los postulados de Arquímedes propuesto en el libro Sobre el equilibrio de los planos I. A continuación se presentan las estrategias mostradas por los estudiantes en el desarrollo de la actividad. Cuando se preguntó por lo que observaban en el experimento uno:

Tabla 18. Registro estudiante. Actividad Nº2, pregunta b.

b. ¿Qué observan, como explican lo que acaba de ocurrir en el experimento?	En la balanza colocando los clips uno de ellos a cm y otro a los cm el izquierdo obtiene más peso que el derecho. En el vemos que acaba de ocurrir que los dos no tienen el mismo nivel, uno está más arriba que el otro, el derecho menos peso y el izquierdo más peso.

Lo propuesto por el grupo, registrado en la tabla 18, aunque enunciado en otras palabras, se relacionó con la proposición 2 del trabajo de Arquímedes la experimentación permitió determinar que la balanza se inclinaría hacia el lado derecho, porque al parecer entre mayor distancia al punto de apoyo el clip pesaba más. Los estudiantes utilizaron la expresión "el mismo nivel"; a pesar de tener dos clips con el mismo peso, pareciera que la distancia aumentara el peso del clip. Se observó que estaban estableciendo una relación que aumentaba o multiplica el peso del clip dependiendo de la distancia, esto es lo que establece la estrategia 4, pero no se enunció en la producción escrita.

En el experimento dos de la actividad, se propusieron diferentes situaciones en las que a partir de la experimentación, determinaron si se mantenía o no en equilibrio la balanza. Producto de ensayar, probar con la balanza y los clips, se evidenciaron en las producciones de los estudiantes nexos algunos de los elementos de la heurística de Arquímedes:

Tabla 19. Registro estudiante. Actividad Nº2, pregunta d.

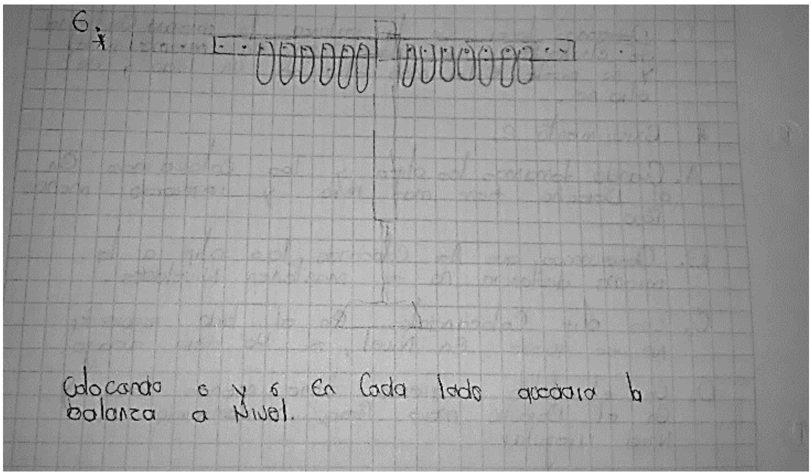
d. ¿Qué deben tener en cuenta para que el instrumento se mantenga en equilibrio?	Debemos tener en la balanza la misma cantidad de clips para que quede en un mismo nivel y no puede estar más alto de un lado y del otro. Observamos que así colocando los clips a la misma distancia se mantienen nivelados.

En la tabla 19 las condiciones de equilibrio pusieron en juego la proposición 1, 2 y 3 donde se destacaron tres elementos fundamentales de la ley de la palanca inmersos en la estrategia 5. El primero de ellos fue el reconocimiento de una relación directa entre pesos y distancias iguales, el segundo, a partir de mantener pesos iguales y distancias desiguales, la balanza se inclinó hacia el lado del peso ubicado a mayor distancia y, finalmente, pesos desiguales con distancias desiguales se mantuvo en equilibrio con el peso mayor a una distancia menor.

Cuando abordaron el experimento 3, la situación propuesta rompía con lo que se venía trabajando (pesos iguales a distancias iguales), así que siguieron las indicaciones y ubicaron 2 clips en la parte izquierda a 6cm respecto del punto de apoyo y tres clips en la parte derecha a 4cm, al preguntar por lo que sucedía respondieron que los clips “tenían nivel” y se mantenían equilibrados. Aparentemente aquí el grupo, observó que las condiciones de equilibrio se mantuvieron a pesar de tener diferente cantidad de clips a lado y lado a diferentes longitudes. Partiendo de ilustrar al grupo con este ejemplo, se pidió que propusieran tres situaciones de equilibrio utilizando 12 clips, sin hacer el experimento las dibujaran, señalando donde ubicaron los clips para mantener la balanza en equilibrio.

Situación número 1:

Figura 20. Registro estudiante. Actividad Nº2, situación 1.

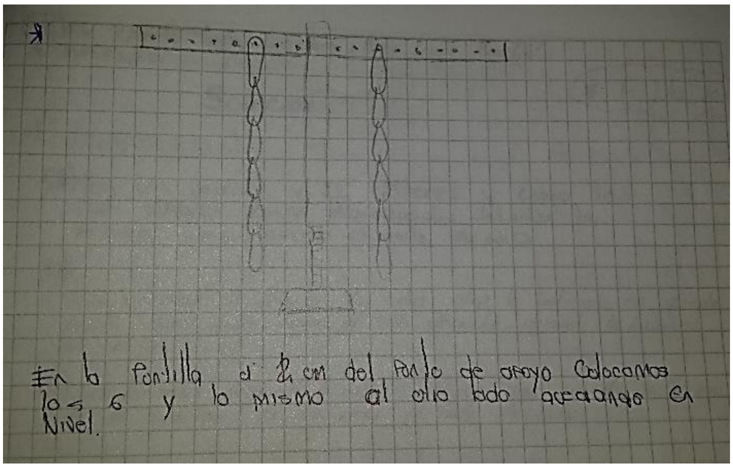


En la figura 20 optaron por ubicar 6 clips en el lado izquierdo de la balanza y 6 clips en el lado derecho de manera simétrica, a diferentes distancias. Esta forma de comparación iba en la dirección de lo propuesto por Arquímedes en el postulado 1 y la proposición 1; se observó de manera simultánea cómo la comparación de magnitudes se dio de manera conjunta, es decir que los 6 clips de la izquierda se compensaron con los seis clips de la derecha. Implícitamente aquí tuvieron en cuenta la relación peso-longitud, pero la diferencia con otras formas de comparación presentadas por el grupo radicó en el hecho de hacerlo de manera simultánea siguiendo la distribución de los pesos y las distancias de manera simétrica-horizontal.

Situación número 2:

Ubicaron a lado y lado seis clips pero a una distancia de tres centímetros del punto de apoyo. Hay que destacar que hicieron con los seis clips una cadena que colgaba de manera vertical. Dentro de la experimentación se observó que lograron equilibrar de una manera distinta "quedando a nivel".

Figura 21. Registro estudiante. Actividad Nº2, situación 2.

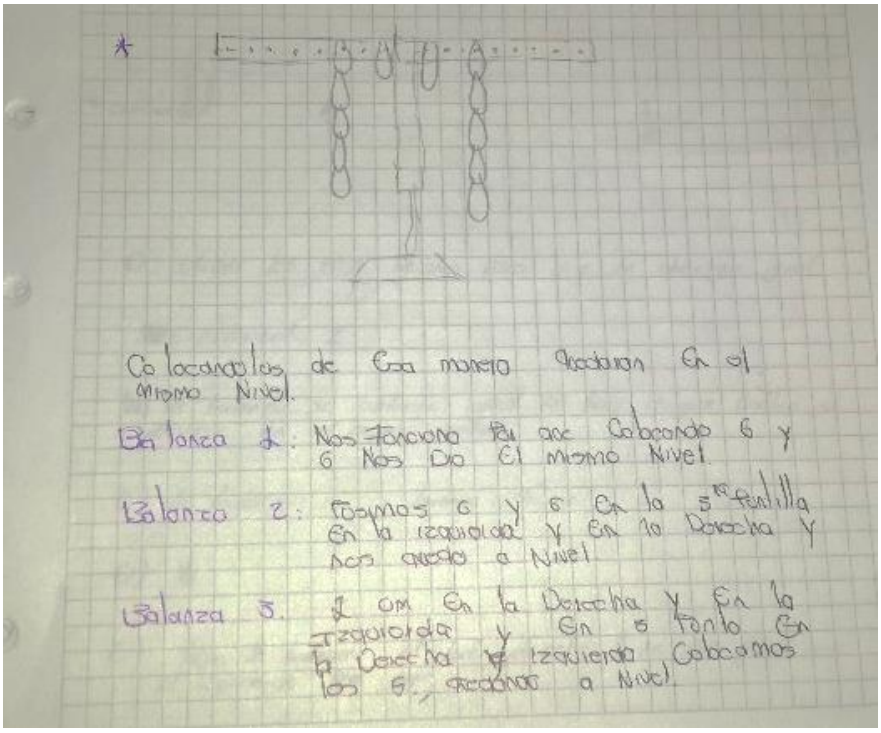


En la figura 21 la forma de comparación propuesta pudo relacionarse con el postulado 2; cada clip fue añadido de manera simétrica-vertical, manteniendo la balanza en equilibrio.

Situación número 3:

Descompusieron los 6 clips en una cadena de cinco y dejaron uno suelto, lo mismo hicieron con los clips de la parte derecha y los ubicaron a lado y lado de la balanza; la cadena de clips a una distancia de tres centímetros del punto de apoyo y el clip solo a una distancia de un centímetro del punto de apoyo, así lo mantuvieron en equilibrio.

Figura 22. Registro estudiante. Actividad Nº2, situación 3.



En la figura 22 se observó que esta forma de comparar combinó la situación 1 y 2, simetría-horizontal y simetría-vertical el peso de los clips fue distribuido en dos puntos de la balanza, reconociendo que la condición para mantener en equilibrio dependió de la relación peso-longitud pero además de la distribución del peso de manera uniforme.

Estas tres situaciones evidenciaron que la comparación no trascendió más allá de lo planteado en el postulado 1 y la proposición 1; a pesar de proponer una situación de equilibrio donde no siempre los clips estaban ubicados de manera simétrica, el sistema se mantenía en equilibrio. De las tres situaciones resalto que la comparación de magnitudes se dio bajo una heurística propia que estuvo pensada creativamente bajo la experimentación, y que apareció de manera espontánea.

3.1.2.2 Desde las hipótesis composicionales en términos de la comparación de magnitudes

Actividad tres

En esta actividad con el apoyo de Geogebra, el grupo de estudiantes propuso para cada caso las acciones que los llevaron a equilibrar cada objeto. Dentro de las estrategias combinaron la 3 y 4 para determinar el centro de gravedad de las figuras y plantearon para el caso del segmento (segmento AB de 2 unidades de longitud):

El proceso que realizaron fue hallar el punto medio o centro; utilizando la herramienta punto medio o centro sacaron la mitad exacta del segmento AB. Ya que en el ejercicio número 1 se dieron cuenta que el centro de gravedad era en la mitad de la figura ya que el peso queda balanceado.

El procedimiento que realizaron los estudiantes para determinar el punto medio del segmento AB, consistió en utilizar la herramienta punto medio; este resultado fue obtenido según los estudiantes a partir de la experiencia de otras actividades. Enunciaron que se dieron cuenta que el “centro de gravedad” era en la mitad de la figura ya que el peso quedó balanceado: Esta forma de proceder pudo hilarse con lo propuesto en H1; aquí se enunció que el peso de cada figura era igual a su magnitud geométrica; por ejemplo, el peso de una línea es su longitud, el peso de una superficie es su área, etc.

Para el caso de los triángulos, el proceso que realizaron para hallar el centro de gravedad fue con la herramienta punto medio o centro, con la cual sacaron la mitad de cada lado del triángulo isósceles y sacando la mitad de la mitad para que el peso quedara balanceado.

El proceso que utilizaron para hallar el centro de gravedad del triángulo equilátero, fue el mismo que se utilizó con el triángulo isósceles.

En los dos casos fue posible identificar que hicieron uso de H0, H2 y H4 fue posible afirmar esto porque reconocieron que las figuras tenían peso, pero además que para equilibrar los triángulos fue necesario determinar su centro de gravedad. Este lo construyeron a partir de determinar el punto medio de cada lado y unirlo con su vértice.

Hasta este punto el grupo mostró que una de las estrategias a la que recurrieron con regularidad en la comparación de magnitudes, fue la compensación recurriendo a la simetría del triángulo, para distribuir el peso de cada una de las figuras.

Para el caso del rectángulo y el romboide:

Rectángulo: el proceso que utilizaron para hallar el centro de gravedad fue con la herramienta punto de centro o medio, con esta sacamos la mitad de cada uno de sus lados y también sus diagonales.

Romboide: El proceso que utilizaron para hallar el centro de gravedad fue con la herramienta punto de centro o punto medio realizamos el mismo procedimiento que con el rectángulo.

Reconocieron que la herramienta punto medio, les sirvió para determinar el centro de gravedad. Este fue quizás el camino que pudo haber recorrido Arquímedes para su teorización condensándolo en las proposiciones 9 y 10. Evidencia de ello fue que para las dos figuras el punto medio unido con su correspondiente punto medio del lado opuesto, determinó dos segmentos que al intersectarse permitieron encontrar el centro de gravedad, de manera análoga al construir las diagonales la intersección de estas fijó el centro de gravedad.

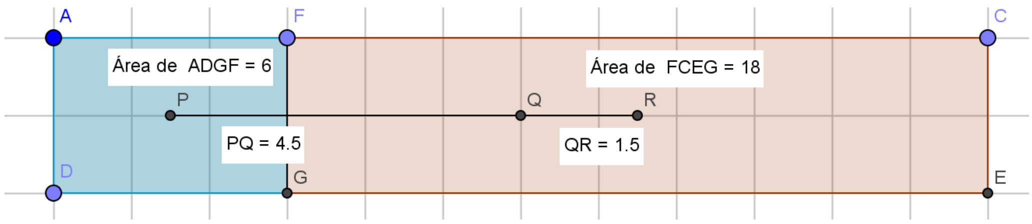
Finalmente al indagar sobre la relación de la primera con la cuarta actividad, el grupo dijo que se estaban equilibrando pesos, pero luego de cuestionar un poco se llegó a que lo que estaban equilibrando eran áreas, profundizando un poco sobre cómo probar que se mantuvieron en equilibrio, construyeron las áreas con la herramienta polígono y calcularon las áreas de los cuatro triángulos. Al indagar por resultados donde dos triángulos con diferente forma tuvieran la misma cantidad de área, reconocieron que eso a simple vista no era posible determinarlo y que nunca lo esperaban. A manera de conclusión y simulando poner el centro de gravedad del paralelogramo en el tornillo, concluyeron que lo que se estaba equilibrando eran los pesos (léase áreas para que se mantuviera en equilibrio) H4.

3.1.2.3 Desde la combinación de hipótesis mecánicas y composicionales en términos de la comparación de magnitudes

Actividad cuatro

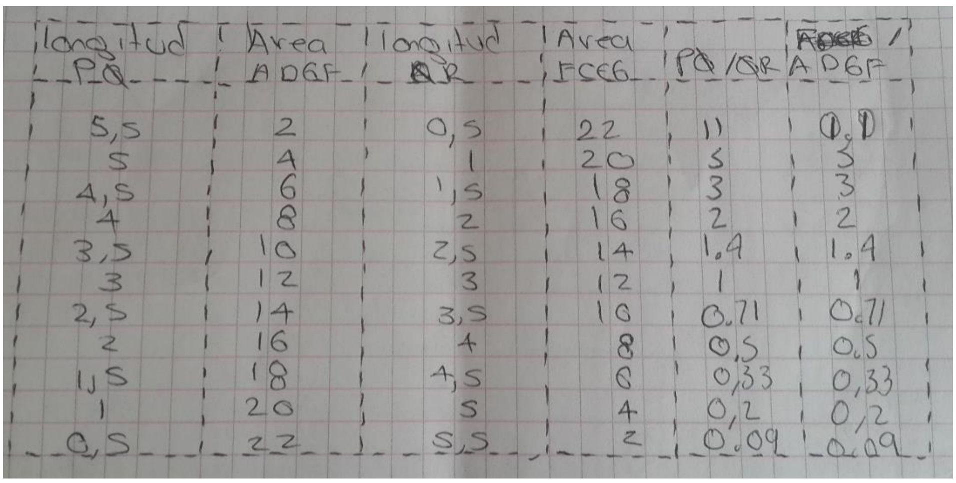
Luego que los estudiantes hicieron uso de la construcción entregada en Geogebra y animaron el punto F, las áreas de ADGF y FCEG, junto con las longitudes PQ y QR cambiaron.

Figura 23. Representación en Geogebra, proposición 8.



En la figura 23 los cambios en las longitudes y las áreas fueron registrados por los estudiantes en la tabla.

Figura 24. Registro estudiante, longitudes y áreas.



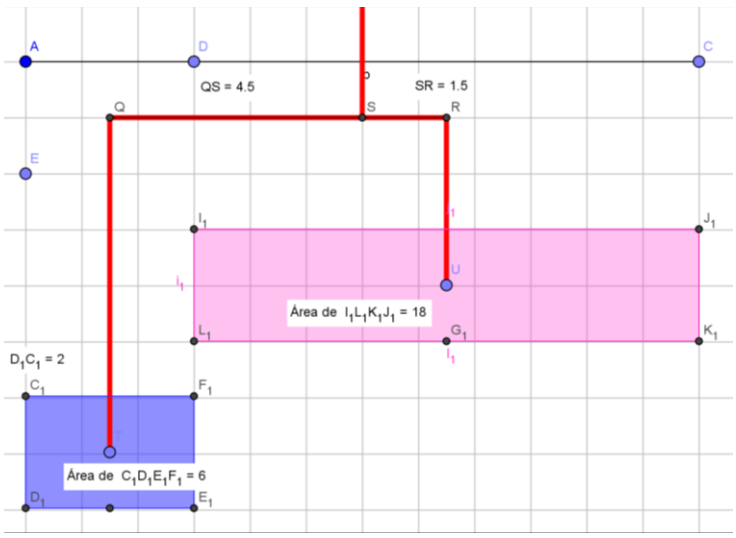
longitud PQ	Area ADGF	longitud QR	Area FCEG	PQ/QR	~~FCEG~~ / ADGF
5,5	2	0,5	22	11	11
5	4	1	20	5	5
4,5	6	1,5	18	3	3
4	8	2	16	2	2
3,5	10	2,5	14	1.4	1.4
3	12	3	12	1	1
2,5	14	3,5	10	0.71	0.71
2	16	4	8	0,5	0.5
1,5	18	4,5	6	0,33	0,33
1	20	5	4	0,2	0,2
0,5	22	5,5	2	0.09	0.09

En la figura 24 luego de completar la tabla e indagar por la relación que se observó entre la longitud PQ y el área ADGF, observaron "el mismo resultado". En la comparación dada por los estudiantes aunque se reconoció qué se dieron resultados iguales al dividir las longitudes y las áreas, no se explicitó o reconoció que fue lo que se estaba haciendo o comprendiendo desde la heurística de Arquímedes. Se esperaba que relacionaran muchos de los elementos puestos en juego en las actividades anteriores tales como condiciones de equilibrio en la balanza con brazos iguales o desiguales. La idea de pesar geométricamente figuras etc, encontrando acciones que llevaran a encontrar alguna relación con la proposición 8, donde de forma general se espera encontrar relación entre pesos-áreas, longitudes y centro de gravedad para mantener el equilibrio de las figuras.

Actividad cinco

De manera análoga en la actividad 5, al mover el punto D, las longitudes de los brazos de la balanza y las áreas iban cambiando.

Figura 25. Representación en Geogebra, proposición 8.



En la figura 25 a medida que animaban el punto D, observaban que solo se movía de un lado a otro, manteniendo iguales las relaciones de la construcción. A partir de la observación los estudiantes presentaron cinco consideraciones, que se relacionaron directamente con la estrategia 5, la proposición 3 y 8:

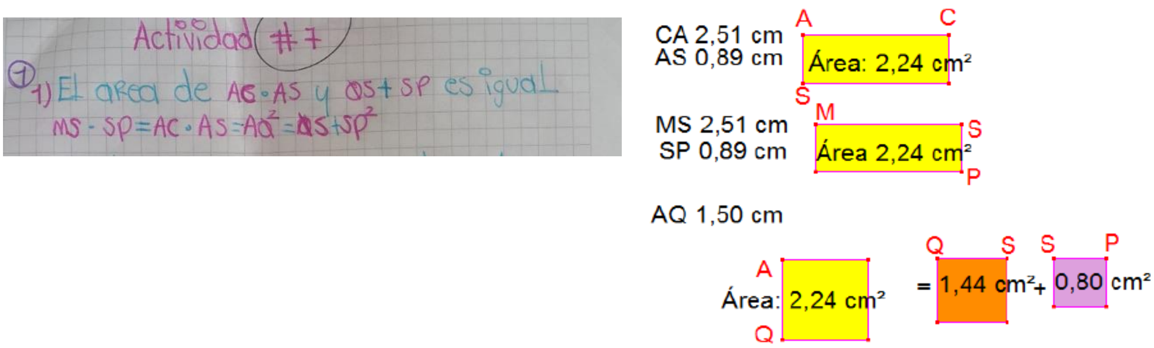
1. La balanza se mantiene en equilibrio por la distancia de los objetos.
2. Que todos sus lados se mantienen con el mismo peso.
3. Que ambos tienen el mismo peso y se mantiene en equilibrio la balanza.
4. Que las áreas se desigualan y la distancia de QS es menor a la de SR.
5. La distancia hace que se mantenga en equilibrio la balanza.

En general lo que aquí se observó fue que los estudiantes explicitaron condiciones de equilibrio que dependieron o del peso o de la longitud, pero no las conjugaron de manera simultánea en la comparación de magnitudes o por lo menos de manera escrita. Se esperaba que en este punto de la secuencia de actividades, muchas de las acciones y análisis presentados por el grupo no dejaran de lado las relaciones que ya habían explicitado en otras actividades, como por ejemplo la dependencia entre pesos iguales-distancias iguales o pesos desiguales-distancias desiguales. Sin embargo los hallazgos presentados vislumbraron un camino hacia la comparación de magnitudes, donde fue posible que los estudiantes explicitaran a partir de la interacción con experiencias de tipo físico y virtual, que nutrieran y le brindaran elementos que de otra manera quizás, no hubieran transitado.

Actividad seis

En esta actividad se observó a partir de la producción de los estudiantes, que calcularon y establecieron relaciones entre las figuras comparando el área del cuadrado con el área del rectángulo, en este sentido se acercaron a la estrategia 3, ampliada hacia el uso de las herramientas del software**.**

Figura 26. Registro estudiante, actividad Nº6 pregunta 1.



En la figura 26 realizaron la construcción y haciendo uso de las herramientas del software, calcularon las áreas determinando que el área de los rectángulos (AC AS) (MS SP) era igual al área del cuadrado (AQ), logrando establecer una diferencia en relación con la ubicación espacial del rectángulo, manteniendo la misma área.

3.1.3 Grupo tres

Tabla 20. Resumen por actividad, estrategias y forma particular de la heurística de Arquímedes.

NÚMERO DE LA ACTIVIDAD	ESTRATEGIAS	ANÁLISIS INICIALES (Grupo 3)	FORMA PARTICULAR HEURISTICA DE ARQUÍMEDES
1	1,2,3	1.	Heurística propia, Postulado 4
		2.	H3
		3.	Lema 6, proposición 9, Proposición 10
2	5	5.	Postulado 1, Postulado 2, Postulado 3, Proposición 1, Proposición 2, Proposición 3
3	2, 3	2.	Lema 6, Postulado 5, H3
		3	Proposición 9, Proposición 10
4	5	5.	Proposición 8
5			No se observa
6	3	3	Proposición 1, Proposición 3

En la tabla 20 se observó de manera general que el grupo de estudiantes pasó en las seis actividades por cuatro de las cinco estrategias; en la parte de las hipótesis mecánicas transitaron por las estrategias 1, 2, 3 y 5. En las actividades restantes apoyadas en Geogebra, fue posible observar el paso por las estrategias 2, 3 y 5. En relación con la forma particular de los elementos de la heurística de Arquímedes se destacaron las proposiciones 1 y 3 que mostraron condiciones de equilibrio para pesos y distancias iguales, para pesos y distancias desiguales y las proposiciones 9 y 10, para determinar el centro de gravedad de un paralelogramo, partiendo de la intersección de las diagonales.

3.1.3.1 Desde las hipótesis mecánicas en términos de la comparación de magnitudes

Actividad uno

Cuando se pidió a los estudiantes que describieran el proceso que realizaron para mantener las figuras sobre el tornillo.

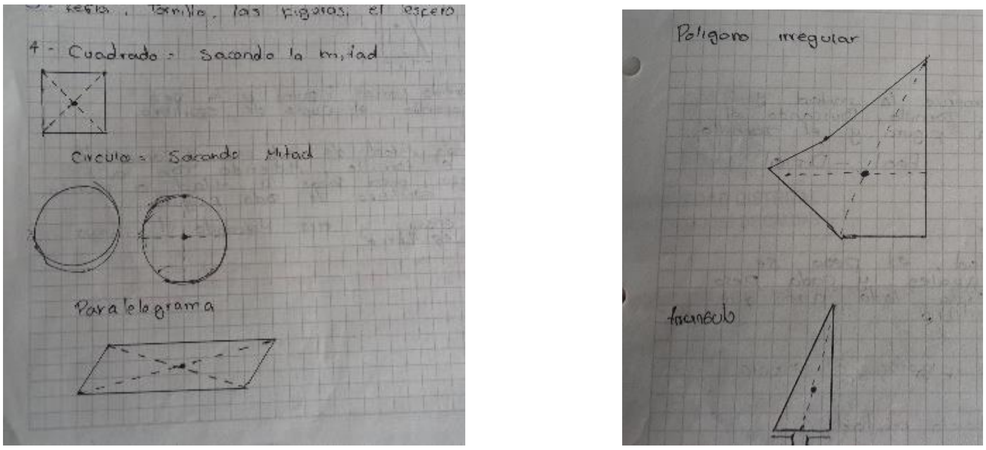
Tabla 21. Registro estudiante, actividad 1, pregunta 1.

PREGUNTA/ ACTIVIDAD Nº1	RESPUESTAS
1. Describan el proceso que realizaron para mantener las figuras sobre el tornillo.	Calcular aproximadamente la mitad y ponerlo sobre el tornillo, buscando el equilibrio entre la figura y el tornillo. a-circulo b-cuadrado c-paralelogramo d-triangulo e-polígono irregular

En la tabla 21 se observó que siguiendo la estrategia 1 por ensayo y error buscaban ubicar la mitad aproximadamente y poner las figuras sobre el tornillo. Los estudiantes ordenaron usando el criterio fácil y difícil en relación a la manera como pudieron determinar el centro de gravedad de manera experimental; aquí se observó una heurística propia sujeta a calcular aproximadamente la mitad, que visualmente era más fácil hallarla en el cuadrado, círculo y paralelogramo.

Aunque los estudiantes en sus producciones escritas no explicaron el proceso particular para equilibrar cada una de las figuras, sí lo mostraron gráficamente:

Figura 27. Registro estudiante, actividad uno centros de gravedad.



En la figura 27, para el caso del cuadrado y el paralelogramo, se observó la construcción de las diagonales y la intersección de estas para hallar el centro de gravedad, acorde con la estrategia 2 y tal como Arquímedes lo planteó en el postulado 10.

Una explicación dada para buscar el centro de gravedad según los estudiantes fue:

Tabla 22. Registro estudiante, actividad 1, pregunta 2.

2. ¿Cómo explican que cada figura pueda mantenerse en equilibrio sobre el tornillo?	Calculando la mitad el peso se divide en partes iguales y cada peso debería ir en cada lado para que mantenga el equilibrio. Sacando mitad de cada uno y poniendo en el tornillo, midiendo con la regla para sacar la mitad o punto de equilibrio de cada figura. Ensayo y error marcando el punto de equilibrio.

En la tabla 22 el grupo denominó a la estrategia "ensayo y error", sujeta a la acción de determinar la mitad midiendo con la regla, para dividir en partes iguales y luego probarlo sobre el tornillo. Estas acciones hicieron que se perdiera el carácter de ensayo y error que fue asignado por los estudiantes cuando lograron construir las diagonales y su intersección, porque utilizaron elementos de la heurística de Arquímedes, expuestos en la teorización que hizo en el libro "Sobre el equilibrio de los planos I".

Algo que sorprendió en el proceso de experimentación y que hasta el momento no había sido presentado por los dos grupos anteriores, fue una aproximación al postulado 4 y 5. Sin pedir que encontraran el centro de gravedad de las cinco figuras, las ubicaron sobre el tornillo haciendo que coincidieran sus centros de gravedad manteniendo el equilibrio. Para el caso del círculo, se observó que fueron construidos los diámetros y la intersección de estos determinó el centro de gravedad, lema 6. En el caso del polígono irregular, como hipótesis plantearon que encontrando el punto medio de dos lados, la intersección permitiría hallar el lugar donde debía apoyarse para que se equilibrara, al realizar la experimentación concluyeron que de esta forma no era posible hallarlo. Es importante destacar que de otro modo que no fuera la experimentación física, el grupo no pudo haber comprobado que la generalización de hallar la mitad, no siempre era válida para encontrar en centro de gravedad y a su vez comparar magnitudes.

Como se pudo observar, el grupo partió de encontrar la mitad por ensayo y error, coincidiendo con lo planteado en la estrategia 2, a su vez fue ampliada comparando las partes entre sí para determinar que eran iguales. Las acciones a las que recurrieron los estudiantes consistieron en calcular visualmente la mitad del peso, dividiendo en partes iguales la figura (iguales en forma y peso); cada peso debía ir en cada lado para que se mantuviera el equilibrio H3.

En general la comparación de magnitudes por parte de los estudiantes estuvo dada para esta actividad, en la estrategia 3, mencionando que para determinar el centro de gravedad de las figuras entregadas se:

- Usaron puntos medios, punto de intersección y diagonales, gráficamente elaboran las representaciones.
- Sacó la mitad de cada figura y la pusieron sobre el tornillo.
- Midieron con la regla para sacar la mitad o punto de equilibrio de cada figura.
- En el caso del círculo los estudiantes establecieron que eran los radios los que determinaban el lugar para mantener en equilibrio la figura.

Actividad dos

Se presentan estrategias mostradas por los estudiantes en el desarrollo de la actividad, en cada uno de los tres experimentos. Cuando se preguntó por lo que observaban en el experimento uno:

Tabla 23. Registro estudiante, actividad 2, pregunta b.

b. ¿Qué observan, como explican lo que acaba de ocurrir en el experimento?	Al poner el primer clip se fue al lado ubicado y al poner el otro de 6cm del largo al lado derecho le gano al de 4cm y quedó abajo el de 6 cm y arriba el de 4cm

En la tabla 23 se exhibe que los estudiantes enunciaron de manera similar lo propuesto por Arquímedes en el postulado 2, reconociendo que pesos iguales a distancias desiguales no se equilibraban; la balanza se inclinó hacia el lado del clip que estaba a mayor distancia del punto de apoyo.

Al indagar por lo que ocurrió si ubicaran los clips en otros lugares, propusieron la siguiente situación.

Tabla 24. Registro estudiante, actividad 1, pregunta c.

c. ¿Qué pasará si ubican los clips en otros lugares? , den un ejemplo de donde los ubicaron?	Pusimos en el lado izquierdo 7cm del punto de inicio y del derecho uno en 2cm y uno en 5cm y se nivelaron.

En la tabla 24 se evidenció que esta forma de accionar correspondió con la estrategia 5, recurriendo a la experimentación como el camino para equilibrar la balanza. Ubicaron en el lado derecho dos clips, uno en 5cm y el otro en 2 cm, luego ubicaron en el lado izquierdo un clip en 7 cm, al preguntarles por qué funcionaba argumentaron "fácil, 5 más 2 es igual a 7", (aquí la comparación se dio en términos de descomposición de pesos). El funcionamiento de la balanza según los estudiantes, dependió del lugar donde se ubicaron los clips, entre más lejos del punto de apoyo tendrían más peso y lo evidenciaron a partir de la experimentación.

La estrategia mostrada por los estudiantes "vía experimentación" consistió en equilibrar la balanza rompiendo el esquema de pesos iguales a distancias iguales. Pusieron en juego la comparación a partir de la descomposición de pesos y la relación con las distancias. En esta comparación por descomposición salieron de lo común y entendieron que era posible equilibrar un clip con tres clips, distribuyendo el peso. Aquí comenzaron a identificarse diferentes formas de comparación propuestas por el grupo:

-Relación peso-brazos, pero brazos es distancia, es decir que se entendió que hay una relación directa entre peso distancia para mantener el equilibrio.

-Comparación por amplificación. Utilizaron la balanza como un amplificador de cantidades; es decir como la balanza iba de 1cm en 1cm hasta 8cm la longitud total de los brazos y al querer establecer una relación con una longitud de 10cm, entonces ubicaron dos clips en 5cm y 10 clips en un centímetro, aquí se observó cómo la comparación se dio en términos de poder comparar magnitudes multiplicando el peso a ambos lados de la igualdad, siguiendo con el enfoque histórico de Arquímedes en querer multiplicar la fuerza en la invención de sus máquinas de guerra.

Utilizando la comparación por descomposición, ubicaron dos clips en la parte izquierda de la balanza a una distancia de 5cm y en la parte derecha ubican 4 clips a una distancia de 1, 2, 3 y 4 respectivamente, manteniendo la balanza en equilibrio. Sabían que en la parte izquierda había un peso de 10 y lo iban compensando en la derecha con la adición de uno más dos igual a tres, más tres igual a seis más cuatro igual a diez. A medida que iban ubicando en la balanza los clips, iban enunciando las sumas.

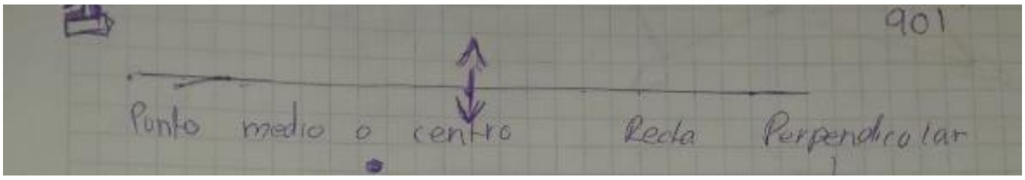
Los estudiantes establecieron la relación peso distancia, no importó que en la parte derecha se ubicaron dos clips, estos se equilibraron con los otros tres y fue algo que si se le preguntara a la gente dirían que la balanza se inclinó para el lado donde había mayor cantidad de clips. Aquí comenzó a complementarse la comparación por descomposición, combinando elementos de la ley de la palanca con conjeturas en la relación distancia peso; concluyeron que entre mayor distancia más peso y entre menos distancia menos peso. En general para esta actividad, los estudiantes llegaron a proponer acciones que se acercaron mucho a los postulados y proposiciones.

3.1.3.2 Desde las hipótesis composicionales en términos de la comparación de magnitudes

Actividad tres

En esta actividad con el apoyo de Geogebra, el grupo de estudiantes propuso representaciones gráficas, se buscó describir las acciones que al parecer los llevaron a equilibrar cada objeto.

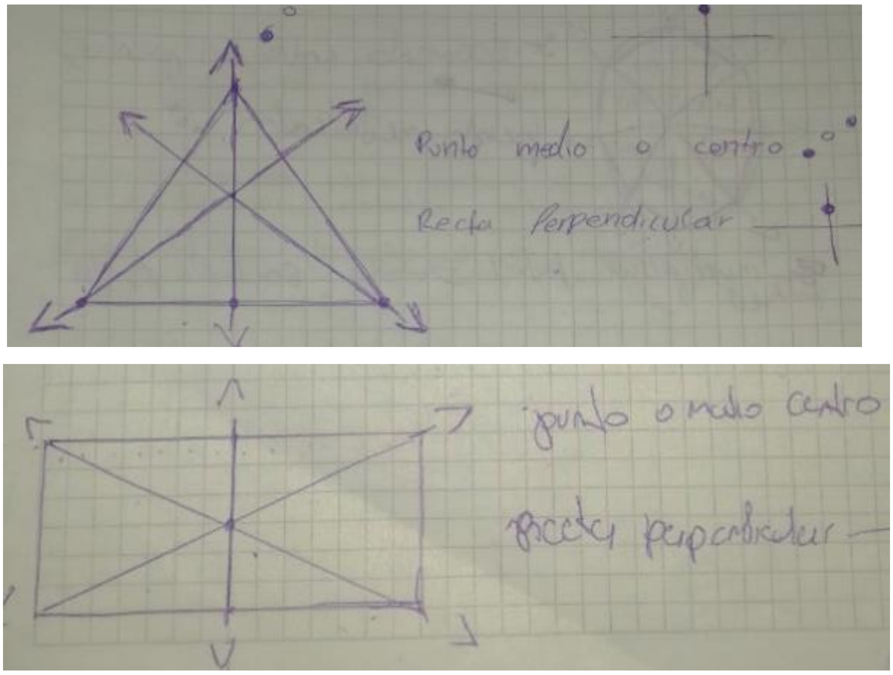
Figura 28. Registro estudiante, centro de gravedad segmento AB.



Para determinar el centro de gravedad del segmento AB en la figura 28, utilizaron la herramienta punto medio o centro, a su vez construyeron la recta perpendicular. Lo que aquí se observó fue que equilibrar el segmento según H1, consistió en reconocer que la línea tenía su magnitud geométrica que era la longitud, aunque no se enunció, fue la recta perpendicular la que hizo las veces de punto de apoyo equilibrando peso y manteniéndola en equilibrio.

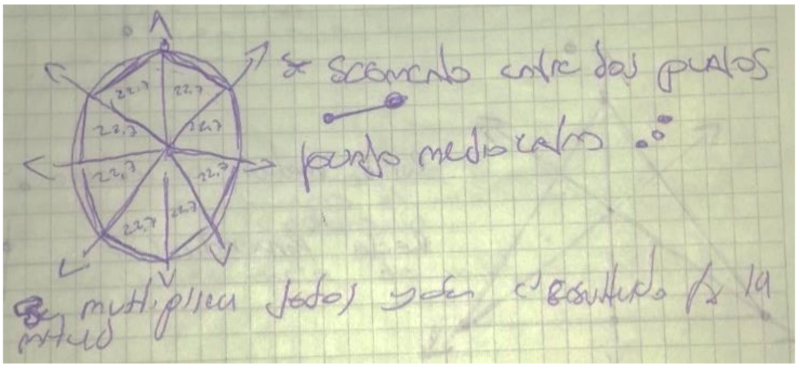
En el caso del triángulo, gráficamente se observó la construcción de los puntos medios, para determinar el centro de gravedad:

Figura 29. Registro estudiante, centro de gravedad triangulo y paralelogramo.



En la figura 29 al igual que con el segmento, el proceso se generalizó para el triángulo y el paralelogramo; el uso de la herramienta punto medio o centro fue usado en ambos casos, para determinar la mitad de la figura. Esta forma de acción correspondió con lo propuesto en la estrategia 3, complementada con H2, hallando el centro de gravedad y equilibrando la figura. Como se había mencionado el proceso con el paralelogramo fue similar, pero además de lo ya presentado para este caso, las diagonales se construyeron al igual que un segmento que iba del punto medio de dos lados opuestos; estos a su vez coincidieron con la intersección de las diagonales. Si se observó en detalle, la construcción de las diagonales y la unión de los puntos medios, evidenció lo planteado en las proposiciones 9 y 10. Para el caso del círculo, presentaron la siguiente representación gráfica:

Figura 30. Registro estudiante, centro de gravedad círculo.



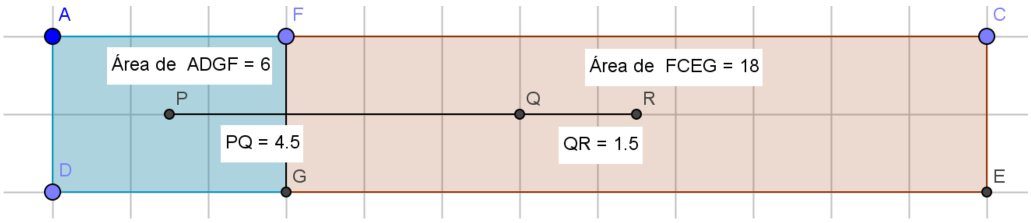
En la figura 30 se observó desde la estrategia 2, la descomposición de la figura en triángulos del mismo tipo, tal como lo planteó H3; a su vez el postulado 5 fue posible evidenciarlo cuando, inscribieron en el círculo un octágono regular, lo descompusieron en triángulos, calcularon su área y mostraron que el peso de uno equilibró el otro, implícitamente asociaron el peso con la cantidad de área, esta fue calculada haciendo uso de la herramienta del software. Pudo observarse que los estudiantes implícitamente hicieron coincidir los centros de gravedad para realizar la comparación entre el círculo y el octágono lema 6-, posteriormente compararon parte a parte cada figura, al tener la misma cantidad de área, los ocho triángulos pudieron equilibrarse.

3.1.3.3 Desde la combinación de hipótesis mecánicas y composicionales en términos de la comparación de magnitudes

Actividad cuatro

Luego que los estudiantes hicieron uso de la construcción entregada en Geogebra, y animaron el punto F, las áreas de ADGF y FCEG, junto con las longitudes PQ y QR cambiaron.

Figura 31. Representación en Geogebra, proposición 8.



En la figura 31 se evidenció que los cambios en las longitudes y las áreas fueron registrados por los estudiantes en la tabla; lo que observaron fue que iba aumentando de 0,5 en 0,5 y la segunda iba disminuyendo 0,5, pero no se hicieron inferencias al respecto. Lo que sí reconocieron en esta actividad fue que determinaron el punto de equilibrio en 2 figuras separadas. Por cada movimiento hubo diferentes formas de calcular el punto de equilibrio. Esta forma de abordar la actividad mostró que se acercaron someramente a la estrategia 5 y a la proposición 8.

Actividad cinco

En esta actividad se observó un conjunto de acciones por parte de los estudiantes, pero no se observó en relación con formas particulares de la heurística de Arquímedes, sin embargo muestro a continuación lo que respondieron los estudiantes cuando se apoyaron en la construcción de Geogebra:

-Varía porque las medidas cambian.

-Varía porque al mover el punto U, sigue con su misma medida y al mover a O sí cambia.

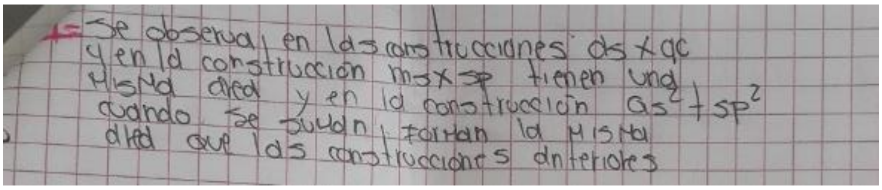
-Se mantiene en equilibrio porque el fulcro de apoyo siempre está quieto.

-El punto D debe estar en el centro de la balanza, para que los dos brazos estén equilibrados.

Actividad seis

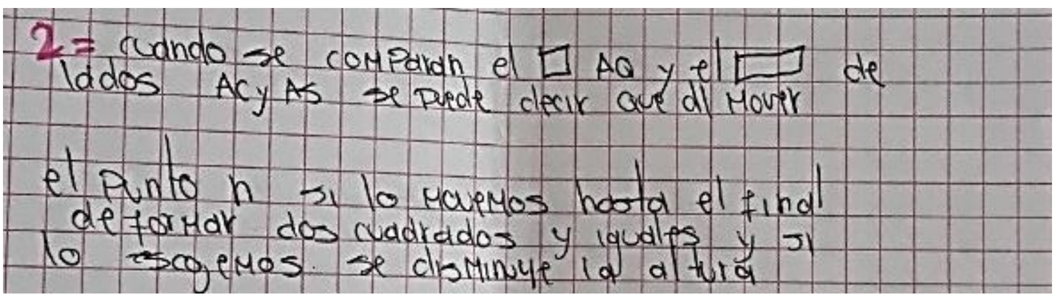
En esta actividad los estudiantes a la pregunta ¿Qué observan luego de realizar la construcción?, si compara el cuadrado AQ con el rectángulo de lados AC y AS, que puede decir, si mueve el punto N de la construcción qué ocurre.

Figura 32. Registro estudiante, actividad Nº7.


1= Se observa en las construcciones AS x AC y en la construcción MS x SP tienen una misma area y en la construcción $QS^2 + SP^2$ cuando se suman forman la misma area que las construcciones anteriores

Lo presentado en la figura 32 por el grupo, mostró que la comparación de áreas para el caso de los rectángulos era la misma; tenían la misma cantidad de área. Esto se logró haciendo uso de la herramienta área que proporcionó Geogebra; de manera análoga se observó que QS^2+SP^2 al sumar las áreas formó la misma área. Al parecer hubo dos elementos que se destacaron en la comparación de áreas, el primero que tenía que ver con que dos figuras podían tener la misma cantidad de área a pesar de no tener la misma forma.

Figura 33. Registro estudiante, actividad Nº7.


2= cuando se comparan el □ AQ y el ▭ de lados AC y AS se puede decir que al mover el punto n si lo movemos hasta el final deformar dos cuadrados y iguales y si lo escogemos se disminuye la altura

En la figura 33 se presentó el segundo elemento donde el rectángulo, se comparó en cantidad de área con la suma de áreas de dos cuadrados, concluyendo que tenían la misma área.

Al indagar un poco más sobre dicha comparación, apareció un elemento que vale la pena mencionar. Fue precisamente el apoyo del software el que brindó la posibilidad de comparar magnitudes a partir de la animación. El grupo explicó que moviendo el punto N, se iban deformando las figuras a tal punto que el cuadrado AQ y rectángulo (AC AS) tuvieran la misma cantidad de área, esto porque el rectángulo se convirtió en un cuadrado igual a AQ. Aquí fue donde el apoyo del software brindó la opción de ver acciones que con el uso de lápiz y papel, tardarían un poco más o quizás no se llegarían a observarse.

3.1.4 Grupo cuatro

Tabla 25. Resumen por actividad, estrategias y forma particular de la heurística de Arquímedes.

NÚMERO DE LA ACTIVIDAD	ESTRATEGIAS	ANÁLISIS INICIALES (Grupo 4)	FORMA PARTICULAR HEURISTICA DE ARQUÍMEDES
1	1,2,4	1	Heurística propia
		2	Postulado 1, Proposición 1, Proposición 3
		4	Proposición 1, Proposición 3
2	4 5	4.	Postulado 1, Postulado 2, Proposición 3
		5.	Postulado 1, Postulado 2, Postulado 3, Proposición 1 Proposición 2, Proposición 3
3	2, 3	2	Postulado 4, Proposición 1, H2
		3	Lema 6, Proposición 9, Proposición 10
4			No se observa relación directa con alguno de los elementos de la Heurística de Arquímedes.
5	5	5	Postulado 1, Proposición 1, Proposición 3, Proposición 8, H2
6		No respondieron	

En la tabla 25 se observó de manera general que el grupo de estudiantes pasó en las seis actividades por las cinco estrategias, pero fue en la parte de las hipótesis mecánicas donde transitaron por cuatro de las cinco. En las actividades restantes apoyadas en Geogebra, fue posible observar el paso por las estrategias 2, 3 y 5. En relación con la forma particular de los elementos de la heurística de Arquímedes se destacarom los postulados 1, 2, 3 y las proposiciones 1, 2 y 3 que mostraban la relación pesos iguales-distancias iguales y pesos desiguales a distancias desiguales para mantenerse en equilibrio.

3.1.4.1 Desde las hipótesis mecánicas en términos de la comparación de magnitudes

Actividad uno

El proceso desarrollado por los estudiantes para equilibrar las figuras consistió en:

Tabla 26. Registro estudiante, actividad 1, pregunta 1.

PREGUNTA/ ACTIVIDAD Nº1	RESPUESTAS
1. Describan el proceso que realizaron para mantener las figuras sobre el tornillo.	Hay que ubicar la mitad de la figura y equilibrar el peso para que la figura se temple y cuando las figuras se caen es que abajo pasa y necesita saber dónde es la mitad o nivel. Primero hay que ubicar la base en una superficie recta y después procedemos a colocar las figuras.

En la tabla 26 se mostró en un primer momento una acción básica llamada "buscar la mitad". Desde las estrategias coincidió con la número 1 y no se relacionó directamente con una forma particular de la heurística de Arquímedes, así que lo que se observó fue una heurística propia basada en equilibrar el peso de las figuras ubicando la mitad o que se mantuviera horizontal. Esta idea de "buscar la mitad" fue complementada en el momento de indagar por el proceso que debía realizarse para hallar el centro de gravedad del paralelogramo, círculo, triángulo etc. Los estudiantes dijeron "La mitad solo lo hace recto"; el criterio de mitad fue usado para equilibrar y compensar el peso, en el triángulo fue un poco más difícil, estas acciones se enmarcaron en la estrategia 4. Aquí implícitamente se observó una forma de comparación que buscaba visualmente distribuir la figura en partes iguales (iguales en área) para ubicar la mitad de la figura. En el caso del triángulo la estrategia se mantuvo, aunque no se dijo que equilibran figuras con diferente área pero de igual peso, esto hizo que se pudiera referir a la proposición 3, al querer equilibrar pesos desiguales a distancias desiguales.

Tabla 27. Registro estudiante, actividad 1, pregunta 4.

4. Describan el proceso que debe realizarse para equilibrar: g. El paralelogramo h. El circulo i. El triángulo j. La figura irregular k. El cuadrado	Paralelogramo: yo busco hacia donde se va y entonces yo voy poniéndole un poco de peso a donde lo necesita. Triangulo: la figura es un poco difícil pero hay que saber como poner la mitad en el tornillo y si la punta cae entonces la otra parte necesita un peso. F. irregular: la figura tiene todas o casi todas las partes iguales entonces uno pone la mitad y queda recta. Cuadrado: con la mitad ya ubicada en la figura solo hay que ponerlo en el tornillo y listo.

En la tabla 27 aunque no se reconoció como tal un proceso que fuera más allá del ensayo y error, la estrategia 1 fue combinada con la estrategia 2, recurriendo a la acción de “agregar peso” para equilibrar las figuras por compensación, particularmente los estudiantes presentaron las estrategias utilizadas para equilibrar las figuras dadas, haciendo uso del postulado y la proposición 1.

Actividad dos

En el experimento 1, al indagar por lo que ocurrió cuando dos clips del mismo peso se ubicaron a distancias desiguales:

Tabla 28. Registro estudiante, actividad 2, pregunta b.

b. ¿Qué observan, como explican lo que acaba de ocurrir en el experimento?	Nosotros observamos es que al poner esas distancias el clip que está a 6cm del punto de apoyo tiene más fuerza aunque pesen igual los dos clip.

En la tabla 28 se evidenció que luego de observar a partir de la experimentación que los clips no se equilibraron porque las distancias no eran las mismas, conjeturaron antes de realizar el experimento que si se ubicaban a igual distancia permanecerían en equilibrio.

La forma de probar la hipótesis anterior partió del hecho de tener la balanza en equilibrio con clips, para luego ubicar dos a cada lado y equilibrarla. Hubo aquí “reconocimiento de la distancia”, que desde la estrategia 4, mostró que implícitamente hicieron uso de la ley de la palanca, apoyados en los postulados 1, 2, y la proposición 3, teniendo en cuenta solo la distancia. Aunque los dos clips pesaron igual, fue la distancia la que ayudó a hacer más fuerza. Hubo aquí un primer indicio en relación a que la distancia era la que determinaba el equilibrio cuando los pesos eran iguales.

En el experimento tres, uno de los ejemplos propuestos por los estudiantes en el proceso de experimentación, consistió en que ubicaran un clip en la distancia de 2 cm del punto de apoyo hacia la derecha y un gancho a la distancia de 8 cm del punto de apoyo, concluyendo que los 8 cm tenían más fuerza que los 2 centímetros. El hecho de plantear hipótesis y verificarlas experimentalmente les permitió a los estudiantes acercarse a tener elementos de la heurística de Arquímedes.

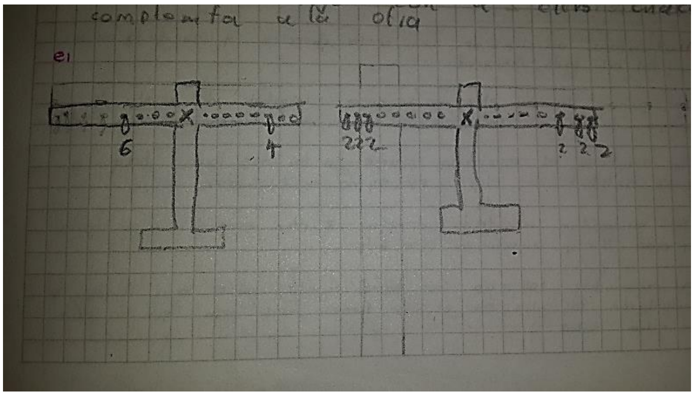
Tabla 29. Registro estudiante, actividad 2, experimento 3.

EXPERIMENTO 3	Al acomodar los 2 clips a 6cm del punto de apoyo y al otro lado 3 clip a 6cm del punto de apoyo, podemos notar que la balanza se inclina para el lado donde hay 3 clip ya que tiene más peso que dos. Se observa que en la parte izquierda se ubicó 2 clips a 6cm de el punto de apoyo y en la parte derecha se ubico tres clips a 4cm de distancia del punto de apoyo asi que la balanza queda nivelada porque lo que el otro lado tiene 6cm y 2clips esta tiene 4cm y 3clips asi que se le pone en tercer clip.

En la tabla 29 se observó que en la "Compensación peso-longitud" una cosa complementaba la otra. Aquí se estableció la relación que había entre el clip y la longitud a la cual era ubicada. De esta forma se evidenció la estrategia 5, para que el instrumento mantuviera el equilibrio había que tener en cuenta que tuvieran la misma distancia sobre el punto de apoyo ya sea el lado izquierdo o derecho.

A manera de ejemplo, ubicaron en la balanza de manera simétrica a 8 ,7 y 6 cm un clip en cada alfiler, de esta manera equilibraron la balanza. (los estudiantes representaron en la hoja las balanzas).

Figura 34. Registro estudiante, actividad 1, pregunta 1.



En la figura 34 se presentaron estos ejemplos vía experimentación algunos elementos que desde la perspectiva de Arquímedes llamaron postulados:

- Al acomodar los 2 clips a 6cm del punto de apoyo y al otro lado 3 clips a 6 cm del punto de apoyo, podemos notar que la balanza se inclina para el lado donde hay 3 clips ya que tiene más peso que dos (postulado 2).
- Se observa que en la parte izquierda se ubicaron 2 clips a 6cm de el punto de apoyo y en la parte derecha se ubicó tres clips a 4cm de distancia del punto de apoyo, así que la balanza queda nivelada porque lo que el otro lado tiene 6cm y 2clips esta tiene 4cm y 3 clips así que se le pone en tercer clip-proposición 3.
- En la balanza en el brazo izquierdo ubican a 4cm del punto de apoyo 6 clips, en el lado derecho a 6cm del punto de apoyo ubican 4 clips- proposición 8.

3.1.4.2 Desde las hipótesis composicionales en términos de la comparación de magnitudes

Actividad tres

En esta actividad con el apoyo de Geogebra, el grupo de estudiantes propuso acciones que los llevaron a equilibrar cada objeto. La estrategia 2 fue usada para determinar el centro de gravedad de las figuras. Las acciones que se reconocieron para hallar el centro de gravedad de las figuras, utilizaron las herramientas polígono, rectas, punto medio, intersección entre dos puntos etc. En el caso del círculo, el proceso fue diferente para hallarle el centro de gravedad, tuvieron que hacerle un cuadrado con las mismas medidas, trazarle una línea por la mitad y hallarle el centro, ahí trazarle una línea entre dos puntos y ahí daba las medidas que necesitaba, también le trazaron compás y sacaron medidas exactas. “Inscribir el circulo en un cuadrado” aquí buscaron hacer coincidir los centros de gravedad para determinar el lugar donde debían apoyarse, es decir hallar el centro-postulado 1-, aquí desde Arquímedes estaban buscando cuadrar la figura, no en términos de tener la misma área sino en tener un referente para poder determinar el centro de gravedad, aquí se presentó una forma de comparación que consistió en hacer coincidir los centros de gravedad-postulado 4, H2- o en otras palabras trabajar como lo hacía Arquímedes en recurrir a lo conocido (el centro de gravedad de un cuadrado) para determinar el centro de gravedad del círculo, que era lo que no se conocía. Relacionar esta forma de comparar con la manera como Arquímedes solucionaba los problemas; ir de lo conocido a lo desconocido, por ejemplo hallar el volumen de la esfera a partir del volumen del cilindro y el cono.

En general, las acciones desarrolladas por los estudiantes para determinar el centro de gravedad en esta actividad partieron de la estrategia 3 en el momento en que usaron elementos geométricos, pero fue ampliada cuando hicieron uso de las herramientas punto medio, segmento, punto de intersección, finalmente sintetizaron diciendo que el centro de gravedad de :

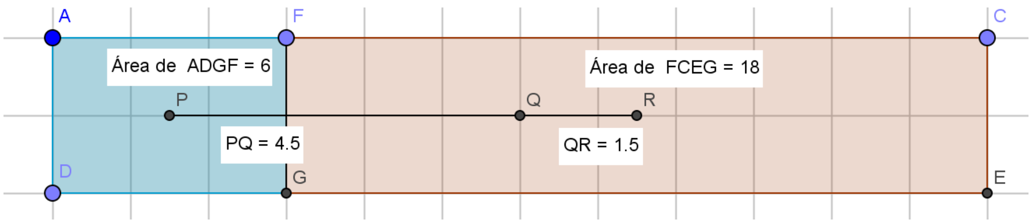
- Una línea recta es la mitad, el centro-H1.
- Un paralelogramo es el centro de la figura-proposición 9 y 10.
- Un triángulo es el centro de tal-H2.
- Un circulo es un poco difícil de hallar porque toca trazar cuadrados alrededor y hay si hallarle el centro, o pues así lo hice-postulado 4.

3.1.4.3 Desde la combinación de hipótesis mecánicas y composicionales en términos de la comparación de magnitudes

Actividad cuatro

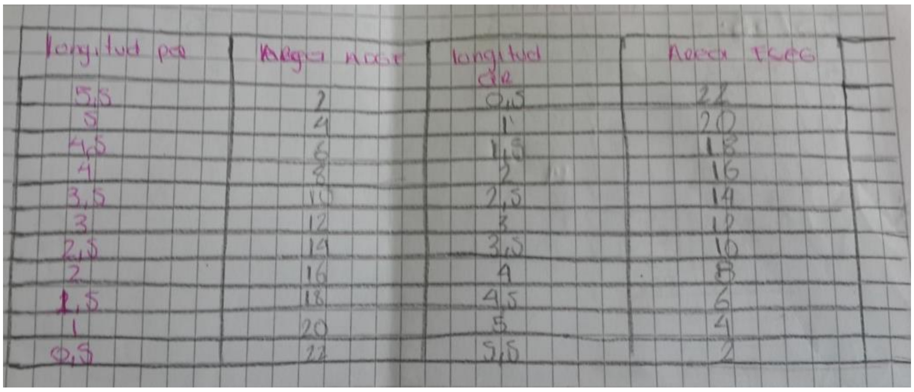
Luego que los estudiantes hicieron uso de la construcción entregada en Geogebra, y animaron el punto F que se observó en la figura 35, las áreas de ADGF y FCEG, junto con las longitudes PQ y QR cambiaron.

Figura 35. Representación en Geogebra, proposición 8.



Los cambios en las longitudes y las áreas fueron registrados por los estudiantes en la figura 36:

Figura 36. Registro estudiante, actividad 4.



longitud PQ	Area ADFG	longitud QR	Area FCEG
5,5	2	0,5	22
5	4	1	20
4,5	6	1,5	18
4	8	2	16
3,5	10	2,5	14
3	12	3	12
2,5	14	3,5	10
2	16	4	8
1,5	18	4,5	6
1	20	5	4
0,5	22	5,5	2

En la figura 36 se observó que al indagar por la relación que observaron entre la longitud QR y el área FCEG, los estudiantes respondieron que por ejemplo PQ y QR, descendieron en 0,5 igual pasó con las áreas ADFG aumentó en 2. En esta actividad lo que observaron los estudiantes fue el cambio en los valores de la longitud y el área, ante está dificultad de no aproximarse a hacer una comparación que relacionara las longitudes con las áreas, se preguntó a los estudiantes lo que observaban, ante este cuestionamiento respondieron que lo que se estaba probando era que no siempre para equilibrar se tenía que utilizar la balanza, se podía calcular con más cosas, ej: figuras geométricas. En general, no se observó relación directa con alguno de los elementos de la heurística de Arquímedes.

Actividad cinco

En la construcción se observó que al mover el punto D variaban las medidas y las áreas de los rectángulos, al poner el punto D en el centro quedaron en la misma medida-proposición 1. Al indagar por lo que ocurrió cuando se movió el punto D en la construcción, los estudiantes presentaron:

Tabla 30. Registro estudiante, actividad 5, pregunta 2.

2. Mueva ahora el punto T, y nuevamente el punto D, se mantienen las relaciones de la construcción o varían.	Cuando movemos la construcción del punto D varían las medidas y las áreas dando diferentes resultados pero igualmente no pasa de 24 cm para cualquier lado y al mover el punto T no varian las medidas, todo sigue igual, simplemente sube o baja.

En la tabla 30 los estudiantes presentaron esta forma de comparar magnitudes, dejó visto que los cambios que se produjeron al mover el punto D de la construcción, se compensaron con lo que ellos llamaron medidas (longitudes) con las áreas, enfocando que las longitudes no sobrepasaban los 24 centímetros. Se dio aquí una forma de comparar que solo era controlada por la longitud de los brazos de la balanza, pero que respecto de las áreas no era controlada pero si tenida en cuenta como una variación, se observó aquí la estrategia 5, en el momento en el que había una relación longitud-peso.

Cuando se les preguntó por los centros de gravedad de los paralelogramos respondieron que, los puntos no más se podían mover del centro de gravedad porque al intentar moverlo de otro lado no movió y entonces en las figuras si debió haber un centro de gravedad para equilibrar todo.

3.1.5 Grupo cinco

Tabla 31. Resumen por actividad, estrategias y forma particular de la heurística de Arquímedes.

NÚMERO DE LA ACTIVIDAD	ESTRATEGIAS	ANÁLISIS INICIALES (Grupo 5)	FORMA PARTICULAR HEURISTICA DE ARQUÍMEDES
1	**1,2,3**	1. 3	Lema 6, Proposición 9, Proposición 10, H2
		2.	H0
		3.	Lema 6, Proposición 9, Proposición 10.
2	**4 5**	4	Postulado 2
		5.	Postulado 1, Proposición 1
4	**3, 5**	3.	**Proposición 9, Proposición 10, H3**
		5.	**Postulado 1, Proposición 1**
5			No hay evidencias más allá de decir como varia la tabla.
6	**4, 5**	4.	**Proposición 3**
		5.	**Proposición 8**
7	**3**	3.	**Proposición 3**

En la tabla 31 se observó de manera general que grupo de estudiantes pasó en las seis actividades por las cinco estrategias, pero fue en la parte de las hipótesis mecánicas donde transitaron en su totalidad por las cinco. En las actividades apoyadas en Geogebra, fue posible observar el paso por las estrategias 3, 4 y 5. En relación con la forma particular de los elementos de la heurística de Arquímedes, se destacó el postulado 1 y la proposición 1 que mostraba la relación de pesos iguales a distancias iguales para estar en el equilibrio, y las proposiciones 9 y 10, para determinar el centro de gravedad de un paralelogramo.

3.1.5.1 Desde las hipótesis mecánicas en términos de la comparación de magnitudes

Actividad uno

Se observó que al indagar por la manera como equilibraban las figuras sobre el tornillo, combinaron la estrategia 1 y 3, el grupo la denominó “Eje central”. Básicamente lo que hicieron fue tomar la cuerda, uno de ellos la sostuvo intentando balancear sobre esta la figura entregada, al no poder realizarlo tomaron la regla para calcular la mitad de la longitud del largo y ancho del paralelogramo, unieron con segmentos los puntos medios de los lados opuestos, en cuya intersección determinó el centro de gravedad tal como lo plantea la proposición 9. De manera alternativa tomaron la cuerda buscando envolver con ésta el ancho y largo del paralelogramo, a su vez construyeron las diagonales que se intersectaron y determinaron el centro de gravedad de la figura, desde lo planteado por Arquímedes coincide con la proposición 10. Al indagar por alguna razón de porque se mantiene en equilibrio la figura, los estudiantes respondieron:

Tabla 32. Registro estudiante, actividad 1, pregunta 2.

2. ¿Cómo explican que cada figura pueda mantenerse en equilibrio sobre el tornillo?	La masa de la figura es equivalente en todos sus lados.

En la tabla 32 se evidenció dos formas de comparación que tuvo elementos de la estrategia 2, la primera que buscaba determinar un eje central o en palabras de Arquímedes el punto de apoyo para que la masa fuera equivalente en todos sus lados, la idea de hacer uso de un eje iba en la dirección de la heurística de Arquímedes, siendo este uno de los primeros pasos propuestos en la comparación de magnitudes. La segunda consistió en dividir haciendo uso de elementos geométricos de la figura en partes de tal forma que la masa también fuera equivalente. El grupo de estudiantes contrastó las dos formas determinando el mismo centro de gravedad, cabe destacar que la experimentación fue fundamental para el grupo, al ver que la figura difícilmente se equilibraría sobre la cuerda, optaron por usarla para envolver el paralelogramo no solamente por sus lados sino logrando unir vértices para construir las diagonales, en cuya intersección les permitió determinar el lugar donde debía apoyarse para mantenerse en equilibrio. Este conjunto de acciones con el único objetivo de mantener en equilibrio la figura, mostró que los estudiantes reconocieron tal como lo plantea H0-H2, todas las figuras tienen peso y centro de gravedad, pero hallar el centro de gravedad fue quizás el fin y la riqueza estuvo en la forma como usaron de manera espontánea, acciones que les permitieron hacer comparaciones ya sea por medios físicos-experimentales, o físico geométricos.

Actividad dos

En el experimento uno se identificó que los estudiantes reconocieron condiciones para mantener o no en equilibrio los clips ubicados en la balanza, presentaron algunas consideraciones relacionadas con la estrategia 4.

Tabla 33. Registro estudiante, actividad 2, pregunta a, b y c.

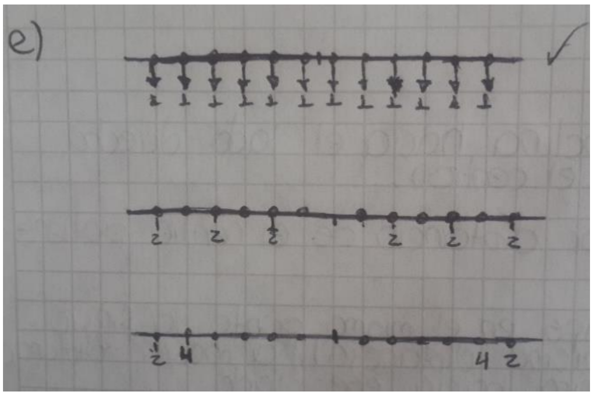
PREGUNTA/ ACTIVIDAD Nº2	ESTUDIANTE
<u>EXPERIMENTO 1</u> a. Observen el instrumento que cada grupo tiene y descríbanlo. Ubiquen un clip a una distancia de 4 cm del punto de apoyo del lado izquierdo del instrumento, y otro clip del mismo peso a una distancia de 6 cm del lado derecho del centro del instrumento.	Observamos que se inclina hacia el lado derecho (a mayor distancia del centro).
b. ¿Qué observan, como explican lo que acaba de ocurrir en el experimento?	Concluimos que a mayor distancia del centro obtiene más peso.
c. ¿Qué pasará si ubican los clips en otros lugares? , den un ejemplo de donde los ubicaron?	Si ubicamos los clips en el mismo punto la figura se equilibra (a la misma distancia) a mayor distancia la figura se inclinará hacia ese lado. Ejemplo punto nº7 y nº 8 izquierda la balanza inclinación a la derecha.

En la tabla 33 en el experimento 1, literal a se observó que se puso en juego la proposición 2, los pesos iguales al estar a distancias desiguales no se equilibraron, en este caso particular reconocieron que se inclinó hacia el lado derecho “a mayor distancia del centro”. Con estas apreciaciones fue posible observar que hubo un reconocimiento implícito de la ley de la palanca y de una relación directa entre el peso, la distancia respecto a un punto de referencia, además fue importante ver cómo iban en la dirección de Arquímedes, explicitando que la distancia fue el elemento que hizo que el peso aumentara. Todo esto los llevó a enunciar y ejemplificar en el literal c condiciones y consecuencias del proceso de equilibrar la balanza que desde la estrategia 5 la complementaron:

-Si ubican los clips en el mismo punto la figura se equilibra (a la misma distancia).
-A mayor distancia la figura se inclinará hacia ese lado, ejemplo punto nº7 y nº 8 izquierda la balanza inclinación a la derecha.
-Igual distancia-igual peso" esta es la única condición para que se mantenga en equilibrio.

La manera en la que abordan el experimento 3 estuvo determinado por el postulado 1 y la proposición 1, esto se evidenció al proponerles que con 12 clips propusieran diferentes condiciones de equilibrio:

Figura 37. Registro estudiante, situaciones de equilibrio.



En la figura 37 presentaron tres situaciones con la balanza donde mantuvieron en equilibrio aplicando el postulado 1, todo fue ubicado de manera simétrica, se estaba comparando por la simetría, manteniendo en equilibrio la balanza. En la primera situación hubo una correspondencia uno a uno, donde cada peso era comparado con otro que estaba a la misma distancia, en la situación dos, siguieron el mismo principio de ubicación simétrica, pero fueron ubicados los clips de a dos por cada distancia de forma intermitente. Finalmente en la situación tres fueron puestos los clips en los extremos también de manera simétrica, pero en mayor cantidad de clips por distancia. Esta forma de comparación dejó ver al parecer, que a pesar de haber mostrado al grupo otras formas de equilibrio diferente a longitudes y pesos iguales, no lograron construir situaciones similares que permitieran explotar el potencial de los hallazgos presentados en la actividad uno y los experimentos uno y dos, no fue posible determinar con certeza por qué no pudieron avanzar más, pero lo que sí puedo decir es que lo planteado iba en la orientación de la estrategia 5.

3.1.5.2 Desde las hipótesis composicionales en términos de la comparación de magnitudes

Actividad tres

En esta actividad con el apoyo de Geogebra, el grupo de estudiantes propuso acciones que los llevaron a equilibrar cada objeto. La estrategia 3 fue usada para determinar el centro de gravedad de las figuras, pero fue ampliada por el uso de la herramienta "punto medio"-"distancia o longitud" proporcionadas por el software. Puntualmente usaron la herramienta punto medio en todos los lados de la figura, luego la herramienta distancia o longitud para comprobar que estaban a la misma distancia de todos los lugares así quedaría en equilibrio. Para el caso del paralelogramo construyeron las diagonales y determinaron que el punto de intersección de éstas era el centro de gravedad. La acción de encontrar los puntos medios y luego medir la longitud de los lados coincidió con lo propuesto por Arquímedes en las proposiciones 9 y 10, aunque hallaron los puntos medios no fueron utilizados para unirlos con su punto medio opuesto determinando el centro de gravedad. Al indagar sobre por qué o cómo probarían que el punto encontrado correspondió con el centro de gravedad, lo que hicieron los estudiantes fue construir en cada uno de los triángulos que se forman, polígonos para luego calcular su área, al indagar por los posibles resultados sin utilizar las herramientas del programa, apareció la experiencia de comparar áreas de figuras de diferente forma, antes de hacer el proceso de verificación consideraron que por tener forma diferente no tenían la misma cantidad de área, usaron como herramientas área y perímetro, determinando que tenían la misma área a pesar de no tener la misma forma.

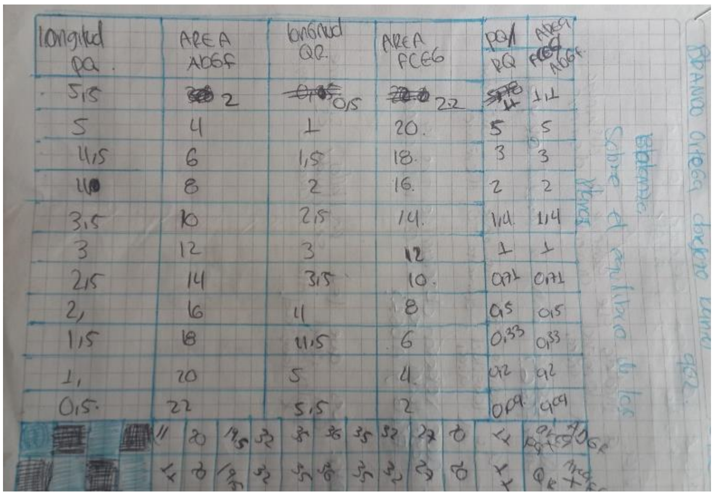
Finalmente se observó que pusieron en juego la estrategia 5, apoyados en el postulado 1 y la proposición 1, "comprobando equilibrio" a partir del reconocimiento de la distancia y el punto medio como elementos de la ley de la palanca.

3.1.5.3 Desde la combinación de hipótesis mecánicas y composicionales en términos de la comparación de magnitudes

Actividad cuatro

Luego que los estudiantes hicieron uso de la construcción entregada en Geogebra, y animaron el punto F, las áreas de ADGF y FCEG, junto con las longitudes PQ y QR cambiaban, fueron registrados en la tabla:

Figura 35. Registro estudiante, tabla relación longitudes vs áreas.



longitud PQ	AREA ADGF	longitud QR	AREA FCEG	PQ/RQ	AREA FCEG/ADGF
5,5	~~30~~ 2	~~0,05~~ 0,5	~~22,0~~ 22	~~55,0~~ 11	11
5	4	1	20.	5	5
4,5	6	1,5	18.	3	3
4	8	2	16.	2	2
3,5	10	2,5	14.	1,4	1,4
3	12	3	12	1	1
2,5	14	3,5	10.	0,71	0,71
2,	16	4	8	0,5	0,5
1,5	18	4,5	6	0,33	0,33
1,	20	5	4	0,2	0,2
0,5.	22	5,5	2	0,09	0,09

En la figura 38 se observó en la tabla construida por los estudiantes que a medida que aumentaba o disminuía la longitud aumentaba o disminuía el área, además de establecer que los cocientes entre las longitudes y las áreas eran los mismos. En esta parte de la actividad se esperaba que se hicieran conexiones entre los hallazgos encontrados en las actividades anteriores, pues fue aquí donde Arquímedes en la proposición 8, relacionó los centros de gravedad y estableció relaciones entre las áreas y las longitudes, en general mostraron muchos de los elementos de la heurística al pesar hipotéticamente áreas.

Actividad cinco

Al indagar por lo que ocurrió al mover los puntos T y D de la construcción, los estudiantes respondieron que a medida que se movió el punto D cambió la forma y medida de las figuras. Al mover el punto T, el punto D la figura cambió su área y posición. En general explicaron que la balanza se mantuvo en equilibrio, debido a que se puso peso en un lado y en el otro se puso distancia para compensar. Esta explicación dejó ver que hubo una "compensación peso-longitud", que iba en la dirección de la estrategia 5 y la proposición 3. En esta actividad lograron observar lo que en la actividad 5, no fue tan claro, aquí la comparación de magnitudes se dio en términos de la compensación del peso con la distancia.

Actividad seis

La actividad buscaba trabajar la proposición número dos del libro del Método de Arquímedes, en la parte inicial desde la comparación de áreas. En relación con las preguntas planteadas:

Tabla 34. Registro estudiante, actividad 6, pregunta 1.

1. ¿Qué observa luego de realizar la construcción?. Si compara el cuadrado AQ con el rectángulo de lados AC y AS, que puede decir, si mueve el punto N de la construcción qué ocurre.	Que todos los valores son los mismos.

En la tabla 34 luego de realizar la construcción se evidenció la estrategia 3, que fue ampliada por el uso de las herramientas del software. Aquí el grupo calculó y estableció relaciones entre las figuras comparando el área del cuadrado con el área del rectángulo, llegando a la conclusión que la "suma de áreas" $AQ^2=QS^2+SP^2$. Además aclararon que hubo una relación de "iguales-diferencia" eran iguales en el cálculo de su área, pero diferentes en ubicación espacial. Aunque la figura transformó su forma el área era la misma. La comparación estuvo dada en términos de obtener la misma cantidad de área con el apoyo del software, particularmente con el que calcularon áreas.

Algo que se destacó en este grupo y que aún no se dio en los grupos restantes consistió en tener en cuenta que en la construcción:

Tabla 35. Registro estudiante, actividad 6.

2. Explique detalladamente en cada una de las relaciones que es lo que se está comparando.	Que sumados los dos cuadrados son la misma figura exactamente igual. Todas las medidas siempre van a hacer iguales porque tenemos un círculo y pues su radio siempre va a ser igual.

En la tabla 35 se evidenció al parecer el hecho que la comparación de áreas fuera igual siempre, dependió en gran medida de la dependencia del círculo en la construcción, específicamente en el radio. A medida que el punto N era animado, el cuadrado y los rectángulos cambiaban de forma pero no cambiaba la relación que la suma de las áreas de los rectángulos fuera la misma que el área del cuadrado, pues en su construcción dependió de la relación entre los círculos que a su vez eran obtenidos a partir de la herramienta compás.

3.1.6 Grupo seis

Tabla 36. Resumen por actividad, estrategias y forma particular de la heurística de Arquímedes.

NÚMERO DE LA ACTIVIDAD	ESTRATEGIAS	ANÁLISIS INICIALES (Grupo 6)	FORMA PARTICULAR HEURISTICA DE ARQUÍMEDES
1	1,3,4	1 3	Postulado 5, Lema 6, Proposición 9, Proposición 10, Proposición 8
		4	Postulado 1, Proposición 1, H4
2	5	5.	Postulado 1, Postulado 2, Postulado 3
4	3	3.	Proposición 9, Proposición 10, Postulado 4, Lema 6
5			No hay evidencia de lo que para los estudiantes significó o comprendieron.
6	4	4.	Postulado 1, Proposición 1, H0, H1, H4
7	3	3.	Proposición 1, Postulado 1

.

En la tabla 36 el grupo de estudiantes pasó en las seis actividades por cuatro de las cinco estrategias, fue en la parte de las hipótesis mecánicas donde transitaron por las estrategias 1, 3, 4 y 5. En las actividades restantes apoyadas en Geogebra, fue posible observar el paso por las estrategias 3 y 4. En relación con la forma particular de los elementos de la heurística de Arquímedes se destacó el postulado 1 y la proposición 1 que mostró la relación de pesos iguales a distancias iguales para estar en el equilibrio, y las proposiciones 9,10 y el lema 6 para determinar el centro de gravedad del paralelogramo y el centro de gravedad del circulo respectivamente.

3.1.6.1 Desde las hipótesis mecánicas en términos de la comparación de magnitudes

Actividad uno

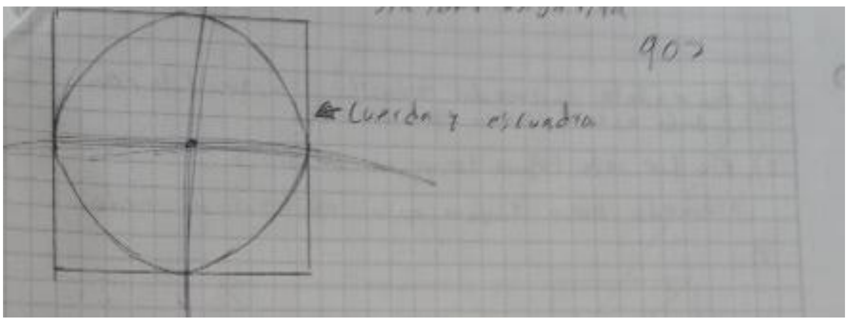
Desde la experimentación, se observó amplias y variadas estrategias propuestas por los estudiantes para realizar comparación de magnitudes. Contextualizando la actividad número uno, donde se proponía equilibrar figuras elaboradas en cartón sobre un tornillo, surgieron las primeras formas de comparación:

Tabla 37. Registro estudiante, actividad 1.

PREGUNTA/ ACTIVIDAD Nº1	RESPUESTAS
1. Describan el proceso que realizaron para mantener las figuras sobre el tornillo.	Poniéndola encima del tornillo y moviéndola con cuidado hasta quedar en equilibrio.

En la tabla 37 se observó que en este intento por equilibrar las figuras, combinaron las estrategias 1 y 3. En un primer momento recurrieron al ensayo y error, poniendo las figuras encima del tornillo y moviéndolas con cuidado hasta quedar en equilibrio. En un segundo momento utilizaron la regla y ubicaron el círculo buscando hallar su diámetro, para esto tomaron la cuerda buscando encuadrar la figura.

Figura 36. Registro estudiante, representación centro de gravedad del círculo.

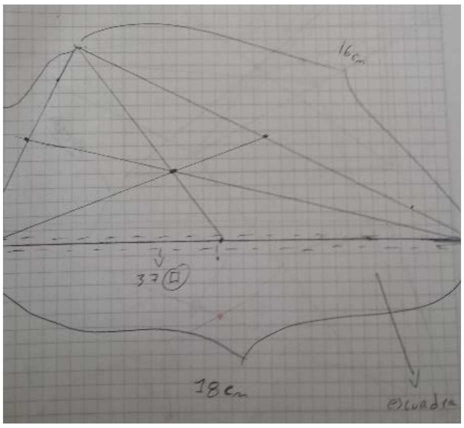


En la figura 39 se evidenció que representaron en la hoja el proceso descrito de la inscripción del círculo en el cuadrado. Aquí es importante destacar que la comparación de los estudiantes estuvo dada en términos de encontrar el diámetro a partir de la longitud del lado del cuadrado, para así poder determinar el punto de equilibrio. Finalmente con la longitud del diámetro encontraron el punto medio, usando la regla. Para el caso del cuadrado, la estrategia consistió en envolver por los lados con la cuerda y cruzándola por los vértices hallando las intersecciones y determinando el punto donde debió apoyarse la figura para mantenerla en equilibrio. Esta forma de proceder coincidió con lo planteado por Arquímedes en la proposición 10 y el lema 6, algo que pudo destacarse fue la creatividad puesta en esta forma de encontrar el centro de gravedad y de paso en comparar magnitudes. Partieron de una idea trabajada por Arquímedes en una de sus proposiciones donde se hacía coincidir los centros de gravedad, para comparar magnitudes, si estos coincidían entonces era posible equilibrar la figura libro "Sobre el equilibrio de los planos I"-"uno equilibra para saber si la figura es igual a los dos lados" El termino al parecer igual en este sentido hizo referencia al peso y a las condiciones necesarias para mantener en equilibrio".

Esta estrategia fue una de las que se destacó en la heurística de Arquímedes, recurriendo a problemas ya resueltos para luego dar tratamiento a la nueva situación, históricamente este hecho pudo ser ejemplificado en la proposición 2 del Libro del Método. Arquímedes conoció por sus antecesores el área del cono y el cilindro, los utilizó para hallar el área de la esfera, Sienra (1983). En síntesis puedo decir que particularmente las acciones del grupo llevaron a mostrar que la comparación de magnitudes se dio por la acción de hacer coincidir centros de gravedad que a su vez hicieron que las figuras pudieran mantenerse en equilibrio.

En el caso de las otras figuras, utilizaron como herramientas punto medio, construcción de diagonales, puntos de intersección.

Figura 37. Registro estudiante, representación gráfica centro de gravedad triángulo.



En la figura 40 particularmente en el triángulo argumentaron que el centro de gravedad se hallaba no precisamente en el centro, sino distribuyendo el peso a lo largo de un eje imaginario, (aquí aparentemente subyace una idea de comparación a partir de la compensación de pesos bajo un mismo eje.), se dieron cuenta que habían lugares de la figura donde era más delgada que el otro, aquí implícitamente la estaban partiendo en figuras que permitieron distribuir el peso. El pedazo más delgado iba a ser más liviano que el otro, entonces lo que se buscó fue una parte que estuviera entre los dos, implícitamente se trabajó con el postulado 8.

Finalmente en la actividad fue puesta la estrategia 4, que en síntesis transfirió implícitamente a una hipotética balanza, distribuyendo el peso a lo largo de un eje imaginario "subyace la idea de comparación a partir de la compensación de pesos bajo un mismo eje" que se apoyó directamente en el postulado y la proposición 1, junto con H4.

Actividad dos

En esta actividad fue posible observar variadas acciones propuestas por los estudiantes al momento de realizar comparación de magnitudes, cuando se les pidió mantener en equilibrio la balanza.

Tabla 38. Registro estudiante, actividad 2, experimento 1.

PREGUNTA/ ACTIVIDAD Nº2	ESTUDIANTE
EXPERIMENTO 1 a. Observen el instrumento que cada grupo tiene y descríbanlo. Ubiquen un clip a una distancia de 4 cm del punto de apoyo del lado izquierdo del instrumento, y otro clip del mismo peso a una distancia de 6 cm del lado derecho del centro del instrumento.	Observo que el punto 1 que está a 4 cm se eleva mientras el punto 2 que está a 6cm se baja. Yo digo que usa la ley de Arquímedes que dice que si ponemos un punto de apoyo podemos mover cualquier cosa.

En la tabla 38 se observó que a partir de la experimentación llegaron a establecer lo propuesto en la estrategia 5, logrando mostrar la relación peso-longitud. Esta relación se apoyó en el postulado 1 fue enunciada verbalmente por los estudiantes así:

- Pesos iguales a distancias desiguales no se mantiene en equilibrio se inclina hacia el lado de mayor distancia.
- La misma distancia y el mismo peso a ambos lados de la balanza se mantienen en equilibrio.

Se evidenció que para el grupo de estudiantes habían unas condiciones de equilibrio previas que fueron construidas a partir de una experiencia de desequilibrio, cuando se indagó a los estudiantes por las condiciones de equilibrio al ubicar clips a lado y lado de la balanza a diferentes distancias mencionaron el principio de la palanca diciendo" Se está enunciando la ley de Arquímedes que dice que con un punto de apoyo y un lado más largo de un palo o algo se puede levantar cualquier objeto.

Partiendo del experimento 3, en el literal a y b donde se buscaba equilibrar la balanza saliendo de lo propuesto en el postulado 1, el grupo de estudiantes realizó los dos experimentos y determinó que en el literal a la balanza no se mantuvo en equilibrio, la razón, la balanza se inclinó hacia el lado derecho donde los 3 clips hicieron la diferencia.

Tabla 39. Registro estudiante, actividad 2.

c. Expliquen lo que ocurre en el literal a y compárenlo con lo ocurrido en el literal b, que pueden concluir.	A pesar que un lado tiene más clips que la otra, aun así se mantienen en equilibrio esto muestra la ley de Arquímedes como un hecho. En el literal a la balanza se inclina hacia el lado de los tres clips y en el literal b la balanza queda en equilibrio sin importar la cantidad de clips.

En la tabla 39 se evidenció que producto de esta experimentación propusieron dos ejemplos en los que con diferente número de clips y distancias lograron equilibrar:

Primer ejemplo: en el lado izquierdo de la balanza a una distancia de 8cm, ubicaron dos clips a una distancia de 4 cm, diciendo que estábamos compensando uno con la mitad de la distancia.

Segundo ejemplo: al ubicar 3 clips a 6 cm en el lado izquierdo, lograron equilibrarlo colocando 2 clips a una distancia de 8cm y un clip a una distancia de 2 cm.

En los dos ejemplos se observó que "vía experimentación" equilibraron la balanza rompiendo el esquema de pesos iguales a distancias iguales y colocando en juego la comparación a partir de la descomposición de pesos y la relación con las distancias. En esta comparación por descomposición salieron de lo común y entendieron que fue posible equilibrar un clip con tres clips, distribuyendo el peso. Producto de esta experimentación surgieron consideraciones de los estudiantes:

-Relación peso-brazos, pero brazos es distancia, es decir que se entiende que hay una relación directa entre peso distancia para mantener el equilibrio.

-"Relación la mitad" compensa el peso con la distancia por ejemplo un clip a una distancia de 8cm- 2 clips a una distancia de 4cm, aquí se hace la compensación de un clip con la mitad de la distancia.

3.1.6.2Desde las hipótesis composicionales en términos de la comparación de magnitudes

Actividad tres

En esta actividad con el apoyo de Geogebra lograron encontrar el centro de gravedad de los objetos construidos. Dentro de las estrategias se ubicaron en la 3, que para este caso del software fue ampliada por el uso de la herramienta “punto medio”, construcción de diagonales y punto de intersección llegaron implícitamente a utilizar el lema 6 y las proposiciones 9 y 10.

Como forma de ilustrar las acciones de los estudiantes en el momento de encontrar el centro de gravedad, propusieron:

-El centro de gravedad de una línea recta es su mitad, la línea tiene una medida de donde podemos sacar su centro o su mitad.

-El centro de gravedad de un triángulo es la medida que se saca de la mitad de cada uno de sus lados, de esta forma se saca la mitad de los lados y si las unimos forma con líneas rectas nos dará el centro que buscamos.

-El centro de gravedad de un círculo es de acuerdo a su radio, ya que si tenemos el radio tenemos un punto medio que forma el punto de gravedad, al igual podemos hacer un cuadro por encima del círculo y dividirlo en la mitad cada uno de sus lados.

Este conjunto de acciones determinó indicios que lograron rastrear una forma de pensar similar a la mostrada por la Historia de las Matemáticas en Arquímedes, el hecho de enunciar de manera parecida a la teorización hecha por Arquímedes o recorrer históricamente algunos de los episodios que posiblemente atravesó dicho pensador y que fueron condensados en su heurística. En general los estudiantes lograron comparar magnitudes particularmente longitudes y áreas, partiendo de determinar el centro de gravedad de figuras y para el caso donde la tarea parecía dispendiosa recurrieron a relacionar con experiencias y resultados conocidos que les permitieron llegar a dar solución a la situación.

3.1.6.3 Desde la combinación de hipótesis mecánicas y composicionales en términos de la comparación de magnitudes

Actividad cuatro

En la tabla se observó que además de completar la información a partir de los datos arrojados por la construcción en Geogebra y realizar los cocientes entre segmentos y áreas, obteniendo los mismos resultados, no hubo evidencia de lo que para los estudiantes significó o como se acercó a la heurística de Arquímedes.

Actividad cinco

Esta actividad se asoció con la estrategia 4, la comparación de magnitudes estuvo dada en términos de distancias iguales y pesos iguales para mantener la condición de equilibrio.

Cuando las áreas eran iguales significó que tenían el mismo peso, se mantuvieron en equilibrio y sus longitudes eran iguales entonces su área también. Este planeamiento encerró un importante hecho que en Arquímedes visto como la relación que fue posible establecer entre la figura y su magnitud, para este caso los estudiantes lograron mostrar que tal como lo planeó H0, el peso del paralelogramo era su área, que a su vez dependió de la distancia a la que se encontró respecto al punto de apoyo para que se mantuviera en equilibrio.

En otras condiciones cuando se modificó las longitudes de los brazos y las áreas cambió de forma, determinando que no se mantuvo en equilibrio, aquí la idea de simetría fue importante como criterio para que se mantuviera el equilibrio. La idea de mantener en equilibrio respondió a lo planteado en el postulado y la proposición 1, H0, H1 y H4.

Actividad seis

En general en esta actividad la estrategia 3 fue ampliada por el uso de las herramientas del software. Calcularon e hicieron relaciones entre las figuras comparando el área del cuadrado con el área del rectángulo. "suma de áreas" $AQ^2=QS^2+SP^2$, pero no lograron avanzar más en términos de mostrar acciones que pudieran ser relacionadas con la heurística de Arquímedes.

3.2 Aproximación de los estudiantes a la heurística de Arquímedes por actividad

Se observó de manera general que los seis grupos de trabajo se aproximaron a algunos elementos de la heurística de Arquímedes en el desarrollo de las seis actividades y fueron precisamente en las actividades basadas en las hipótesis mecánicas donde se evidenció mayor variedad de estrategias. Se partió del reconocimiento que desde "vía experimentación" recorrido por Arquímedes y llevado de manera similar por los estudiantes, brindó la posibilidad de poner en juego heurísticas de manera espontánea, advirtiendo que en ningún momento los grupos conocían la travesía llevada a nivel histórico.

A continuación en la tabla 39, se hizo un recorrido por los seis grupos de trabajo reconociendo aproximaciones en las acciones de los estudiantes elementos de la heurística de Arquímedes, similares, diferentes o que simplemente se pensaba que estarían presentes en el desarrollo de la secuencia de actividades.

Tabla 39. Comparación elementos de la heurística de Arquímedes por grupo y actividad.

ACTIVIDAD	ESTRATEGIAS EN LA COMPARACIÓN DE MAGNITUDES GRUPO1	ESTRATEGIAS EN LA COMPARACIÓN DE MAGNITUDES GRUPO 2	ESTRATEGIAS EN LA COMPARACIÓN DE MAGNITUDES GRUPO 3	ESTRATEGIAS EN LA COMPARACIÓN DE MAGNITUDES GRUPO 4	ESTRATEGIAS EN LA COMPARACIÓN DE MAGNITUDES GRUPO 5	ESTRATEGIAS EN LA COMPARACIÓN DE MAGNITUDES GRUPO 6
1	1. Heurística propia.	1. Proposición 9, Proposición 10	1. Heurística propia, Postulado 4	1 Heurística propia	1. 3 Lema 6, Proposición 9, Proposición 10, H2	1 3 Postulado 5, Lema 6, Proposición 9, Proposición 10, Proposición 8
	2. H2, H3		2. H3	2 Postulado 1, Proposición 1, Proposición 3	2. H0	
	3. Lema 6, Proposición 9, Proposición 10.		3. Lema 6, proposición 9, Proposición 10			
		4. H0 y H3, Lema 6, H4		4 Proposición 1, Proposición 3		4 Postulado 1, Proposición 1, H4
	5 . Postulado 1					
2	4. Proposición 8, Postulado 3	4. Proposición 2		4. Postulado 1, Postulado 2, Proposición 3	4 Postulado 2	
	5. Postulado 1, Proposición 1, Proposición 8	5. Proposición 1, Proposición 2, Proposición 3, Postulado 6, H4, Heurística propia tres formas de comparar.	5. Postulado 1, Postulado 2, Postulado 3, Proposición 1, Proposición 2, Proposición 3	5. Postulado 1, Postulado 2, Postulado 3, Proposición 1 Proposición 2, Proposición 3	5. Postulado 1, Proposición 1	5. Postulado 1, Postulado 2, Postulado 3
3	3. 4. Lema 6, Proposición 9, Proposición 10	3. 4. Lema 6, proposición 9, Proposición 10, H1, H0, H2, H4				
			2. Lema 6, Postulado 5, H3	2 Postulado 4, Proposición 1, H2		
	3. H2		3 Proposición 9, Proposición 10	3 Lema 6, Proposición 9, Proposición 10	3. Proposición 9, Proposición 10, H3	3. Proposición 9, Proposición 10, Postulado 4, Lema 6
	4 H1	4. Proposición 8				
					5. Postulado 1, Proposición 1	
4		1. H2				
	5. Postulado 1		5. Proposición 8			
				No se observa relación directa con alguno de los elementos de la Heurística de Arquímedes.	No hay evidencias más allá de decir como varia la tabla	No hay evidencia de lo que para los estudiantes significó o comprendieron.
5			No se observa		4. Proposición 3	4. Postulado 1, Proposición 1, H0, H1, H4
	5. Postulado 1, H1, Proposición 8	5. Proposición 3, Proposición 8		5 Postulado 1, Proposición 1, Proposición 3, Proposición 8, H2	5. Proposición 8	
6	3 Proposición 8	3. No hay una estrategia que se aproxime a la propuesta por Arquímedes en la comparación de magnitudes.	3 Proposición 1, Proposición 3	No respondieron	3. Proposición 3	3. Proposición 1, Postulado 1

Actividad uno

En los seis grupos de trabajo, para el caso de la actividad uno transitaron por la estrategia 1, recurriendo al ensayo y error para encontrar el centro de gravedad de las figuras y aunque en tres de los casos (Grupo 1-G1, Grupo 2-G3, Grupo 3-G4) se reconoció una heurística propia que no fue posible asociar con algún elemento particular de la heurística de Arquímedes, sí evidenció que hubo formas en las que el grupo de estudiantes buscó dar solución a la actividad. Para el caso de G5 y G6, iniciaron con la estrategia 1, pero luego fue combinada con la estrategia 3, pasando no solamente por el ensayo y el error, sino por buscar elementos de tipo geométrico que dieran sustento a eso que desde la experimentación inicial no era posible explicar. Aquí se evidenció de manera contundente la asociación con el lema 6 y las proposiciones 9 y 10. Fue interesante ver cómo los estudiantes llegaron a recrear elementos históricos que de alguna forma Arquímedes teorizó y que ellos trajeron al presente de manera implícita para determinar el centro de gravedad, logrando comparar magnitudes.

Otra de las estrategias que se observó para G1, G3, G4, G5 fue la 3, visualmente tenían una intención de equilibrar las figuras partiendo en esencia de distribuir el peso a lado y lado valiéndose de lo planteado en el postulado 1, determinando el centro de gravedad desde H2 y teniendo en cuenta que cada figura podía dividirse en otras del mismo tipo o de orden inferior, acción que desde Arquímedes se asoció con H3 y que desde su heurística consistió en seccionar con planos paralelos las figuras o sólidos entregados.

Finalmente la estrategia 4, fue evidenciada en G2, G4 y G6. Implícitamente sabían que habían elementos de la ley de la palanca que determinaron la posibilidad de equilibrar las figuras, teniendo en cuenta el punto de apoyo o el peso distribuido de la figura a lo largo de un eje imaginario. El sustento de esta estrategia estuvo fundamentado en el postulado y la proposición 1, bajo la relación peso- distancias iguales y H4 teniendo en cuenta que todas las figuras tenían peso, utilizando una balanza y equilibrando figuras se pudo determinar magnitudes.

Actividad dos

Se observaron dos estrategias de manera común para los grupos de estudiantes. En un primer momento la estrategia 4, para G1, G2, G4 y G5, aunque el sustento no fue el mismo para todos, se destacó la intención de relacionar pesos y longitudes de manera implícita, desde los postulados 1, 2, 3 y las proposiciones 3 y 8. Cabe destacar que este reconocimiento de la relación peso-distancia, evidenció en los estudiantes acciones representadas en palabras que dieron cuenta del establecimiento de condiciones de equilibrio y desequilibrio en una situación dada.

A manera de complemento con la estrategia anterior, en los seis grupos se evidenció la estrategia 5, con un importante número de elementos de la heurística de Arquímedes. Precisamente en esta actividad fue posible vislumbrar en mayor grado acciones de los estudiantes asociados con una forma particular de los elementos de la heurística de Arquímedes. Había que partir que explícitamente la comparación de magnitudes se dio en los grupos por la relación de dependencia longitud-peso o viceversa; es decir en muchos de los grupos lograron enunciar y dar a entender en sus palabras los postulados y las proposiciones 1, 2, 3. Todo lo anterior evidenció primero que determinar el centro de gravedad no era más que una excusa para equilibrar la balanza y así comparar magnitudes. Segundo, además de experimentar de manera física, los grupos de estudiantes lograron enunciar y acercarse a muchos de los elementos de la heurística de Arquímedes tales como la comparación por pesos y distancias iguales, determinación de condiciones de equilibrio a partir de la inclinación de la balanza por peso o por distancia, comparación de magnitudes por compensación de pesos y distancias desiguales. En síntesis comparar magnitudes desde la heurística de Arquímedes, implicó tener en cuenta relaciones de dependencia entre las magnitudes (longitud-peso), homogeneidad entre las magnitudes; es decir que comparar en la balanza implicó tratar con la misma magnitud a lado y lado, añadir o quitar en la balanza de un solo lado implicaba que las condiciones de equilibro no se mantuvieran, pero que se si se hacía a ambos lados no se modificaban las condiciones de equilibrio.

Actividad tres

En esta actividad G1 y G2 combinaron las estrategias 3 y 4 al igual que en la actividad uno se apoyaron en elementos de la heurística de Arquímedes tales como el lema 6, y las proposiciones 9 y 10. Aquí lo que cambió fue el trabajo desarrollado en Geogebra, pero lo que se observó fue la manera como lograron traer elementos de la heurística, adquiridos experimentalmente y que pudieron ser probados allí mismo al trasladarlos a un ambiente virtual, en el que la experimentación requirió del uso de otras formas alternativas para su verificación, ya fuera por la construcción de puntos medios, diagonales, puntos de intersección y cálculo de áreas. Lo que quise decir fue que los elementos de la heurística de Arquímedes lograron transitar sin modificarse en el paso de la experimentación física (hipótesis mecánicas) al apoyo con el Geogebra (hipótesis composicionales), permaneciendo intactas, acercándose de una manera más fiel a la comparación de magnitudes desde Arquímedes. Cabe destacar que G3, G4, G5 y G6, mostraron acciones que correspondieron con la estrategia 3 y que se apoyaron de igual forma en el lema 6, y en las proposiciones 9 y 10.

Otra de las estrategias mostrada en esta actividad y que se evidenció en G3, G4, fue la número 2, que pudo considerarse como un paso previo a la estrategia 3 pasando de la división visual a la división de la figura, recurriendo a elementos de tipo geométrico como puntos medios, diagonales puntos de intersección etc. La estrategia 2, se apoyó básicamente en la proposición 1, buscando en un principio la simetría en la comparación de pesos a partir de iguales cantidades de área.

Actividad cuatro

Esta actividad fue diseñada para trabajar la proposición 8 del Libro “Sobre el equilibrio de los planos I”. Fue entregada una construcción en Geogebra en la que debían animar uno de los puntos que permitió recoger información respecto a longitudes y áreas. Únicamente G1 y G3 lograron además de completar los datos de la tabla acercarse a la estrategia 5, para el caso de G1 la relación que lograron establecer fue de longitudes y pesos iguales bajo el postulado 1, en el caso de G3, reconocieron que fue posible mantener en equilibrio a pesar de tener pesos y longitudes desiguales.

En los grupos restantes, además de completar la tabla, no se logró evidenciar en la producción de los estudiantes trazas o justificaciones que pudieran asociarse con una forma particular de los elementos de la heurística de Arquímedes. En este momento me pregunté respecto a porqué solo dos grupos lograron acercarse a uno o algunos elementos de la heurística de Arquímedes; la respuesta no era fácil pero una de las posibles hipótesis consistió en afirmar que la actividad mostraba cierto grado de complejidad. Esto lo digo porque la actividad Nº 5 era una aplicación de la proposición 8, pero fue mostrada en una construcción en Geogebra con elementos de la balanza que fueron trabajados en la actividad 1, 2 y 3.

Actividad cinco

La estrategia 4, fue usada por G5 y G6 y aunque no se apoyaron en los mismos postulados o proposiciones para el caso de G5 se reconoció la relación pesos y distancias desiguales para mantener la balanza en equilibrio. En el caso de G6, el equilibrio estuvo dado bajo el postulado y la proposición 1, complementado con la relación peso-área que partió que cada figura era igual a su magnitud geométrica, puntualmente para el caso de una superficie su peso es el área.

Finalmente G1, G2, G4, G5 y G6 lograron poner en juego la estrategia 5, apoyados en la proposición 8, entendiendo la relación de dependencia entre longitud-área-peso, manteniendo siempre la balanza en equilibrio.

Actividad seis

En esta actividad la estrategia 3, fue usada por G1, G2, G3, G5 y G6, básicamente los estudiantes construyeron los cuadrados y los rectángulos calculando su área, comparando a partir de la cantidad de área. Se esperaba particularmente que en esta actividad se llegará a trabajar la proposición 2 del libro del Método de Arquímedes a partir de los elementos construidos en las actividades anteriores.

4. CONCLUSIONES

Lo presentado en este trabajo permite llegar a las siguientes conclusiones:

En relación con el objetivo específico número uno puede concluirse que el diseño y la implementación de la secuencia de actividades se estructuró a partir de dos elementos de la heurística de Arquímedes, las hipótesis mecánicas y las hipótesis composicionales Vega (1986). Las primeras le pusieron el énfasis a la experimentación[8] a partir de nociones y proposiciones de estática que aparecieron de manera espontánea en la implementación de las actividades uno y dos. Las segundas implementadas en la actividad tres, permitieron que los estudiantes pusieran en juego la composición de áreas por cuerdas o líneas paralelas bajo algunos elementos de la geometría euclidiana. En las actividades cuatro, cinco y seis el énfasis estuvo puesto en la posibilidad de combinar los dos tipos de hipótesis usando elementos de ambas, evidenciando un acercamiento a lo mecánico, lo tangible, lo construible, lo que pudo ponerse a prueba a partir de la manipulación física y el apoyo de las herramientas de Geogebra. Lo descrito anteriormente pudo observarse en las estrategias identificadas en la comparación de magnitudes presentado en el apartado 2.4.4 análisis preliminar. Estas estrategias condensaron de manera general formas de proceder de los estudiantes en las seis actividades, se presentaron dos posibilidades: la correspondencia de una única estrategia en la implementación de la actividad o la simultaneidad de estrategias en la misma actividad (ver tabla 39). Esta correspondencia única o simultánea de estrategias mostró que las hipótesis mecánicas, las hipótesis composicionales o la combinación de estas fueron utilizadas por los grupos de manera similar llevando un recorrido que se aproximó a una heurística o una forma de pensar que combinaba elementos de la mecánica (hipótesis mecánicas) con la geometría (hipótesis composicionales), relacionando, a partir de la ley de la palanca y el centro de gravedad, acciones con figuras planas que debían ser equilibradas sin olvidar rasgos y características físicas tales como la asociación entre área y peso (pesar geométricamente áreas, volúmenes) o la determinación del centro de gravedad (en los que se tuvo en cuenta la concentración del peso) a partir de elementos de la geometría euclidiana.

---

[8] La experimentación se da a lo largo de la secuencia de actividades; puntualmente en las actividades uno y dos la experimentación es de tipo físico, tangible. En las actividades restantes, la experimentación se da desde lo virtual y la posibilidad de recurrir a herramientas de Geogebra que permiten mover, medir, construir, etc.

En la implementación de las actividades se logró capturar elementos de la heurística en la comparación de magnitudes, como nociones y proposiciones de la estática y descomposición de figuras en otras del mismo tipo, coincidiendo en que vía experimentación física o virtual con el apoyo de Geogebra, aportó elementos que mostraron por ejemplo, que determinar un centro de gravedad era solo un pretexto para estudiar la comparación de magnitudes que incluyó probar, cuestionarse, experimentar, visualizar o en el caso de la balanza en llegar a enunciar a la manera de cada grupo y con su propio lenguaje algunos de los postulados y proposiciones del libro "Sobre el equilibrio de los planos I" y en varios momentos, asociar el peso de cada figura con su magnitud geométrica. Este trabajo de investigación sin duda permitió vislumbrar con herramientas de la modernidad un amplio número de posibilidades, en el que la experimentación física y virtual (con el apoyo de Geogebra), trajeron consigo una aproximación a una forma de pensar del pasado que prevalece aún en épocas diferentes y que son producto de lo que la mente humana es capaz de replicar, es decir que hay estados de razonamiento del pensamiento matemático que bajo cualquier contexto cultural responden a las necesidades de pensamiento del ser humano.

Respecto al objetivo específico número dos, pudo concluirse que las heurísticas de los estudiantes de grado noveno en la comparación de magnitudes observadas en el desarrollo de las actividades, se aproximaron a la heurística de Arquímedes a partir de tres elementos las hipótesis mecánicas, las hipótesis composicionales y la combinación de estas.

En esencia se observó rastros de hipótesis de tipo mecánico en los seis grupos, evidenciados en el momento en el que enunciaron nociones y proposiciones de la estática, a partir de determinar el centro de gravedad de figuras de una y dos dimensiones, uso de la ley de la palanca apoyados en condiciones de equilibrio. De igual manera aparecieron rastros de hipótesis composicionales en los seis grupos en el momento en que propusieron la descomposición de figuras en otras del mismo tipo o por composición de superficies por cuerdas. En general los grupos iniciaban la solución de las actividades a partir de determinar "la mitad" o encontrar un eje central que hiciera las veces de balanza (hipótesis composicionales) para luego llegar a condiciones de equilibrio (hipótesis mecánicas) desde la relación "pesos y distancias iguales" establecidos en el postulado y la proposición número uno del libro Sobre el equilibrio de los planos. Esta heurística, mostrada de manera general por los grupos estableció una forma de razonar apoyada en las hipótesis mecánicas que encierran del postulado uno al seis y proposiciones uno, dos, tres y ocho. Se complementa con hipótesis composicionales desde las proposiciones nueve, diez y el lema seis y los valores teóricos del centro de gravedad para figuras de una y dos dimensiones y H3 (ver tabla Nº6) propuesto por Castro (2007) donde según el caso cada figura se puede descomponer en infinitas figuras del mismo tipo o de orden inferior.

Esta forma de proceder arraigada en los grupos no logró trascender a hipótesis mecánicas basadas en la proposición número ocho (condiciones de equilibrio bajo la relación de pesos y distancias desiguales) tal como se evidenció por ejemplo para el grupo dos en las figuras 21, 22 y 23 y en sus respectivos análisis.

La heurística reconocida de manera general en los seis grupos se categorizó a partir de la combinación de hipótesis mecánicas y composicionales descritas anteriormente bajo una propiedad común "buscar la mitad". La diferencia estuvo en las variaciones que fue posible distinguir en el momento de analizar las heurísticas de manera particular en la comparación de magnitudes en algunas actividades. Dichas variaciones se enmarcaron a partir de dos tipos de hipótesis mecánicas, las primeras asociadas a la proposición uno y las segundas asociadas a la proposición ocho:

1. Hipótesis mecánicas bajo proposición uno que responde a la relación pesos y distancias iguales.

2. Hipótesis mecánicas bajo proposición uno que responde a la relación pesos y distancias iguales transitando hacia hipótesis mecánicas bajo, proposición ocho de la estática que responde a la relación pesos y distancias desiguales.

A continuación se describirán a manera de conclusión algunos de los elementos de la heurística de Arquímedes destacados en cada uno de los grupos partiendo de la propiedad común y profundizando en los dos tipos de hipótesis mecánicas:

Grupo número uno

“Buscar la mitad bajo postulado uno y proposición 1 hipótesis mecánicas uno”

La forma en la que compararon magnitudes transitó por las hipótesis mecánicas y composicionales evidenciadas en las cinco estrategias; pasaron por el ensayo y error, enriquecido por la experimentación física, bajo un elemento importante “buscar la mitad” apoyados en las hipótesis mecánicas: 1. A pesar de experimentar condiciones de equilibrio enmarcados en las hipótesis mecánicas 2, se mantuvieron en las hipótesis mecánicas 1, recurriendo a las hipótesis composicionales a partir de a la descomposición de figuras del mismo tipo, asociando a su vez el peso con su magnitud geométrica.

Desde la experimentación tanto física como virtual fue posible reconocer que el grupo se aproximó a las nociones y proposiciones de la estática tal como lo hacía Arquímedes quien reconoció que era más fácil hacer demostraciones por “vía mecánica” para obtener una idea de la cuestión (Heiberg 1909), para posteriormente acudir a formas geométricas de demostración. Por ejemplo en la figura 8, en el caso del paralelogramo, se observó la construcción de las diagonales y la intersección de estas como el centro de gravedad de la figura, esta estrategia coincidió con la proposición 10, que pasó de comparar visualmente, a construir las diagonales y descomponer la figura en cuatro figuras del mismo tipo, distribuyendo el peso y la cantidad de área de manera uniforme hipótesis composicionales. Históricamente Arquímedes fue el primero en proveer teóricamente que el centro de gravedad de un círculo era su centro y que el centro de gravedad de un paralelogramo era la intersección de las diagonales, aunque los estudiantes no lo hayan enunciado de esta forma, fue posible identificar que la acción de trazar llevó a pensar que a partir de la experimentación los estudiantes hayan llegado a resultados similares, sin conocer en profundidad el trabajo de Arquímedes. Aquí apareció la idea de pesar lo mismo, la relación área-peso, desde lo planteado en H1, el peso de cada figura es igual a su magnitud geométrica; por ejemplo, el peso de una línea es su longitud, el peso de una superficie es su área, etc.

Otro de los elementos destacados, tuvo que ver con que a mayor longitud del punto de apoyo, mayor peso; el grupo reconoció la distancia como elemento para multiplicar el peso. Bajo esta forma de comparación, pudo observarse que el grupo equilibró dos pesos en el lado izquierdo, con uno en el lado derecho, reconociendo que el peso que se colocó en cada lado debió ser equivalente. Esta forma de comparar magnitudes poco usuales, recurrió a la experimentación y de manera espontánea logró capturar elementos de la ley de la palanca, explicitando en cierta medida la relación “peso distancia”, acercándose a la proposición 8, en la que los pesos eran compensados por las distancias. Se observó que la comparación estuvo dada en relación con la compensación, a medida que la longitud de uno de sus lados cambiaba, aumentaba o disminuía el lado de la otra figura, reconocieron que a pesar de este cambio las figuras se volvían desiguales, es decir no tenían la misma forma, pero sí la misma área. Implícitamente la forma en la que compararon magnitudes los estudiantes se aproximó bastante a la teorización que hizo Arquímedes. Entre los elementos más representativos de la heurística de Arquímedes que fueron puestos en juego por los estudiantes se destacó el apoyo en las hipótesis composicionales compensando las figuras a partir de colocar ambas figuras de manera que tuvieran como diámetro o eje común la misma línea recta que actuó como los brazos de la balanza. Las figuras fueron seccionadas por planos, generalmente perpendiculares a dicho eje, creando infinitas rebanadas de forma que los centros de gravedad estuvieron sobre el eje común.

La experimentación tanto física como virtual le brindó al grupo ricas y variadas experiencias que aunque no expresadas de manera teórica y rigurosa como lo hizo Arquímedes, sí fueron de gran utilidad en el momento de trabajar con el apoyo del programa Geogebra, para determinar el centro de gravedad de un segmento, un paralelogramo, un triángulo, un círculo. Pasar de la experimentación física en las actividades 1 y 2, al apoyo con Geogebra, permitió que los estudiantes tuvieran elementos de referencia desde los postulados, proposiciones, lema y elementos de la heurística de Arquímedes en la comparación de magnitudes, porque determinar el centro de gravedad no se restringió únicamente a encontrar un único lugar donde equilibrar una figura; incluyó comparar magnitudes y establecer condiciones de equilibrio a partir de la relación distancia-peso.

Aunque la intención de este trabajo de investigación no consistió en evaluar la incidencia del apoyo de Geogebra en la comparación de magnitudes, se enfatizó en observar las acciones y el uso de algunas herramientas que permitieron reconocer estrategias y acciones similares a las teorizadas por Arquímedes, que fueron complementadas de manera física y virtual.

En síntesis la heurística presentada por el grupo número uno, en términos de las estrategias utilizadas en la comparación de magnitudes, se destacaron la número tres y cuatro, en las que respectivamente usaron elementos geométricos para determinar el centro de gravedad, ya fuera de forma experimental o virtual y en la determinación del centro de gravedad explicitando la comparación a partir de la relación (longitud-peso/longitud-área). Estas estrategias coincidieron con las vertientes empleadas por Arquímedes en su método de investigación, presentadas por Guevara (2005) en las que los estudiantes al parecer en la técnica inicial intuyeron algún resultado a partir de elementos de la geometría euclidiana combinados con hipótesis composicionales, luego pasaron a la técnica intermedia verificando la factibilidad de los resultados a partir del uso de instrumentos, apoyados en hipótesis mecánicas provenientes de la experimentación con centros de gravedad, condiciones de equilibrio y teorizaciones de la ley de la palanca. Por último llegaron, en la vertiente final, a la verificación de manera física o virtual más que una demostración de lo intuido en la técnica inicial, evidenciada en la proposición nueve, diez y el lema seis. La combinación de la mecánica con la geometría, caracterizada por buscar mantener relaciones de equilibrio, la descomposición de figuras, la asociación de área-peso y la concentración del peso en un punto denominado centro de gravedad.

Profundizando en las hipótesis composicionales recurrieron con mayor frecuencia a H1, H2 y H3, reconociendo que todas las figuras tenían peso, pero que este correspondía con su magnitud geométrica. Dicho peso se distribuía en relación con el centro de gravedad que coincidía en muchos casos con el centro geométrico de cada figura, obtenido a partir de elementos de la geometría euclidiana o por la descomposición de figuras del mismo tipo o de orden inferior. En relación con las hipótesis mecánicas los estudiantes usaron los postulados uno, tres y seis, observando que las condiciones de equilibrio buscaban mantener la relación de pesos y distancias iguales, buscando siempre la mitad. Cuando se observaron las acciones de los estudiantes en relación con las proposiciones, el panorama se amplió de la relación de pesos y distancias iguales (proposición 1) a la relación de pesos y distancias desiguales (proposición 8).

Grupo número dos

"Buscar la mitad bajo postulado uno y proposición 1 hipótesis mecánicas uno-condiciones de equilibrio o desequilibrio"

La forma en la que compararon magnitudes consistió en transitar por cuatro de las cinco estrategias, no se observaron acciones que llevaran a relacionarlas con la estrategia número 2. Pasaron por el ensayo y error, enriquecido por la experimentación física, bajo un elemento importante "buscar la mitad" asociado con hipótesis composicionales distribuyendo el peso dependiendo de la cantidad de área, así como la descomposición de la figura en otras del mismo tipo o de orden inferior, haciendo uso de elementos geométricos. En el proceso de comparación se observó reconocimiento de las hipótesis mecánicas uno, reconociendo lo que ocurriría en caso de no mantenerse el equilibrio a partir de las hipótesis mecánicas dos. Pero esto no fue suficiente permanecieron arraigados en la relación de pesos y distancias iguales, en la actividad dos plantearon tres situaciones de equilibrio que evidenciaron que la comparación no trascendió más allá de lo planteado en el postulado 1 y la proposición 1, a pesar de proponer una situación de equilibrio donde no siempre los clips estaban ubicados de manera simétrica, el sistema se mantenía en equilibrio.

En general se observó que los estudiantes explicitaron condiciones de equilibrio que dependían o del peso o de la longitud, pero no las conjugaron de manera simultánea en la comparación de magnitudes o por lo menos de manera escrita. Se esperaba que en este punto de la secuencia de actividades, muchas de las acciones y análisis presentados por el grupo no dejaran de lado las relaciones que ya habían explicitado en otras actividades, como por ejemplo la dependencia pesos iguales-distancias iguales" o "desiguales-distancias desiguales". Sin embargo los hallazgos presentados vislumbraron un camino hacia la comparación de magnitudes, donde fue posible que los estudiantes explicitaran a partir de la interacción con experiencias de tipo físico y virtual, que nutrieron y le brindaron elementos que de otra manera quizás, no hubieran transitado.

En síntesis la heurística presentada por el grupo número dos, en términos de las estrategias utilizadas en la comparación de magnitudes, se destacaron la número cuatro, en la que determinaron el centro de gravedad explicitando la comparación a partir de la relación “longitud-peso/longitud-área”. Esta estrategia coincidió con las técnicas heurísticas empleadas por Arquímedes en su método de investigación, presentadas por Guevara (2005), en las que los estudiantes al parecer en la técnica inicial intuyeron algún resultado a partir de elementos de la geometría euclidiana combinados con hipótesis composicionales, luego pasaron a la técnica intermedia, verificando la factibilidad de los resultados a partir del uso de instrumentos, apoyados en hipótesis mecánicas provenientes de la experimentación con centros de gravedad, condiciones de equilibrio y teorizaciones de la ley de la palanca. Por último llegaron en la técnica final, a la verificación de manera física o virtual, más que una demostración de lo intuido en la técnica inicial, evidenciada en la proposición ocho, nueve y diez. La combinación de la mecánica con la geometría, caracterizada por buscar mantener relaciones de equilibrio, la descomposición de figuras, la asociación de área-peso y la concentración del peso en un punto denominado centro de gravedad. Profundizando en las hipótesis composicionales recurrieron con mayor frecuencia a H0, H2 y H4, reconociendo que todas las figuras tenían peso, pero que éste correspondía con su magnitud geométrica. Dicho peso se distribuía en relación con el centro de gravedad que coincidía en muchos casos con el centro geométrico de cada figura, obtenido a partir de elementos de la geometría euclidiana o por la descomposición de figuras del mismo tipo o de orden inferior, determinando a su vez magnitudes con el apoyo de una balanza. En relación con las hipótesis mecánicas los estudiantes usaron el postulado seis, observando que las condiciones de equilibrio buscaban mantener la relación de pesos y distancias iguales, buscando siempre la mitad. Cuando se observaron las acciones de los estudiantes en relación con las proposiciones el panorama se amplió a la relación de pesos y distancias desiguales (proposición 3 y 8), buscando condiciones de equilibrio.

Grupo número tres

"Buscando la mitad visualmente bajo proposición uno y ocho hipótesis mecánicas uno transitando a hipótesis mecánicas dos"

La forma en la que compararon magnitudes consistió en transitar por cuatro de las cinco estrategias, pasaron por el ensayo y error, enriquecida por las hipótesis mecánicas y la experimentación física, bajo un elemento importante "buscar la mitad" visualmente usando el criterio "fácil o difícil" dependiendo de la figura y buscando razones de porqué fue posible equilibrarla. Desde la teorización presentada por Arquímedes se aproximaron a la comparación de magnitudes desde el postulado y la proposición 1, a su vez tuvo en cuenta en las hipótesis composicionales apoyados en la descomposición de figuras del mismo tipo, haciendo uso de elementos geométricos.

Lo que el grupo denominó ensayo y error, estaba sujeto a la acción de determinar "la mitad" midiendo con la regla, para dividir en dos partes iguales y luego probarlo sobre el tornillo. Estas acciones hicieron que se perdiera el carácter de ensayo y error que fue asignado por los estudiantes cuando logran construir las diagonales y su intersección, utilizando hipótesis composicionales aproximándose a elementos de la heurística de Arquímedes, expuesta en la teorización que hizo en el libro Sobre el equilibrio de los planos. En esta dirección sorprendió el proceso de experimentación hacia el postulado 4 y 5. Sin pedir que encontraran el centro de gravedad de las cinco figuras, las ubicaron sobre el tornillo haciendo que coincidieran sus centros de gravedad manteniendo el equilibrio. Fue importante destacar que de otro modo que no fuera la experimentación física, el grupo no podría haber comprobado que la generalización de "hallar la mitad", no siempre era válida para encontrar en centro de gravedad y a su vez comparar magnitudes. Fue precisamente en la actividad número dos, donde nuevamente la estrategia mostrada por los estudiantes "vía experimentación" consistió en equilibrar la balanza rompiendo el esquema de pesos iguales a distancias iguales. Pusieron en juego la comparación a partir de la descomposición de pesos y la relación con las distancias. En esta comparación por descomposición salieron de lo común y entendieron que era posible equilibrar un clip con tres clips, distribuyendo el peso. Aquí se identificaron diferentes formas de comparación propuestas por el grupo:

-Relación “peso-brazos”, pero brazos es distancia, es decir que se entiende que hay una relación directa “peso distancia” para mantener el equilibrio.

-Comparación por amplificación utilizaron la balanza como un amplificador de cantidades; es decir como la balanza iba de 1cm en 1cm hasta 8cm la longitud total de los brazos y al querer establecer una relación con una longitud de 10cm, entonces ubicaron dos clips en 5cm y 10 clips en un centímetro. Aquí se observó como la comparación se dio en términos de poder comparar magnitudes, multiplicando el peso a ambos lados de la igualdad.

Desde el trabajo con Geogebra se destacó que el apoyo del software brindó la posibilidad de comparar magnitudes a partir de la animación. En la actividad número seis, el grupo explicó que moviendo el punto N, se iban deformando las figuras a tal punto que el cuadrado AQ y rectángulo (AC AS) tuvieran la misma cantidad de área, esto porque el rectángulo se convirtió en un cuadrado igual a AQ. Aquí fue donde el apoyo del software brindó la opción de ver acciones que con el uso de lápiz y papel, tardarían un poco más o quizás no se llegarían a observarse.

En síntesis la heurística presentada por el grupo número tres, partió de la experimentación como medio de comparación de magnitudes apoyados en hipótesis composicionales (H3) a partir de acciones como la descomposición de figuras en otras del mismo tipo buscando la mitad, el centro de gravedad o el centro geométrico, ampliando la relación de pesos y distancias iguales a pesos desiguales y distancias desiguales, así como la comparación de figuras con diferente forma pero igual cantidad de área. En términos de las estrategias utilizadas en la comparación de magnitudes, se destacó la numero tres, en la que usaron elementos de la geometría euclidiana para determinar el centro de gravedad. Esta estrategia coincidió con las hipótesis composicionales en el momento de determinar el centro de gravedad de figuras a partir de encontrar el punto de intersección de las diagonales o de la intersección de los segmentos trazados a partir de los puntos medios de los lados opuestos.

Grupo número cuatro

“Buscando la mitad visualmente bajo proposición uno y ocho hipótesis mecánicas uno transitando a hipótesis mecánicas dos compensación o intercambio de pesos y distancias”

La forma en la que compararon magnitudes consistió en transitar por las cinco estrategias. Pasaron por el ensayo y error enriquecida, por la experimentación física, bajo un elemento importante “buscar la mitad”. De manera similar a la teorización presentada por Arquímedes se apoyaron inicialmente en la comparación de magnitudes desde el postulado y la proposición 1, apoyados en las hipótesis composicionales referentes a la descomposición de figuras del mismo tipo, haciendo uso de elementos geométricos que les permitieron entender la comparación a partir del intercambio de pesos y distancias. Plantear hipótesis y verificarlas experimentalmente llevó a los estudiantes a acercarse a elementos de la heurística de Arquímedes.

Desde el apoyo con Geogebra, el grupo de estudiantes propuso acciones que los llevaron a equilibrar cada objeto. Las acciones que se reconocieron para hallar el centro de gravedad de las figuras utilizaron las herramientas polígono, rectas, punto medio, intersección entre dos puntos etc. En el caso del círculo, el proceso fue diferente para hallarle el centro de gravedad, tuvieron que construir un cuadrado con las mismas medidas, trazándole una línea por la mitad y hallándole el centro, para luego trazarle una línea entre dos puntos y determinar las medidas que necesitaban, también utilizaron la herramienta compás y sacaron medidas exactas. “Inscribir el circulo en un cuadrado” aquí buscaron hacer coincidir los centros de gravedad para determinar el lugar donde debía apoyarse, es decir hallar el centro-postulado 1-, aquí de manera similar como lo hacía Arquímedes estaban buscando cuadrar la figura, no en términos de tener la misma área sino en tener un referente para poder determinar el centro de gravedad, aquí se presentó una forma de comparación que consistió en buscar hacer coincidir los centros de gravedad-postulado 4, H2 o en otras palabras trabajar como lo hacía Arquímedes en recurrir a lo conocido (el centro de gravedad de un cuadrado) para determinar el centro de gravedad del círculo, que era lo que no conocía. Relacionar esta forma de comparar con la manera como Arquímedes solucionaba los problemas, ir de lo conocido a lo desconocido. Por ejemplo hallar el volumen de la esfera a partir del volumen del cilindro y el cono.

En general, las acciones desarrolladas por los estudiantes para determinar el centro de gravedad hicieron uso de hipótesis composicionales, que fueron complementados con elementos geométricos a partir de algunas herramientas como punto medio, segmento, punto de intersección, finalmente sintetizaron diciendo que el centro de gravedad de:

- Una línea recta es la mitad el centro H1.
- Un paralelogramo es el centro de la figura proposición 9 y 10.
- Un triángulo es el centro de tal H2.
- Un círculo es un poco difícil de hallar porque toca trazar cuadrados alrededor y hay si hallarle el centro, o pues así lo hice-postulado 4.

En síntesis la heurística presentada por el grupo número tres, partió de la experimentación como medio de comparación de magnitudes, apoyados en hipótesis composicionales a partir de la descomposición de figuras en otras del mismo tipo buscando "la mitad", el centro de gravedad o el centro geométrico. Ampliando la relación de pesos y distancias iguales a pesos desiguales y distancias desiguales bajo las hipótesis mecánicas uno y dos, añadiendo la comparación a partir de la compensación o intercambio de pesos y distancias para mantener las condiciones de equilibrio.

Grupo número cinco

"Buscando la mitad-eje central- bajo hipótesis composicionales-condiciones de equilibrio o desequilibrio"

La forma en la que compararon magnitudes consistió en transitar por las cinco estrategias. Pasaron por el ensayo y error, enriquecida por la experimentación física, bajo hipótesis composicionales buscando el eje central asociada con distribuir el peso dependiendo de la cantidad de área, así como la descomposición de la figura en otras del mismo tipo o de orden inferior, haciendo uso de elementos geométricos. En el proceso de comparación se observó reconocimiento de la relación pesos y distancias iguales, al igual que pesos y distancias desiguales, pero no lograron que trascendiera de manera amplia en la mayoría de actividades. Desde la teorización presentada por Arquímedes se aproximaron al postulado y la proposición 1.

Particularmente en la actividad número uno, se presentaron dos formas de comparación, la primera buscaba determinar un eje central o en palabras de Arquímedes el punto de apoyo para que la masa fuera equivalente en todos sus lados, la idea de hacer uso de un eje iba en la dirección de las hipótesis composicionales, siendo este uno de los primeros pasos propuestos en la comparación de magnitudes. La segunda consistió en dividir la figura haciendo uso de elementos geométricos en partes de tal forma que la masa también fuera equivalente. El grupo de estudiantes contrastó las dos formas determinando el mismo centro de gravedad. Cabe destacar que la experimentación fue fundamental para el grupo; al ver que la figura difícilmente se equilibraría sobre la cuerda, optaron por usarla para envolver el paralelogramo no solamente por sus lados, sino logrando unir vértices para construir las diagonales, cuya intersección les permitió determinar el lugar donde debía apoyarse para mantenerse en equilibrio. Este conjunto de acciones con el único objetivo de mantener en equilibrio la figura, mostró que los estudiantes reconocieron, tal como lo plantea H0-H2, que todas las figuras tienen peso y centro de gravedad, pero hallar el centro de gravedad es quizás el fin y la riqueza está en la forma como usaron de manera espontánea acciones que les permitieron hacer comparaciones ya sea por medios físicos-experimentales o físico geométricos.

En síntesis la heurística presentada por el grupo número cinco, partió de la experimentación como medio de comparación de magnitudes, apoyados las hipótesis composicionales a partir de acciones como la descomposición de figuras en otras del mismo tipo buscando el eje central, el centro de gravedad o centro geométrico, manteniendo la relación de pesos y distancias iguales a pesar de transitar por hipótesis mecánicas bajo la relación de pesos y distancias desiguales, reconociendo condiciones de equilibrio o desequilibrio, logrando relacionar el peso de cada figura con su magnitud geométrica.

Grupo número seis

“Buscando la mitad- mismo eje- bajo hipótesis mecánicas uno transitando hacia hipótesis mecánicas dos-compensación o intercambio de pesos y distancias”

La forma en la que compararon magnitudes consistió en transitar por las cinco estrategias; pasaron por el ensayo y error, enriquecida por la experimentación física, bajo hipótesis mecánicas buscando la mitad. Desde la teorización presentada por Arquímedes se aproximaron a la comparación de magnitudes desde el postulado y la proposición 1, apoyados a su vez en hipótesis composicionales a partir de la descomposición de figuras del mismo tipo, haciendo uso de elementos geométricos que les permitieron entender la comparación a partir del intercambio de pesos y distancias.

Puntualmente en la actividad número uno pudo observarse como la experimentación física aportó elementos a las hipótesis mecánicas en la comparación de magnitudes, esto se evidenció en el momento en el que los estudiantes inscribieron el círculo en el cuadrado, encontrando el diámetro a partir de la longitud del lado del cuadrado, para así poder determinar el punto de equilibrio. Finalmente a la longitud del diámetro encontraron el punto medio, usando la regla. Para el caso del cuadrado, la estrategia consistió en envolver por los lados con la cuerda y cruzándola por los vértices hallando las intersecciones y determinando el punto donde debía apoyarse la figura para mantenerla en equilibrio. Esta forma de proceder se aproximó con lo planteado por Arquímedes en la proposición 10 y el lema 6. Algo que pudo destacarse fue la creatividad puesta en esta forma de encontrar el centro de gravedad y de paso en comparar magnitudes. Partieron de una idea trabajada por Arquímedes en una de sus proposiciones donde se hizo coincidir los centros de gravedad, para comparar magnitudes; si estos coincidían entonces era posible equilibrar la figura, Libro sobre el equilibrio de los planos I. Esta estrategia fue una de las que se destacó en la heurística de Arquímedes, recurriendo a problemas ya resueltos para luego dar tratamiento a la nueva situación, Históricamente este hecho pudo ser ejemplificado en la proposición 2 del libro del Método. Arquímedes conocía por sus antecesores el área del cono y el cilindro, los utilizó para hallar el área de la esfera, Sienra (1983). En síntesis puedo decir que particularmente las acciones del grupo llevaron a mostrar que la comparación de magnitudes se dio por la acción de hacer coincidir centros de gravedad que a su vez hicieron que las figuras pudieran mantenerse en equilibrio.

Particularmente en el triángulo argumentaron que el centro de gravedad se hallaba no precisamente en el centro, sino distribuyendo el peso a lo largo de un eje imaginario, (aquí aparentemente subyace una idea de comparación a partir de la compensación de pesos bajo un mismo eje-hipótesis composicionales.). Se dieron cuenta que había lugares de la figura donde era más delgada que el otro, aquí implícitamente la estaban partiendo en figuras que permitieran distribuir el peso. El pedazo más delgado iba a ser más liviano que el otro, entonces lo que se buscaron fue una parte que estuviera entre los dos implícitamente se trabajó las hipótesis mecánicas dos con el postulado 8.

En síntesis el grupo de estudiantes recurrió a las hipótesis composicionales en el momento en que transfirieron implícitamente a una hipotética balanza, distribuyendo el peso a lo largo de un eje imaginario "subyace la idea de comparación a partir de la compensación de pesos bajo un mismo eje" que se apoyó directamente en el postulado y la proposición 1, junto con H4. A partir de la experimentación llegaron a establecer lo propuesto en la estrategia 5, a partir de la relación peso-longitud. Esta relación se apoyó en hipótesis mecánicas bajo el postulado 1 que fue enunciado verbalmente por los estudiantes así:

-Pesos iguales a distancias desiguales no se mantiene en equilibrio se inclina hacia el lado de mayor distancia.
-La misma distancia y el mismo peso a ambos lados de la balanza se mantienen en equilibrio.

Se evidenció que para el grupo de estudiantes hubo unas condiciones de equilibrio previas que fueron construidas a partir de una experiencia de desequilibrio. Cuando se indagó a los estudiantes por las condiciones de equilibrio al ubicar clips a lado y lado de la balanza a diferentes distancias, mencionaron el principio de la palanca diciendo "se está enunciando la ley de Arquímedes que dice que con un punto de apoyo y un lado más largo de un palo o algo se puede levantar cualquier objeto.

Pasando al apoyo del software Geogebra, específicamente en la actividad número tres, lograron encontrar el centro de gravedad de los objetos construidos. Usaron las herramientas "punto medio", construcción de diagonales y punto de intersección llegando implícitamente a utilizar el lema 6 y las proposiciones 9 y 10.

Como forma de ilustrar las acciones de los estudiantes en el momento de encontrar el centro de gravedad, propusieron de manera similar los valores teóricos del centro de gravedad para una y dos dimensiones:

- El centro de gravedad de una línea recta es su mitad, la línea tiene una medida de donde podemos sacar su centro o su mitad.
- El centro de gravedad de un triángulo es la medida que se saca de la mitad de cada uno de sus lados, de esta forma se saca la mitad de los lados y si las unimos forma con líneas rectas nos dará el centro que buscamos.
- El centro de gravedad de un círculo es de acuerdo a su radio, ya que si tenemos el radio tenemos un punto medio que forma el punto de gravedad, al igual podemos hacer un cuadro por encima del círculo y dividirlo en la mitad cada uno de sus lados.

Este conjunto de acciones determinó indicios que lograron rastrear una forma de pensar similar a la mostrada por la Historia de las Matemáticas en Arquímedes. El hecho de enunciar de forma parecida a la teorización hecha por Arquímedes, o recorrer históricamente algunos de los episodios que posiblemente atravesó dicho pensador y que fueron condensados en su heurística, mostraron que los estudiantes lograron comparar magnitudes particularmente longitudes y áreas, partiendo de determinar el centro de gravedad de figuras y, para el caso donde la tarea parecía dispendiosa, recurrieron a relacionar con experiencias y resultados conocidos que les permitieron llegar a dar solución a la situación.

Otro de los hallazgos que se destacó, se asoció con la comparación de magnitudes en la actividad cuatro en términos de distancias iguales y pesos iguales para mantener la condición de equilibrio. Cuando las áreas eran iguales significó que tenían el mismo peso y se mantuvieron en equilibrio y sus longitudes eran iguales entonces su área también.

Este planeamiento encerró un importante hecho que en Arquímedes fue visto como la relación que era posible establecer entre la figura y su magnitud, para este caso los estudiantes logran mostrar que tal como lo planea H0, el peso del paralelogramo es su área, que a su vez depende de la distancia a la que se encuentra respecto al punto de apoyo para que se mantenga en equilibrio.

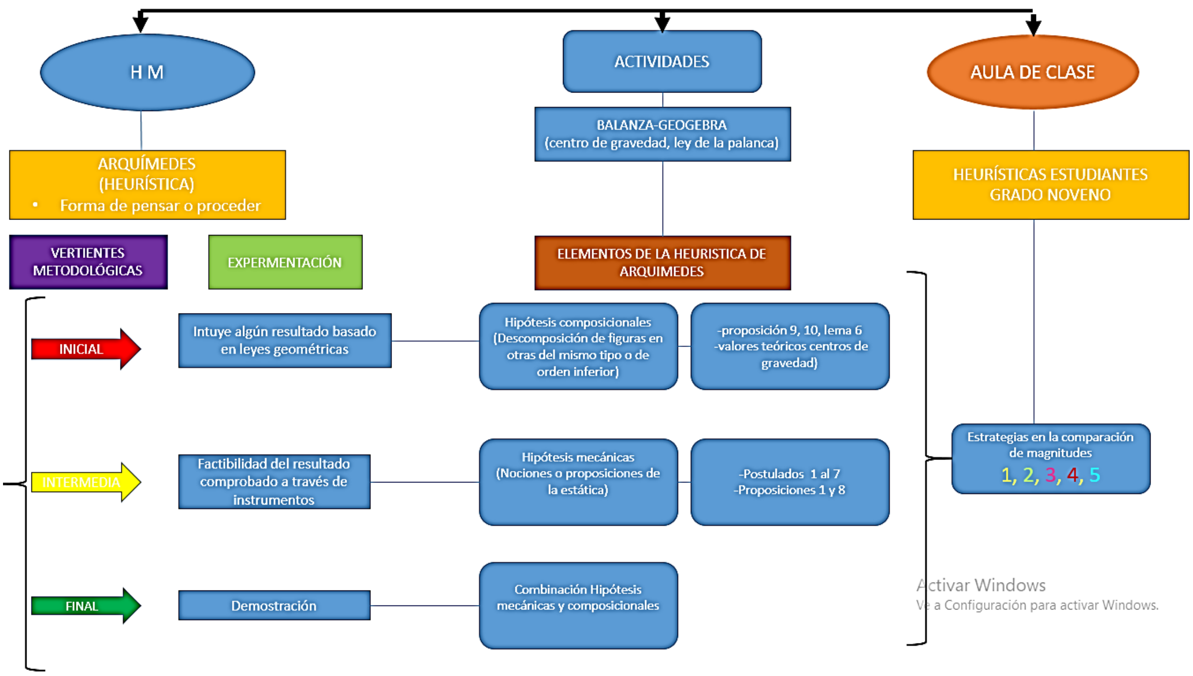
En síntesis la heurística presentada por el grupo número seis, partió de la experimentación como medio de comparación de magnitudes apoyados en acciones como la descomposición de figuras en otras del mismo tipo, buscando la mitad, el centro de gravedad o el centro geométrico, ampliando la relación de pesos y distancias iguales a pesos desiguales y distancias desiguales, añadiendo la comparación a partir de la compensación o intercambio de pesos y distancias para mantener las condiciones de equilibrio.

Hasta este momento se han presentado conclusiones respecto a los objetivos específicos desde el diseño y la implementación de la secuencia de actividades y la descripción de las heurísticas de los estudiantes de grado noveno en la comparación de magnitudes. Apoyados en estas conclusiones fue posible observar que el objetivo general se cumplió al poder identificar los elementos de la heurística de Arquímedes a los que los estudiantes se aproximaron fueron a las hipótesis mecánicas e hipótesis composicionales y la combinación de estas. Fue a partir de los registros documentales de los estudiantes y la ubicación de las acciones en estrategias, que fueron asociadas con nociones o proposiciones de la estática o con la descomposición de figuras en otras de mismo tipo o de orden inferior. A partir del diseño e implementación de la secuencia de actividades, se logró describir las heurísticas de los seis grupos bajo la propiedad común de buscar la mitad con variaciones específicas para cada grupo dependiendo de las hipótesis mecánicos uno o dos, complementadas con las hipótesis composicionales.

Se logró dar respuesta a la pregunta de investigación, reconociendo que en el recorrido de los estudiantes por la secuencia de actividades, se aproximaron a elementos usados por Arquímedes de manera espontánea. Esto se afirma porque en las actividades se observaron estrategias que de una manera u otra capturaron elementos de la heurística en la comparación de magnitudes, coincidiendo en que vía experimentación, tal como lo reconocía Arquímedes, se aportó elementos que mostraron por ejemplo, que determinar un centro de gravedad era solo un pretexto para estudiar la comparación de magnitudes que incluyó probar, cuestionarse, experimentar, visualizar o en el caso de la balanza en llegar a enunciar a la manera de cada grupo y con su propio lenguaje algunos de los postulados y proposiciones del libro "Sobre el equilibrio de los planos I" y en un hecho destacado, asociar el peso de cada figura con su magnitud geométrica.

Para ilustrar con más detalle sobre lo que sea ha concluido se presenta en la figura 42 un mapa, donde se pretende dar a conocer los hallazgos de la investigación:

Figura 42. Estructura del trabajo de investigación



En la figura 42 se bosquejan en la parte izquierda la Historia de las Matemáticas, puntualmente bajo la heurística de Arquímedes entendida como una forma de pensar o proceder que se organiza a partir de tres vertientes inicial, intermedia y final. Dichas vertientes permiten organizar la heurística de Arquímedes mostrando que a partir de la experimentación se intuía algún resultado basado en leyes geométricas, pasando por una comprobación a través de instrumentos, llegando a una demostración. Estas vertientes son enriquecidas con los elementos de la heurística de Arquímedes, puntualmente denominados hipótesis composicionales e hipótesis mecánicas; las primeras obedecen a la descomposición de figuras en otras del mismo tipo o de orden inferior, las segundas a nociones o proposiciones de la estática. Ambos tipos de hipótesis se asociaron para el caso de las composicionales con las proposiciones 9, 10, el lema 6 y los valores teóricos de los centros de gravedad. Las mecánicas se asociaron con los postulados teorizados por Arquímedes en el libro Sobre el equilibrio de los planos del uno al seis y las proposiciones 1 y 8. Las hipótesis sirvieron de insumo para estructurar la secuencia de actividades apoyadas en la balanza y Geogebra. Toda esta estructura fue llevada al aula de clase a través de la implementación de la secuencia de actividades, donde fue posible identificar y describir heurísticas de los estudiantes de grado noveno que se aproximaron a los elementos de la heurística de Arquímedes a partir de cinco estrategias en la comparación de magnitudes.

En general este trabajo de investigación permitió vislumbrar con herramientas de la modernidad un amplio número de posibilidades, en el que la experimentación física y virtual (con el apoyo de Geogebra), trajeron consigo una aproximación a una forma de pensar del pasado que prevalece aun en épocas diferentes y que son producto de lo que la mente humana es capaz de replicar, es decir que hay estados de razonamiento del pensamiento matemático que bajo cualquier contexto cultural responden a las necesidades de pensamiento del ser humano.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, M. (2005). *Geometría Experimental con Cabrí:una nueva praexología matemática.* México: Grupo Santillana.

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA, 8*(1), 30-46.

Babini, J. (1948). *Arquímedes.* Buenos aires: Espasa.

Baleiro, I. (2004). *Arquimedes, Pappus, Descartes e Poyla (Tesis doctoral).* Universidad Estadual Paulista.

Castañeda, C., & Parra, F. (2013). *Arquímedes, Matemáticas y máquinas simples, Tesis de especialización Universidad Pedagógica Nacional.* Bogotá.

Castro, I. (2007). *Un paseo por lo infinito:el infinito en Matemáticas.* Bogotá: Potificia Universidad Javeriana.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (1994). *Introduction:entering the field of qualitative.* California: Sage.

Duran, A. (2000). *El legado de las Matemáticas.* Sevilla: Consejería de Cultura.

Estrada, W. (2008). De la generación espontánea de las fórmulas de volumen a su construcción. *Memorias XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética* (págs. 167-181). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Estrada, W., & Castiblanco, M. (2009). Construcción de actividades basadas en los acercamientos de la civilización china a la noción de aproximación. *10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Pasto.

Fauvel, J. (., & Maanen, J. (. (2002). *History in Mathematics Education ICME study.* New York: Kluwer Academic Publishers.

Fauvel, J. (1991). *Using history in mathematics education* (Vol. 11). For the learning of mathematics.

Fauvel, J., & Keynes, M. (1997). The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learnig of Mathematics. *Mathematics in School, 26*(3), 10-11.

Fauvel, J., & Maanen, J. (1997). The role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning. *Educational Studies in Mathematics*.

Fauvel, J., & Maanen, V. (1991). Storia e didattica della matemática. *Lettera Prsitem, 23*, 8-13.

Fernández, S. (2001). La historia de las matemáticas en el aula. *Uno Revista de didáctica de las matemáticas, 26*, 9-28.

Figueiras, L. (2003). *Historia, matemáticas y realidad. El caso de la medida en la formación matemática de futuros maestros. Tesis de Doctorado Universidad Autonoma de Barcelona.*

Godino, J., Batanero, C., & Roa, R. (2003). *La medida de magnitudes y su didáctica para maestros.* Granada: Universidad de Granada.

Gómez, M. (2011). *Pensamiento geometrico y métrico en las pruebas nacionales. Tesis de Maestía Universidad Nacional de Colombia.* Colombia.

González, P. (1993). *El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes.* Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña.

Gonzalez, P. (Febrero de 2004). La historia de las matemáticas como recurso e instrumento para enriquecer cultualmente la enseñanza. *Revista Suma*(45), 17-28.

Guacaneme, E., Angel, J., & Bello, J. (2013). Una experiencia de formación en "Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas". *I CEMACYC,* República Dominicana.

Guevara, C. (2005). *Historia de los instrumentos matemáticos en Falconi M (ed).* Mexico, D.F: Universidad Nacional Autónoma de México.

Heat, T. (1921). *A History of Greek Mathematics.* Oxford: Humphrey.

Heiberg, J. (1909). *Geometrical Solutions Derived from Mechanics.* Chicago: Trubner & CO.

Herrera, R. (2007). *Arquímedes, Alrededor del circulo.* Nivola.

Jankavist, U. (1997). A categorization of the "Whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 235-261.

L.A.C.E, G. (1999). *Introducción al estudio de caso.* Cädiz: Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Cádiz.

Lewin, K. (1973). *Action research and minority problems.* London: Souvenir Press.

M.E.N. (2002). Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matematicas. *Memorias del Seminario Nacional.* Bogotá.

Medina, M. (1985). *De la techne a la tecnología.* Valencia: Tirant to blanch.

Miralles, L., & Deulofeu, j. (2005). Historia y enseñanza de la matemática. Aproximaciones de las raíces cuadradas. *Educación Matemática, 17*(1), 87-106.

Montesinos, J. (2003). *Symposium Arquímedes* (Vol. 239). Max-Plnack-Ins.

Nobel, W., & Franco, D. (2013). No es lo que parece de perímertros y volúmenes. *VII CIBEM*, Montevideo.

Olave, M. (2005). *Estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al calculo del area bajo la curva (Tesis de Maestría).*

Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos de bachillerato. *Investigación en Educación Matemática XIV*, 557-568.

Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en Educación.* Madrid: Mc Graw Hill.

Sherman, S. (1999). *Archimedes, what did he do besides cry eureka?* Washinton: Association of America.

Sienra, G. (1983). *El método de Arquímedes.* México: Dianoia.

Souza, H. (2012). Velhos Conceitos Aliados a novas tecnologias. *Actas de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra*, Montevideo.

Souza, H., Santos, R., & Souza, A. (2012). Velhos conceitos aliados a novas tecnologias: geogebra e o cálculo de um círculo". *Actas de la conferencia Latinoamericana de Geogebra* Montevideo: Anep.

Strauss, L., & Corbin, M. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* Medellin: Universidad de Antioquia.

Torres, A. (2010). *The ilustrated Method of Archimedes.* Montreal: Apeiron.

Triana, A., & Manrique, J. (2013). *El papel de la historia del Algebra en un curso de didáctica para la formación inicial de profesores de matemáticas, Tesis de Maestria Universidad Pedagogica Nacional.* Bogotá.

Vega, L. (1986). *El método.* Madrid: Alianza.

Yuste, L. (2009). Reflexiones sobre la Geometría Griega. *Éndoxa:series filosóficas*, 57.