

**Sobre la interpretación y uso de la letra como número generalizado en tareas y actividades
sobre generalización de patrones: reporte de una experiencia con estudiantes de grado
octavo
(13 - 15 años)**

John Edward Forigua Parra

Diego Alejandro Velandia Silva

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación

Bogotá D.C, Agosto de 2015

Sobre la interpretación y uso de la letra como número generalizado en tareas y actividades sobre generalización de patrones: reporte de una experiencia con estudiantes de grado octavo (13 - 15 años)

John Edward Forigua Parra

Diego Alejandro Velandia Silva

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Magíster en educación

Director

Rodolfo Vergel Causado

Doctor en Educación

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación

Bogotá D.C, Agosto de 2015

“La Universidad no será responsable de las ideas expuestas por los graduandos en el trabajo de grado”.

Nota de aceptación

Jurado

Jurado

Bogotá D.C., Agosto de 2015

Dedicatoria

A Dios, por sus bendiciones y permitirme alcanzar una meta más en mi formación.

A mi madre, quien siempre ha estado presente brindándome su apoyo y comprensión.

A mi hija Paula Daniela, quien representa el motor de mi vida.

John Edward

A Dios, por brindarme la oportunidad de seguir creciendo.

A mis padres, quienes siempre están presentes con su ayuda incondicional.

A María Alejandra, por su apoyo y comprensión.

Diego Alejandro

Agradecimientos

Al profesor Rodolfo Vergel, por sus enseñanzas, su disposición, sus orientaciones y críticas permanentes que posibilitaron culminar exitosamente este estudio.

Al profesor Pedro J. Rojas, por compartirnos sus conocimientos y sus orientaciones permanentes para clarificar ideas en torno al estudio.

A todas las personas que de una u otra forma con su apoyo, acompañamiento, asesorías y colaboración hicieron posible este trabajo.

“El lenguaje del medio ambiente, con sus significaciones estables y constantes, señala la dirección que seguirá la generalización del niño. ... El adulto no puede transmitir al niño su modo de pensar, sólo puede suministrarle el significado ya hecho de una palabra” alrededor de la cual “éste piensa según el modo las peculiaridades estructurales, funcionales y genéticas propias a su estadio de desarrollo conceptual.”

Vygotski (1934/1985)

Tabla de contenido

Introducción	1
Capítulo 1. La investigación.....	4
1.1 Justificación y elementos problemáticos del estudio	4
1.2 Pregunta orientadora del estudio	8
1.3 Objetivos del estudio.....	9
1.3.1 Objetivo general	9
1.3.2 Objetivos específicos.....	9
1.4 Antecedentes del estudio	9
Capítulo 2. Referentes teóricos	16
Capítulo 3. Referentes metodológicos y diseño del estudio.....	27
3.1 Referentes metodológicos	27
3.2 Diseño del estudio	31
3.2.1 Fase de pilotaje.....	34
3.2.2 Diseño y justificación de las tareas	37
3.2.2.1 Tarea 1: Identidad.....	39
3.2.2.2 Tarea 2: Identidad-perímetro.....	39
3.2.2.3 Tarea 3: Cuadros - impares	40
3.2.2.4 Tarea 4: Triángulos - potenciación.....	42
3.2.2.5 Tarea 5: Baldosas- potenciación - área.....	43
3.2.2.6 Tarea 6: Puntos - producto	44
3.2.2.7 Tarea 7: Triángulos -área	46

3.2.3 Sistematización y clasificación de la información	48
Capítulo 4. Análisis de la información	53
4.1 Análisis de la información.....	56
4.1.1 Tarea 1: Identidad.....	57
4.1.2 Tarea 2: Identidad -perímetro.....	60
4.1.3 Tarea de los sobres	64
4.1.4 Tarea 3: Cuadros -impares	68
4.1.5 Tarea 4: Triángulos -potenciación.....	70
4.1.6 Tarea 5: Baldosas- potenciación - área.....	73
4.1.7 Tarea 6: Puntos - producto	76
4.1.8 Tarea 7: Triángulos - área	79
Capítulo 5. Conclusiones y Reflexiones	86
5.1 Respuesta a la pregunta del estudio.....	86
5.2 Reflexiones y observaciones finales.....	92
Bibliografía.....	95
Anexo A. Producciones de los estudiantes	101

Índice de Figuras y Anexos

Figura 1. Prueba diagnóstico.....	35
Figura 2. Número de respuestas de los estudiantes en cada nivel.....	35
Figura 3. Porcentaje del número de respuestas de los estudiantes en cada nivel	36
Figura 4. Respuestas de algunos estudiantes a los ítems de la prueba diagnóstico.....	36
Figura 5. Tarea 1: Identidad	39
Figura 6. Tarea 2: Identidad - perímetro	39
Figura 7. Tarea 3: Cuadros - impares.....	40
Figura 8. Tarea 4: Triángulos - potenciación	42
Figura 9. Tarea 5: Baldosas – potenciación - área	43
Figura 10. Tarea 6: Puntos - producto.....	44
Figura 11. Tarea 7: Triángulos - área.....	46
Figura 12. Matriz de correlación de las respuestas de los estudiantes en la prueba diagnóstico ..	50
Figura 13. Ejemplo de la matriz de correlación de las respuestas de los estudiantes en cada una de tareas.....	52
Figura 14. Análisis Tarea 1: Identidad	57
Figura 15. Representación 1 de producción E12 – T1	59
Figura 16. Representación 2 de producción E12 – T1	59
Figura 17. Representación 1 de producción E14 – T1	60
Figura 18. Análisis Tarea 2: Identidad - perímetro.....	60
Figura 19. Representación 1 de producción E10 – T2	61
Figura 20. Representación 1 de producción E12 – T2	62

Figura 21. Representación 2 de producción E12 – T2	62
Figura 22. Representación 3 de producción E12 – T2	62
Figura 23. Representación 1 de producción E14 – T2	63
Figura 24. Análisis Tarea de los sobres.....	64
Figura 25. Representación 1 de producción E2 – Tarea de los sobres.....	65
Figura 26. Representación 1 de producción E12 – Tarea de los sobres.....	65
Figura 27. Representación 1 de producción E16 – Tarea de los sobres.....	66
Figura 28. Representación 2 de producción E16 – Tarea de los sobres.....	67
Figura 29. Representación de producción E6 – T5	68
Figura 30. Análisis Tarea 3: Cuadros - impares.....	68
Figura 31. Representación 1 de producción E10 – T3	70
Figura 32. Análisis Tarea 4: Triángulos -potenciación.....	71
Figura 33. Representación 1 de producción E12 – T4.....	70
Figura 34. Análisis Tarea 5: Baldosas - potenciación.....	73
Figura 35. Representación 1 de producción E12 – T5	75
Figura 36. Representación 1 de producción E13 – T5	76
Figura 37. Análisis Tarea 6: Punto -producto	77
Figura 38. Representación 1 de producción E12 – T6	78
Figura 39. Análisis Tarea 7: Triángulos - área.....	79
Figura 40. Representación 1 de producción E12 – T7	80
Figura 41. Representación 1 de producción E19 – T7	81
Figura 42. Gráfico porcentual de respuestas relacionando etapas y niveles	83
Figura 43. Gráfico porcentual general de las producciones	84
Figura 44. Representación del desarrollo en las producciones	85
Anexo A. Producciones de los estudiantes.....	101

Introducción

La idea de identificar y describir un desarrollo conceptual o del pensamiento (Vygotski, 1929, 1989) sobre cómo los estudiantes interpretan y hacen uso de la letra cuando, en el ámbito escolar, resuelven tareas sobre generalización de patrones, a la vez que en esta actividad matemática se hace necesario usar representaciones semióticas, se constituye en un tema de interés por parte de la comunidad de investigadores en educación matemática, específicamente de aquellos investigadores dedicados a la didáctica del álgebra (ver, por ejemplo, Gallardo & Rojano, 1988; Kieran & Filloy, 1989; Medina, 1998; Rojas & Vergel, 2013; Vergel, 2014a, Vergel, 2014b). En particular Vergel (2014b) sugiere que una de las formas de introducir el álgebra en la escuela es a través del trabajo sobre generalización de patrones.

En este sentido, asumimos como un problema didáctico el desarrollo del pensamiento, enfocado en el contexto de la interpretación de la letra desde la teoría de Küchemann (1981), en el cual los alumnos expresan sus generalizaciones; aclarando que estas se producen por parte de los estudiantes y podrían no ser necesariamente tan sofisticadas¹.

La idea de representación semiótica, o, en términos vygotskianos, la idea de signo es clave para entender los procesos de desarrollo conceptual. En este sentido, el signo cumple el papel de una operación significativa. Así como lo asegura Vergel (2014b), los signos *no se limitan únicamente a su función representativa*, la elección de ellos no es neutra o independiente y dicha elección orienta el destino en el cual se expresa el pensamiento, el destino de la comunicación.

De esta manera, el propósito de esta investigación es identificar y describir un desarrollo conceptual, en términos de Vygotski, de cómo los estudiantes de grado octavo de Educación Básica Secundaria (13 – 15 años) interpretan y hacen uso de la letra, específicamente cuando se enfrentan a tareas sobre generalización de patrones.

¹ Entendiendo lo sofisticado como expresiones en términos de signos alfanuméricos, Vergel (2014).

Respecto al desarrollo, Vergel (2014b), con base en los planteamientos de Vygotski, afirma que éste es considerado en términos de saltos revolucionarios fundamentales más que en términos de incrementos cuantitativos constantes, y concluye que “la creencia en el método genético, de acuerdo con Vygotski, significa que el pensamiento se puede desarrollar” (p. 42), además que la idea de desarrollo, lejos de ser ingenua desde los planteamientos de Vygotski, cobra especial relevancia en su teoría del desarrollo genético. Así mismo, en términos de Wertsch (1985/1988), el desarrollo se define en términos de aparición y transformación de las diversas formas de mediación y su noción de interacción y señala que su relación con los procesos psicológicos superiores, por ejemplo el de generalización, implica necesariamente los mecanismos semióticos.

Entonces, estamos interesados en analizar los instrumentos de mediación semiótica o signos que los estudiantes movilizan y cómo estos se vuelven cada vez más sofisticados. De hecho, si compartimos con Vergel (2014b) que las funciones psicológicas culturales “superiores” aparecen bajo la influencia de los instrumentos simbólicos o semióticos, entonces podemos estudiar el desarrollo conceptual de los estudiantes, así sea en cortos periodos de tiempo, a través del análisis de los signos o instrumentos de mediación semiótica que ellos utilizan como medios de expresión de sus producciones matemáticas, en este caso, producciones sobre el uso y la interpretación de la letra como número generalizado. El trabajo lo hemos dividido en cinco capítulos. En el primero de ellos exponemos el planteamiento de nuestro problema de investigación, en el cual exponemos la pregunta de investigación ligada a una justificación conceptual y los objetivos asociados a ésta.

En este sentido, la pregunta que orienta el estudio es: *¿Qué proceso de desarrollo de pensamiento se evidencia en estudiantes de grado octavo al resolver tareas sobre generalización de patrones que exijan la interpretación y uso de la letra como número generalizado?* Seguidamente abordamos los antecedentes de nuestro estudio, teniendo en cuenta las dificultades en el desarrollo del pensamiento y además aspectos sobre el proceso de generalización en la didáctica de las matemáticas.

El segundo capítulo lo destinamos a presentar los referentes teóricos que fundamentan la investigación. Así pues, los elementos teóricos se centrarán en la interpretación y uso que se hace de la letra desde la teoría de Küchemann (1981), relacionados con los niveles de comprensión establecidos por Collis (1975), consideraciones prácticas sobre patrones para el trabajo en la

transición aritmética–álgebra con base en Pretexto (1996/1999) y sobre los niveles en la generalización de patrones desarrollados por Azarquiel (1993), en tanto proponen elementos que deben ser abordados desde el trabajo aritmético y que permiten un tránsito más natural hacia el trabajo algebraico, lo que sugiere un desarrollo en el proceso de generalización.

Seguidamente, en el Capítulo 3 proponemos los referentes metodológicos y el diseño de la investigación, en el cual presentamos la caracterización de la población, así como la fase inicial o de pilotaje, el diseño y la justificación de las tareas propuestas. Para finalizar el capítulo se muestran los procesos de recolección, sistematización y clasificación de la información. Posteriormente, exponemos los elementos relacionados con la constitución de los datos y la descripción de cómo se hizo el análisis de los mismos.

En el capítulo 4 presentamos la sistematización y el análisis de las producciones de nuestros estudiantes con respecto a las siete tareas propuestas sobre generalización de patrones, enfocándonos en la información acerca del uso e interpretación que le daban a la letra en cada una de ellas y así llegar a pronunciamientos sobre su proceso de desarrollo conceptual o del pensamiento.

Finalmente, en el Capítulo 5 exponemos a manera de conclusiones los resultados de nuestro estudio, obtenidos del análisis de los datos, así como algunas reflexiones finales que se derivan de este trabajo.

Capítulo 1

La Investigación

1.1 Justificación y elementos problemáticos del estudio

Partiendo de la idea de Sierspiska (1993, citado por Medina, 1999) quienes sugieren que en las investigaciones relativas a educación matemática se debe profundizar entre otras, en las situaciones de enseñanza/aprendizaje y la realidad de las clases de Matemáticas, es de gran importancia para nosotros en particular, la investigación sobre el desarrollo de las habilidades de generalización de patrones matemáticos dentro del ejercicio escolar, relevancia que debe ser explorada con mayor interés por los docentes, debido a que el trabajo con este tipo de regularidades y su generalización están ausentes en gran parte del currículo escolar, aun cuando el MEN (2006) sugiere abordar la idea de pensamiento variacional como el estudio de la variación y el cambio, las regularidades y la detección de los criterios que las rigen o las reglas de formación de patrones que se repiten periódicamente.

En este sentido, el interés por investigar sobre el desarrollo conceptual y del pensamiento de los estudiantes que inician el aprendizaje del álgebra ha llevado a muchos a analizar las interrelaciones del lenguaje algebraico con el lenguaje natural y con el de la aritmética, es así que un buen número de investigaciones realizadas a partir de los años 1980 dan cuenta de las maneras en que el arraigo al pensamiento numérico y a los significados coloquiales de las palabras permea la interpretación y uso de las letras y las expresiones algebraicas en las etapas iniciales del aprendizaje del álgebra (Sandoval, Ruvalcaba & González, 2010).

Por otra parte, los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) del año 2000, estipulan que el álgebra se aprende mejor al ser considerada como un conjunto de técnicas y conceptos ligados a la representación de relaciones cuantitativas y como una clase de pensamiento matemático para formalizar patrones, funciones y generalizaciones (NCTM, 2000). En iguales términos, Amit (2008, citado por Sandoval et al., 2010) plantea que tanto como

proceso y como producto de la educación matemática, la generalización tiene méritos e importancia como un objetivo instruccional en sí, sin embargo, esta puede también servir como un medio para construir nuevo conocimiento, actuando como un iniciador para futuro aprendizaje en el álgebra.

De esta manera, son numerosos los investigadores que señalan el desarrollo de las habilidades en la generalización de patrones como el preámbulo necesario para el estudio del álgebra. Siguiendo con Sandoval et al (2010), cuando los estudiantes exploran patrones, se dedican a detectar similitudes y diferencias, clasificar, etiquetar, buscar algoritmos, conjeturar, argumentar, establecer relaciones numéricas entre componentes o bien, a generalizar los datos y relaciones matemáticas, desarrollan habilidades que son fundamentales para el aprendizaje del álgebra.

El trabajar con patrones proporciona a los estudiantes la oportunidad de observar y verbalizar sus generalizaciones y de registrarlas simbólicamente conformando una útil y concreta base para la manipulación simbólica (English & Warren 1998, citado por Sandoval et al., 2010).

Teniendo en cuenta estas consideraciones, parte de nuestro interés radica en la búsqueda de situaciones de aprendizaje que puedan ayudar a los estudiantes a superar la multiplicidad de dificultades que enfrentan cuando empiezan su transición de la aritmética al álgebra en donde aparece el lenguaje algebraico al que no le “ven” sentido y que les lleva a asignar valores numéricos a las letras o a la sobre-generalización de ciertas propiedades (Castro, 2012). En este sentido, la principal crítica que se hace a este acercamiento es que introduce al niño a un simbolismo desprovisto de significado, ignorando que viene de trabajar con la aritmética, donde los símbolos se relacionan con diversas fuentes de significado y los contextos de los problemas determinan mucho la manera de resolverlos.

A partir de estas dificultades se han llevado a cabo diversos estudios; por ejemplo, Mason, Graham, Pimm & Gower (1985) proponen cuatro etapas para la enseñanza del álgebra; Castro, Rico & Castro (1995) mencionan que la identificación de patrones en diferentes contextos es vital para la enseñanza de las matemáticas. Alonso (1996) citado por Butto (2005), argumenta que una de las dificultades de los estudiantes con los procesos de generalización es encontrar términos

generales y llegar a una expresión simbólica; por ello se debe desarrollar o guiar a los estudiantes a visualizar las semejanzas o similitudes en los problemas planteados. De la misma manera, Zarzar (2011) citando a Durán Ponce (1999), plantea que el trabajo con patrones se puede lograr con procedimientos recurrentes y la interacción entre iguales y a Reggiani (1994), quien afirma que la generalización es la base para el desarrollo de un pensamiento algebraico.

La justificación para estudiar aspectos relacionales del álgebra, en palabras de Vega (2014) puede hacerse desde recomendaciones curriculares como la que plantea el NCTM (2000) en el estándar para la educación matemática para la etapa 6-8: “iniciar la comprensión conceptual de los diferentes usos de las variables, explorar relaciones entre expresiones simbólicas y, reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas sencillas”. Se señala que “los alumnos de los niveles medios deberían aprender el álgebra como un conjunto de conceptos y habilidades referentes a la representación de relaciones cuantitativas, y como una forma de pensamiento matemático para formalizar patrones, funciones y generalizaciones (...). Y aprender a reconocer y generar expresiones equivalentes”. En consecuencia, siguiendo con Vega (2014), debe tenerse presente una de las premisas planteadas por el NCTM (2000) en la que se señala que “Los alumnos deberían ser capaces de operar con soltura con expresiones algebraicas, de combinarlas y de cambiar su forma. Estas destrezas constituyen la base de la habilidad para hallar las soluciones de una ecuación, un objetivo que siempre ha sido central en el currículo de Álgebra”.

No obstante, es un hecho que el aprendizaje del álgebra continua siendo una dificultad para los estudiantes y en algunos casos, esta dificultad se debe en parte a que esa transición se realiza de manera lineal y no genera en los estudiantes una conceptualización matemática. La investigación en didáctica del álgebra, muestra resultados que acceder al álgebra a través de los procesos de generalización puede ser una ruta viable para acceder al pensamiento algebraico.

Es así, que al tener en cuenta todos los aspectos mencionados anteriormente, consideramos el acercamiento al álgebra y en ella la generalización, resaltando la capacidad de desarrollar en los estudiantes la posibilidad de percibir un patrón, así como la capacidad para comunicarlo y expresarlo en un lenguaje algebraico. Dado que, al estimular la habilidad de expresar generalidades, los estudiantes aprenden a ver lo general en lo particular y viceversa. Según

Mason et al. (1985), la generalidad es fundamental para acceder al álgebra de una manera significativa y construir su conocimiento.

En la iniciación al álgebra escolar son varios los problemas que pueden presentarse y que según Kieran (1989), citado por Pretexto (1996/1999) estarían relacionados el cambio de convenciones respecto del referente aritmético, la interpretación de las letras y el reconocimiento y uso de estructuras. En este sentido, los conceptos o nociones que están en la base de la aritmética poseen una dificultad conceptual importante provocando, de manera natural, dificultades tanto para su enseñanza como para su aprendizaje, que se manifiestan generación tras generación y que pueden permanecer en él si no se lleva a cabo un trabajo para superarla, lo cual, como especulación estimable, puede ser una de las razones para la actitud displicente de los estudiantes para con las matemáticas.

Por tanto, en concordancia con Pretexto (1996/1999), se considera una necesidad promover actividades que busquen el desarrollo del pensamiento que permitan provisionar a los estudiantes de herramientas e ideas propias que les sean útiles a largo plazo y en diversos contextos, que les permitan comprender las distintas concepciones del álgebra, desde diferentes enfoques, como aritmética generalizada, como lenguaje, como el estudio de métodos para la resolución de problemas, como el estudio de relaciones entre cantidades, como el estudio de estructuras y relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones, tal y como lo han trabajado autores como Kaput (1998, 2000), Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara-Roth y & otros (2003), Usiskin (1988), Bednarz, Kieran & Lee (1996) y Drijvers & Hendrikus (2003).

En este sentido, se asumirá como un problema didáctico el desarrollo del pensamiento en el contexto de la interpretación de la letra desde la teoría de Küchemann (1981) en las cuales los alumnos expresan sus generalizaciones permitiéndole experiencias matemáticas empíricas, en tanto el estudiante se enfrentará a una primera tarea sobre patrones, solamente valiéndose de su experiencia (poca o mucha) con este tipo de situaciones y a partir de este primer momento, cada

vez que avance, las tareas anteriores empezarán a hacer parte de su experiencia y a medida que manipula cada instrumento, construye cada expresión, la estudia y la refina para lograr una mejor. Así, estará vivenciando un nuevo tipo de experiencias, a las que Vasco (2013) denomina “Experiencia interna”.

A partir de esta posición, sobre las categorías de comprensión de la letra y la interpretación del concepto de letra como número generalizado a partir de una secuencia de tareas sobre patrones figurales, se analizarán las generalizaciones que producen los estudiantes sobre las tareas, las cuales no necesariamente llegarán a ser en términos de signos alfanuméricos, y cómo éstas se desarrollan dentro de una serie de actividades de enseñanza y aprendizaje en el contexto de tareas sobre generalización de patrones.

1.2 Pregunta orientadora del estudio

Una de las mayores dificultades con que se encuentra un alumno al iniciar los estudios formales está en el uso y significado de las letras. Esto lleva a pensar que las dificultades del álgebra se deben a la naturaleza abstracta de sus elementos (Azarquiél, 1993).

Así pues, inicialmente los alumnos en su trabajo pueden situarse en alguno de los tres niveles propuestos por Collis (1975, citado por Azarquiél, 1993): los de nivel más bajo tienden a sustituir un número concreto por una letra y si no funciona, abandonan. En el segundo nivel, lo intentan con varios números, utilizando un método de ensayo y error. Después, los alumnos ya han obtenido el concepto de número generalizado expresándolo con un símbolo, que se puede ver como una entidad en sí misma, que tiene las mismas propiedades que cualquier número, y los números tienen un significado concreto debido a las experiencias previas que se han tenido con ellas.

De esta manera, el propósito de este estudio es identificar y describir un desarrollo conceptual, en términos de Vygotski, de cómo los estudiantes interpretan y hacen uso de la letra cuando se resuelven tareas sobre generalización de patrones.

En este sentido, apoyados en los planteamientos vygotskianos sobre desarrollo y centrados en su relación con aspectos teóricos basados en los trabajos realizados por Küchemann, se pretende aportar elementos de respuesta a la pregunta *¿Qué proceso de desarrollo de pensamiento se evidencia en estudiantes de grado octavo al resolver tareas sobre generalización de patrones que exijan la interpretación y uso de la letra como número generalizado?*

1.3 Objetivos del estudio

1.3.1 Objetivo general

Describir y analizar el proceso de desarrollo de pensamiento en estudiantes de grado octavo al resolver tareas sobre generalización de patrones que exijan la interpretación y uso de la letra como número generalizado.

1.3.2 Objetivos específicos

- Identificar tareas sobre generalización de patrones, adaptarlas para estudiantes de grado octavo, que exijan en su solución la interpretación y uso de la letra como número generalizado, y describir sus producciones matemáticas
- Analizar en las producciones de los estudiantes, con respecto a las tareas implementadas, características de la interpretación y uso de la letra como número generalizado.
- Explorar, en el contexto de la actividad matemática de los estudiantes, relaciones entre las características de la interpretación y uso de la letra como número generalizado y el desarrollo de pensamiento.

1.4 Antecedentes del estudio

El pensamiento algebraico como línea de estudio en investigación en Didáctica de las Matemáticas se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos algebraicos en el Sistema Educativo y en el medio social (Socas, Camacho, Palarea &

Hernandez 1996). En este sentido, referenciado desde su artículo “Perspectivas De Investigación En Pensamiento Algebraico”, las investigaciones sobre las letras con significado algebraico (variables) están documentadas en trabajos como Wagner & Kieran (1989), Kieran & Filloy (1989), Socas et al (1996), Kieran (1992), Rojano (1994), Bednarz, Kieran, & Lee (1996), Palarea (1998).

Así mismo, durante las dos últimas décadas, un gran número de proyectos de investigación ha identificado dificultades en el dominio algebraico. Warren (1993) presenta una investigación sobre el desarrollo de la comprensión de las variables y la manipulación de símbolos. En su estudio, refiere los trabajos sobre las investigaciones en el dominio algebraico y dificultades con el concepto de variables (Booth, 1988; Küchemann, 1981; Usiskin, 1988), la concatenación de expresiones algebraicas (Chalouh & Herscovics , 1988), la naturaleza cambiante del signo igual (Davis , 1989 y Kieran , 1989), la manipulación de símbolos (Wheeler, 1989), e incluye un nuevo enfoque utilizando patrones (Bennet 1988).

Kieran & Filloy (1989) referencian las interpretaciones que se asignan a las letras, en las que Küchemann (1981), usando una clasificación desarrollada originalmente por Collis (1975), encontró que la mayoría de los estudiantes trataban las letras como incógnitas específicas más que como números generalizados o como variables. Se describen también contribuciones sobre los procesos cognitivos en el aprendizaje del álgebra entre las que se destaca el Marco Aritmético de Referencia.

Rivière (1990) presenta un estudio sobre problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva cognitiva a partir de los resultados de Krutetzki (1968) sobre cuatro tipos de alumnos según su capacidad de generalización.

Sobre aproximaciones al concepto de variable Mena & Moreno (1997) abordan el significado de la letra como representación de una variable en una expresión algebraica, por medio de un análisis acerca de errores y dificultades que presentan los estudiantes al resolver situaciones que involucran la letra como variable.

Domínguez, Socas & Machín (1998), presentan un análisis didáctico del lenguaje algebraico a partir de la contextualización del currículo, los contenidos del álgebra, los sistemas de representación semióticos, los materiales y los recursos, las dificultades, obstáculos y errores, así como los modos y situaciones de enseñanza, enmarcando su trabajo en el campo de estudio que analiza el paso de la aritmética al álgebra, especialmente en las generalizaciones de patrones.

Medina (1999) presenta una síntesis de su investigación sobre lenguaje algebraico y detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años, elaborando una propuesta para la enseñanza/aprendizaje del álgebra en el primer ciclo de secundaria. Sobre la introducción del razonamiento algebraico en educación primaria, Godino, Castro & Wilhelmi (2012) proponen una manera de concebir el razonamiento algebraico desde un enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático basando la práctica algebraica, en la intervención de procesos de generalización y simbolización, junto con otros objetos.

Del Puerto & Minnaard (2004) presentan un proyecto cuyo objetivo es tratar de responder preguntas sobre qué tipo de errores algebraicos cometen con frecuencia los alumnos de últimos años de escuela media. En esta misma línea de investigación; Ruano, Socas & Palarea (2008) presentan un estudio sobre tres procesos específicos del lenguaje algebraico y realizan una clasificación de los errores cometidos, analizando sus posibles orígenes y formulando algunas consecuencias didácticas que se derivan de estos resultados. Se encuentran también los resultados relacionados con los procesos cognitivos integrados en el aprendizaje del álgebra (Palarea, 1998). En 2007, Socas presenta resultados de investigaciones en torno a las dificultades y errores en la construcción del lenguaje algebraico, tomando en consideración el enfoque lógico semiótico (ELOS).

Malisani (1999) presenta un estudio sobre la construcción del lenguaje algebraico, relacionando obstáculos con ciertas dificultades que se evidencian en el aprendizaje de este conocimiento.

En cuanto al desarrollo del simbolismo algebraico, Socas (1999) referencia los trabajos de Charbonneau (1996), Puig (1994,96), Radford (1996), Fernández (1997); así como investigaciones que establecen la diferencia entre el pensamiento aritmético y el algebraico en

Küchemann (1981); Booth (1984) y Kieran (1992), además de trabajos en donde las letras constituyen entes pertenecientes a estructuras algebraicas en Mason et al. (1985) y Usiskin (1988).

Por su parte, Castro et al. (1995) presentan una visión sobre los modelos como instrumentos mentales para la comprensión de las estructuras de la realidad y la manipulación de símbolos para conectar ideas y pensar sobre los conceptos que representan, resaltando la importancia del uso de patrones en la enseñanza escolar.

Becker & Rivera (2005) presentan un estudio sobre generalizaciones en una tarea que implica patrones lineales; indagando sobre estrategias utilizadas, uso de señales visuales y numéricas y representación de patrones. Referencian a Küchemann (1981) destacando la asociación de letras como representantes de valores particulares y además un estudio de Stacey & Macgregor (2000) sobre una caracterización del pensamiento matemático en tareas que implican la formulación de patrones.

Igualmente, a nivel nacional encontramos investigaciones como la de Castellanos & Obando (2009) sobre clasificación de dificultades y errores en procesos de representación en la generalización y el razonamiento algebraico.

Pretexto (1996/1999) presenta algunas consideraciones sobre dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, interpretaciones de la letra en contextos algebraicos, elementos a tener en cuenta en el diseño de actividades en el aula y consideraciones en torno a la comunicación en la matemática escolar.

A propósito de la caracterización de la variable en matemáticas, Pretexto (1996/1999) toma como referente los trabajos de Küchemann (1978, 1980 y 1981) planteando elementos para el trabajo en el aula y se proponen algunas actividades que, en el contexto de resolución de problemas, posibilitarían tanto procesos de generalización y simbolización, como aproximaciones a la interpretación de letra como número generalizado y como variable.

Fillooy, Puig & Rojano (2008) presentan un ejemplo de análisis en la resolución algebraica haciendo hincapié en la perspectiva semiótica del álgebra educativa y hacen referencia a las investigaciones sobre los sistemas matemáticos de signos, la interpretación y uso de las letras y de las expresiones algebraicas en las etapas iniciales del aprendizaje del álgebra.

Reyes & Mosquera (2011) presentan un informe de su investigación sobre cómo desarrollar nuevas metodologías para fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática por medio de actividades sobre patrones.

Luego, con referencia al trabajo en el aula, Rojas (2010) referenciando a Kieran (1989), alude a problemas asociados con la iniciación al álgebra escolar y cita a Pretexto (1996) proponiendo una caracterización de la noción de variable, la existencia de un camino natural relacionando la jerarquización de las posibles interpretaciones de las letras en contextos algebraicos y la caracterización de variable y tres invariantes para la construcción de objetos matemáticos.

Mason et al. (1985), también en este mismo ámbito, describen aspectos metodológicos en una propuesta para el trabajo de aula, enfocados en la transición entre el trabajo con números y la generalización del álgebra, presentando un conjunto de actividades y reflexiones vislumbrando así unas rutas hacia el álgebra.

Otro referente importante para el trabajo en el aula lo encontramos en el grupo Azarquiel (1993) quienes recogen problemas que plantean la iniciación al lenguaje algebraico abordando el simbolismo, la generalización y las destrezas, proponiendo abundantes actividades e ideas para enseñar álgebra.

Ursini & Trigueros, reseñadas por Lozano (2005) proponen un enfoque para la enseñanza del álgebra elemental por medio del modelo “3uv” (3 Usos de la Variable) tomando en consideración las múltiples formas de uso de la variable en el álgebra elemental. Con relación a dicho modelo, López & López (2011) coinciden con Ursini & Trigueros y proponen el modelo en álgebra temprana referenciando además los trabajos de (Bastable & Schifter, 2007; Carraher &

Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000), mostrando en su propuesta el trabajo sobre la observación de patrones.

Olfos & Villagrán (2001) exponen algunas ideas con respecto a los juegos y cómo estos se relacionan con la matemática, focalizándose en la relación entre los juegos, la resolución de problemas y la enseñanza del álgebra elemental. Olfos, Soto & Silva (2007), destacan la baja calidad la enseñanza del algebra elemental y describen la preparación y conducción de actividades de clases que favorecen el funcionamiento de un pensamiento de orden superior realizando la categorización de unos niveles.

Godino & Font (2004) describen los estadios en la comprensión de las variables y las dificultades que tienen los alumnos en el uso de estas, derivadas de su comprensión sobre el signo igual y algunas dificultades de aprendizaje, incluyendo posteriormente situaciones utilizables en primaria para el desarrollo del razonamiento pre-algebraico en las que se incluye la comprensión de patrones como un contexto adecuado para el inicio del razonamiento algebraico.

En trabajos publicados a niveles de especialización, maestría y doctorado se encuentran, entre otros, por ejemplo Andrade (1998) quien expone algunas dificultades de comprensión sobre variación en estudiantes de octavo grado en el aprendizaje del álgebra, específicamente en la interpretación de la letra como variable. Peral & Gómez (2003) estudian algunas dificultades desde la multiplicidad de usos que se dan a la variable y diseñan una didáctica orientada a la enseñanza del concepto. Trujillo (2008) desarrolla su investigación sobre los procesos cognitivos de los estudiantes en las dificultades que presentan en el aprendizaje del álgebra soportada por los trabajos de Encarnación Castro sobre la generalización a la que llegan los alumnos al trabajar sobre patrones utilizando tres tipos de representaciones diferentes.

Rojas (2009) plantea estrategias didácticas para la comprensión del concepto de variable en la resolución de problemas. Duarte et al (2010) exponen un “Estudio De Caso sobre Un Acercamiento A La Variable En Relación Funcional En Estudiantes Del Tercer Ciclo De Escolaridad” mediante la implementación de actividades basadas en el grupo Azarquiel (1993), partiendo de las diferentes interpretaciones y usos de la letra propuestos por Küchemann (1981).

Páez (2011) hace una descripción de los sistemas numéricos de la antigüedad analizando su transición de la aritmética al álgebra y presenta una propuesta didáctica para facilitar el paso natural después de la aritmética. González (2012) plantea una propuesta didáctica centrada en potenciar en los estudiantes los diferentes usos e interpretaciones de la variable a través de procesos de generalización en contextos geométricos y numéricos. Merino (2013) presenta parte de una investigación, indagando sobre estrategias y representaciones utilizadas al abordar tareas de generalización observando el uso de diferentes patrones como estrategia más frecuente.

Capítulo 2

Referentes Teóricos

Ciertas particularidades del razonamiento algebraico que se pueden desarrollar por parte de los niños son aquellas que tienen que ver con los patrones, ya que éstos se pueden encontrar en muchas formas diferentes en situaciones físicas, geométricas y numéricas y son susceptibles de ser reconocidos, ampliados, o generalizados.

Para lograr esta adquisición y el desarrollo de procesos de generalización es necesario tener una visión amplia del álgebra como instrumento de modelización matemática, que se puede y debe ir construyendo progresivamente. Aunque el cálculo literal, basado en las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos, se suele iniciar en secundaria, los procesos de simbolización, expresión de relaciones, identificación de patrones, son propios de los primeros niveles de algebrización.

Desde esta perspectiva, teniendo en cuenta que los estudiantes deben enfrentarse a lo indeterminado o desconocido, así como la producción que estos realizan sobre este aspecto, es necesario proponer situaciones o tareas, las cuales, junto con la actividad que se despliegue, los conlleven a tener desarrollos en torno a esta particularidad, como por ejemplo las que plantean Rojas y Vergel (2014), con el fin de inferir algunas características del uso de los símbolos utilizados y su carácter operatorio.

En el álgebra, las reglas constituyen expresiones que enuncian generalidades, pero los patrones que se observan aparecen en las mismas colecciones de números, y en las operaciones comunes que se hacen con estos números o como modelos que describen situaciones. Es así como el mayor reto en la enseñanza del álgebra es promover la percepción de la “generalidad” que está detrás de los símbolos.

En este sentido, es importante propiciar actividades que involucren la generalización de patrones numéricos para modelar, representar o describir patrones físicos, regularidades y patrones que se hayan observado. Estas exploraciones informales de conceptos algebraicos deben contribuir a que el estudiante adquiera confianza en su propia capacidad de abstraer relaciones a partir de información contextual y de utilizar toda una gama de representaciones para describir dichas relaciones. Cuando los estudiantes elaboran gráficas, tablas de datos, expresiones, ecuaciones o descripciones verbales para representar una relación simple, descubren que representaciones diferentes dan lugar a diferentes interpretaciones de una situación (NCTM, 2000).

Si bien, en términos epistemológicos, los aportes desde corrientes teóricas pueden ser distintos, nos parece necesario poner a dialogar estas perspectivas. En particular, los aportes provenientes de aproximaciones cognitivas nos sirven para comprender más de cerca producciones matemáticas de los estudiantes que dan cuenta de la “anatomía” de la generalización en actividades sobre secuencias de patrones. El diálogo con aproximaciones de corte sociocultural, por ejemplo la de Vygotski, nos parece necesario en tanto estamos obligados en este estudio a documentar el fenómeno del desarrollo conceptual o de pensamiento, por supuesto, como ya lo hemos mencionado, ligado estrechamente al uso de instrumentos de mediación semiótica.

Tulviste (1991) señala que la actividad plantea el desarrollo del pensamiento no como el resultado de la simple adaptación del individuo al medio sino que como un desarrollo se teje con los conceptos que los individuos van formando en el curso de sus actividades. Este autor precisa que “en la medida que las actividades de los individuos se desarrollan, el desarrollo de su pensamiento es un fenómeno que no sólo es natural sino necesario” (Tulviste, 1991, p. 73). Por supuesto el pensamiento, en tanto fenómeno, es histórico y contingente, es decir, cambia o debería cambiar provocado por el tipo de problemas o tareas que enfrentan los sujetos. Al respecto, Tulviste (1991, p. 72) precisa:

Desde el punto de vista de (la teoría de la) actividad, el pensamiento debe necesariamente cambiar a través de la historia debido a que los problemas aparecen en conexión con el desarrollo de nuevos tipos de actividad que no pueden ser resueltos con tipos de pensamiento en curso. La actividad determina qué métodos de

pensamiento existen en una cultura u otra y cuáles de esos métodos son aplicados en cualquier caso dado.

En particular, la actividad matemática se constituye en un fenómeno susceptible de ser analizado en el contexto escolar. Uno de los procesos importantes en la actividad matemática es el de generalización. Según Mason et al. (1985), “la generalidad es un aspecto central en la actividad matemática, a todo nivel, y, a la cual se puede retornar una y otra vez, cualquiera que sea el tema particular de discusión. Las matemáticas comprenden muchas generalizaciones, ya sea que tomen forma de métodos, procedimientos, o de fórmulas, y estas pueden ser vistas como originándose de la misma manera que las propias generalizaciones de los patrones, hechas por los alumnos”. Estos autores plantean que “el álgebra es el lenguaje con que se expresa dicha generalidad. Para aprender el lenguaje del álgebra es necesario tener algo que decir, se debe percibir algún patrón o regularidad y luego tratar de expresarlo en forma sucinta, para poder comunicarlo a alguien. Esta expresión de la generalidad también se puede usar para responder preguntas específicas”.

Luego, la posibilidad de potenciar el desarrollo de pensamiento es un aspecto que cada vez genera mayor interés para la investigación en educación matemática. En particular, dado que asumimos la generalización de patrones como un medio primordial para el trabajo algebraico en la escuela, esto demanda desarrollar una perspectiva sobre la naturaleza del álgebra que considere las maneras de resolver los problemas sobre generalización de patrones (Vergel, 2015).

Así pues, es indispensable abordar el signo² como mediador en el proceso de generalización, dado que en concordancia con Vergel (2014a, 2014b) apoyado en ideas de Vygotski, los signos se interponen entre cualquier función natural psicológica del ser humano y su objeto, cambiando de raíz las propiedades de dicha función. En otras palabras, el signo no es, epistemológicamente hablando, neutro. De la misma manera, de acuerdo con Vygotski, “en la estructura superior el signo y el modo de su empleo es el determinante funcional o el foco de todo el proceso”.

² Término empleado por Vygotski en sus planteamientos.

Estamos de acuerdo con Vergel (2014b) que el signo cumple el papel de una operación significativa y estos no se limitan únicamente a su función representativa, la elección de ellos no es neutra o independiente y dicha elección orienta el destino en el cual se expresa el pensamiento, el destino de la comunicación. Así, para comprender el significado de los signos, no los podemos reducir simplemente a lo que ellos representan. Se debe comprender el tipo de actividad que ellos permiten realizar.

Ahora bien, el uso de los signos como mediadores en la generalización, toman un papel preponderante respecto al desarrollo, que de acuerdo con Vergel (2014a, 2014b), Vygotski lo define en términos de aparición y transformación de las diversas formas de mediación y su noción de interacción y su relación con los procesos psicológicos superiores implica necesariamente los mecanismos semióticos.

De esta manera, Vergel (2014a, 2014b) afirma que para Vygotski el desarrollo es considerado en términos de saltos revolucionarios fundamentales más que en términos de incrementos cuantitativos constantes, y de acuerdo con Wertsch (1985/1988) coincide en señalar que los tres temas que constituyen el núcleo de la estructura teórica de Vygotski son:

- 1) *la creencia en el método genético o evolutivo.*
- 2) *los procesos psicológicos superiores tienen su origen en procesos sociales, y*
- 3) *los procesos mentales o cognitivos pueden entenderse solamente mediante la comprensión de los instrumentos y signos que actúan como mediadores.*

Por lo anterior, Vergel (2014b) concluye que “la creencia en el método genético, de acuerdo con Vygotski, significa que el pensamiento se puede desarrollar” (p. 44), y afirma además que la idea de desarrollo, lejos de ser ingenua desde los planteamientos de Vygotski, cobra especial relevancia en su teoría del desarrollo genético. Así mismo desde Vygotski, en términos de Wertsch (1985/1988), el desarrollo se define en términos de aparición y transformación de las diversas formas de mediación y su noción de interacción y señala que su relación con los procesos psicológicos superiores implica necesariamente los mecanismos semióticos.

En este orden de ideas, es importante mencionar que nos interesa visibilizar y explotar los temas 1 y 3 del núcleo de la estructura teórica vygotskiana. Consideramos de vital importancia, de acuerdo con Wertsch (1985/1988), que “los procesos mentales o cognitivos pueden entenderse solamente mediante la comprensión de los instrumentos y signos que actúan como mediadores”. La idea de mediación la estamos considerando como constitutiva del pensamiento y de la actividad. Se piensa con y a través de los signos. Este es uno de los planteamientos que se puede derivar de la teoría vygotskiana (Vygotski, 1989), lo cual sugiere que las maneras como nuestros estudiantes llegan a conocer y lo que conocen llevan en su constitución sedimentos de formas históricas y culturales de pensamiento.

Siguiendo con la idea de desarrollo vygotskiana, se requiere de un complejo y relativamente largo proceso de apropiación cultural, el cual, estaría orientado a propiciar grados crecientes de dominio autorregulado (consciente y voluntario) y descontextualizado de los instrumentos de mediación semiótica, para posibilitar en nuestros estudiantes, por ejemplo, formas de conceptualización cada vez más elaboradas o sofisticadas. Con referencia al principio de descontextualización de los instrumentos de mediación, Vygotski afirma que “el significado de los signos se vuelve cada vez menos dependiente del contexto espacio-temporal en el que son utilizados” (Wertsch, 1985/1988, pp. 49-50).

Por otra parte, Azarquiél (1993, p. 27) señala que “la generalización en muchas ocasiones lleva consigo un proceso de abstracción de orden elevado, de cierta dificultad”. Ver y expresar los aspectos generales tiene interés en sí mismo, como una potente actividad intelectual que se pone en juego en muchas ocasiones, pero es además una capacidad que puede desarrollarse (Azarquiél, 1993, p. 27). Sin embargo, generalizar no es sólo pasar de una colección de casos particulares a una propiedad común, a una expresión que las englobe, ni tampoco es sólo definir, a partir de las propiedades de un objeto.

Azarquiél (1993) sostiene que también se generaliza cuando a una situación se transfieren propiedades que se cumplen en otra, y, en general, cuando se amplía el ámbito de definición de una ley. El proceso de generalización, importante en la actividad matemática, se constituye en un proceso matemático complejo. Ahora bien, los procesos de generalización relacionados con el

álgebra permiten una división en fases que conviene también desde el punto de vista didáctico. Azarquiél considera que el proceso de generalización requiere tres pasos bien diferenciados: la visión de la regularidad (la diferencia, la relación); su exposición verbal; y su expresión escrita, de la manera más concisa posible.

En este mismo sentido, como lo describe Zarzar (2011), la comunidad internacional de didáctica del álgebra reconoce cuatro acercamientos sobre el pensamiento algebraico: La generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes en relación numérica, la modelación de situaciones matemáticas y de situaciones concretas, el estudio de situaciones funcionales y la solución de problemas.

Mason et al. (1985) proponen que la generalización es una vía para acceder al pensamiento algebraico, argumenta que el aprendizaje del álgebra se relaciona con la aritmética generalizada, posibilidades o restricciones, expresión de la generalidad, reordenamiento y manipulación. Los autores plantean cuatro fases para llegar a la generalización:

- Percibir un patrón.
- Expresar un patrón.
- Registrar un patrón.
- Prueba de validez de las fórmulas.

Al estimular la habilidad de expresar generalidades, los estudiantes aprenden a ver lo general en lo particular y viceversa. Según estos autores, la generalidad es fundamental para acceder al álgebra de una manera significativa y construir su conocimiento.

De igual forma, Roig & Llinares (2008) afirman que para resolver problemas de generalización, el estudiante debe identificar, analizar, describir patrones y extraer generalizaciones apropiadas a partir de ellos, y de acuerdo con Zazquis & Liljedahl (2002, referenciados por Roig & Llinares 2008), “al explorar patrones los estudiantes se dedican a detectar similitudes y diferencias, clasificar, etiquetar, buscar algoritmos, conjeturar, argumentar, establecer relaciones numéricas entre componentes o, más en general, a generalizar sobre datos y relaciones matemáticas”.

El trabajo con patrones que intervienen en este tipo de problemas pueden ser de tipo gráfico o numérico. Los patrones gráficos se presentan como una sucesión de figuras y se espera que el estudiante sea capaz de extender la sucesión, reproducir la figura correspondiente a un término cualquiera de la sucesión o calcular el número de elementos que la componen sin necesidad de reproducirla. El objetivo es que el estudiante obtenga la regla que define el patrón dado. Para ello, según Roig & Llinares (2008) las tareas que se piden habitualmente son:

- Continuar la sucesión o escribiendo los siguientes a los dados.
- Calcular un término cercano que podría resolverse continuando la sucesión dibujando o escribiendo los números hasta llegar al término pedido (generalización cercana, Stacey, 1989).
- Expresar verbalmente la regla que ha permitido el cálculo de los diferentes términos. Esto muchas veces se plantea como una explicación a los compañeros de forma que estos sean capaces de entenderlo (Pegg & Redden, 1990; Radford, 2000).
- Expresar simbólicamente la regla que permite encontrar el término n -ésimo de la sucesión.

Es así, que puede decirse que el uso de patrones es uno de los caminos para promover el pensamiento algebraico y enseñar a generalizar a los alumnos (NCTM, 2000). Castro (1995) señala que trabajos como el de Stacey (1989) “destacan la importancia de proponer trabajos sistemáticos con patrones a los escolares y el interés de que estos trabajos sean parte integrante del currículo de Matemáticas” (p. 27). Por otra parte, los patrones también pueden ser analizados desde el punto de vista de las representaciones. Así, Moss & London (2011, referenciados en Merino, 2012) señalan que cuando se priorizan las representaciones visuales, y se ayuda a los estudiantes a focalizarse en los patrones como un camino para discernir reglas generales, están mejor capacitados para encontrar, expresar y justificar reglas funcionales

Al respecto, Azarquiél (1993) afirma que se debe dedicar un tiempo considerable al trabajo de las etapas iniciales de *ver* y *decir* un patrón. “Ver” hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación (ver un patrón puede ocurrir después de un periodo de tiempo trabajando con un número de ejemplos particulares), y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de un “algo común”, logro que va acompañado de una sensación de regocijo. El

“decir”, ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular, en palabras, esto que se ha reconocido. “Registrar” es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere de un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo dibujos).

Teniendo en cuenta estos aspectos, es importante decir que la identificación y designación de las variables que caracterizan el sistema a modelizar es el primer paso de la modelización matemática, que vendrá seguido del establecimiento de relaciones entre dichas variables. Es importante tener en cuenta que el tipo de representación que utilicemos no es algo neutral o indiferente, lo cual hace que optar por un tipo de representación puede tener ventajas e inconvenientes.

En este sentido, para desarrollar el pensamiento (algebraico) mediante la generalización de patrones y expresarla haciendo uso de la letra como número generalizado, se supone la conjunción de dos procesos³:

1. Generalización: que permite pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto común a todas ellas.
2. Simbolización: que permite expresar de forma abreviada lo que tienen en común todas las situaciones.

Para que estos dos procesos se pongan en práctica de forma simultánea se deben poner en juego capacidades muy distintas para cada uno, por lo que al abordar la enseñanza y planificar las estrategias para ello, se debe llevar a cabo de forma diferente en cada caso. Así, para que los alumnos lleguen a entender el concepto de letra como número generalizado, es necesario que cuenten con numerosas experiencias en las que aparezcan situaciones y representaciones usando los mismos símbolos y reglas, de manera tal que puedan justificar por qué se usan las mismas reglas.

Una de las vías para encontrarse con el álgebra es el trabajo con situaciones en las que debe percibir lo general y sobre todo expresarlo. Al intentar describir relaciones o propiedades

³ Ideas y Actividades para Enseñar Álgebra, Grupo Azarquiél. Ed. Síntesis. 1993

relativas a un conjunto de números, se puede conseguir que las letras aparezcan en un contexto, mediante un proceso de interpretación personal que encuentra significados y sentido a sus procesos. Los símbolos y operaciones tienen así una referencia y un sentido. El hecho de construir símbolos para expresar generalizaciones propias hace que estas constituyan una forma específica y precisa de escritura.

Los procesos de generalización que facilitan el aprendizaje, ponen al alumno en situaciones que se lo permiten de una manera más eficaz, presentando una división de dicho proceso en tres pasos definidos y que además también son convenientes desde el punto de vista didáctico (Mason et al. 1985, referenciado en Azarquiel, 1993):

1. La visión de la regularidad, la diferencia, la relación (ver)
2. Su exposición verbal (describir)
3. Su expresión escrita, de la manera más concisa posible (escribir)

Con respecto al primer paso, se refiere a un proceso mental en el que se interrelacionan los diversos elementos para ver claramente la estructura y el modelo, permitiendo observar la situación de una forma diferente, distinguiendo sus características propias, lo que es común en cada ejemplo, lo que cambia y lo que no; para conseguir mediante una combinación adecuada, una regla o una expresión que resuma todas las situaciones y que permita “contar en general”.

Por otro lado, es importante destacar, como lo menciona Pretexto (1996/1999), que la imagen de álgebra como aritmética generalizada no garantiza interpretaciones de la letra como número generalizado, por lo que las posibilidades de interpretación de la letra como número generalizado depende, en gran medida, del tratamiento metodológico dado. Por lo anterior, dentro de las consideraciones prácticas para el trabajo en la transición aritmética–álgebra, proponen elementos que deben ser abordados desde el trabajo aritmético y que permiten un tránsito más natural hacia el trabajo algebraico, entre otras, sugieren propiciar experiencias con procesos de generalización y búsqueda de patrones, en particular, como posibilidad de acercamiento a la noción de variable, además de la necesidad de que “el número generalizado” varíe en diferentes universos numéricos.

En particular, la generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela. Sin embargo esto demanda necesariamente desarrollar una perspectiva ampliada sobre la naturaleza del álgebra escolar, que considere una relación dialéctica entre las formas de pensamiento y las maneras de resolver los problemas sobre generalización de patrones, lo cual introduce un problema en términos de la constitución del pensamiento algebraico en alumnos jóvenes. (Vergel, 2014, p. 1)

En este mismo sentido, Azarquiél (1993) en cuanto al desarrollo de la capacidad de generalizar, expresando lo general verbalmente o con ayuda de símbolos, afirma que requiere un esfuerzo dirigido específicamente hacia este fin. Es así, que una de las vías por la que un principiante puede encontrarse con el álgebra, y quizá de las más naturales y constructivas, es precisamente el trabajo con situaciones en las que debe percibir lo general y, sobre todo, expresarlo. Al intentar describir relaciones o propiedades relativas a un conjunto de números, se puede conseguir que las letras aparezcan en un contexto, después de un proceso en el que se trata de dar sentido progresivamente a las interpretaciones personales. De esta manera, podrán convertirse en una necesidad del alumno y en un instrumento propio para explicar y manejar sus ideas.

Es así, que el nivel de comprensión del álgebra está muy relacionado con la progresión que se sigue en la utilización de las letras. Al respecto, se han hecho muchas clasificaciones sobre el uso de las letras, pero se ha elegido la de Küchemann (1981) por ser una de las más conocidas.

A partir de las entrevistas realizadas en el marco del proyecto CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science) en el Reino Unido (1981), se muestra que los estudiantes tienen distintas interpretaciones de la letra que están correlacionadas con sus niveles de comprensión, y dificultades con el manejo adecuado de la sintaxis del álgebra. Küchemann propone que para ubicar los ítems en diferentes niveles de complejidad creciente, se debe tener en cuenta la naturaleza y la significatividad de los elementos de un ítem (números pequeños, números grandes, clases de números); la complejidad estructural del ítem (número de variables y operaciones que involucra); el número de estudiantes que resuelvan correctamente el ítem (grado de facilidad), y los diferentes significados que los estudiantes pueden dar a las letras.

Dichas significaciones son resumidas por él, en seis distintas interpretaciones que hacen los estudiantes de la letra en los contextos algebraicos:

- Letra evaluada: se le asigna un valor numérico desde el comienzo a la letra.
- Letra ignorada: la letra es ignorada o su existencia es reconocida pero sin *darle un significado*.
- Letra como objeto: la letra se reconoce como el nombre de un objeto o como el objeto en sí misma.
- Letra como incógnita específica: la letra es reconocida como un número desconocido pero específico y se puede operar sobre ella.
- Letra como número generalizado: a la letra se le reconoce como un ente con la posibilidad de tomar valores en universo dado.
- Letra como variable: la letra se ve como representante de un rango de valores inespecíficos, y se ve que existe una relación sistemática entre dos de dichos tipos de valores.

Ahora bien, Küchemann (1981), con base en los niveles de comprensión establecidos por Collis (1975) y las diferentes interpretaciones de letra, realizadas por los estudiantes, propone los siguientes niveles de comprensión del álgebra.

- NIVEL I: Bajo de las operaciones concretas (Letra evaluada y no usada/ignorada).
- NIVEL II: Superior de las operaciones concretas (Letra como objeto).
- NIVEL III: Bajo de las operaciones formales (Letra como incógnita y número generalizado).
- NIVEL IV: Superior de las operaciones formales (Letra como variable).

Capítulo 3

Referentes Metodológicos y Diseño del Estudio

3.1 Referentes Metodológicos

Los últimos treinta años han sido considerados como escenario de cambios muy profundos en la enseñanza de las matemáticas, dada su evolución en investigaciones realizadas por la comunidad de educadores matemáticos, filósofos, psicólogos y pedagogos entre otros. Además, por los esfuerzos que la comunidad internacional de expertos en didáctica sigue realizando por encontrar posibles modelos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, está suficientemente claro que vivimos aun actualmente una situación de experimentación y cambio.

De acuerdo con Brousseau (2003), citado en Mora & Torres (2007),

... en los últimos años se ha encontrado que la didáctica no es independiente del contenido de la enseñanza. Los procesos de adquisición de los saberes y las situaciones de aprendizaje no son universalmente los mismos; dado que los humanos no aprendemos bajo las mismas circunstancias, esto ha hecho que la didáctica moderna se vuelva específica y que, en este sentido, aparezca, por ejemplo, la didáctica de las matemáticas, y de manera más especializada, la didáctica del álgebra, de la geometría, de la probabilidad, etc.

Teniendo en cuenta el problema identificado para nuestro estudio, se hizo necesario definir la metodología de investigación con la cual se desarrollaría el trabajo y el reporte de la experiencia, de manera que se ajustara a un enfoque cualitativo desde la intervención y sus resultados teniendo en cuenta que el objetivo es describir el proceso de desarrollo de pensamiento de estudiantes de grado octavo al resolver tareas sobre generalización de patrones.

Debido a que nuestro ejercicio de investigación aborda la problemática de las matemáticas que se deben enseñar, específicamente al pretender describir y analizar el acercamiento a la interpretación de la letra como número generalizado, que logran estudiantes de grado octavo cuando abordan tareas sobre generalización de patrones; enmarcada en el pensamiento y la transición de la aritmética al álgebra, optamos por usar como metodología de investigación la Investigación – Acción (IA), dado que ésta vista en el aula, busca ofrecer una serie de estrategias, técnicas y procedimientos para que el proceso sea riguroso, sistemático y crítico, es decir, que reúna los requisitos de una “investigación científica”.

Por otra parte, la Investigación-Acción realiza simultáneamente la expansión del conocimiento científico y la solución de un problema, mientras aumenta, igualmente, la competencia de sus respectivos participantes (sujetos “coinvestigadores”) al ser llevada a cabo en colaboración, en una situación concreta y usando la realimentación de la información en un proceso cíclico, aspecto del cual se hará énfasis en tanto se realizó el planteamiento de una serie de tareas a una muestra representativa de estudiantes de grado octavo de dos instituciones de carácter público de la ciudad de Bogotá, se analizaron los resultados, se realizaron ajustes y se plantearon nuevas tareas basadas en las hallazgos correspondientes a cada tarea.

En este sentido la Investigación Acción se desarrolla a través de una serie de etapas descritas por Miguélez (2000), las cuales se tomaron como base para el desarrollo del trabajo y de manera específica, se desarrollaron los aspectos metodológicos definidos a través de las siguientes fases:

- Fase 1: Acercamiento e inserción en la problemática de profundización, correspondiente a la apropiación teórica que en este caso se ha llevado a cabo a través de la revisión documental de la literatura asociada con procesos de desarrollo, generalización de patrones, transición aritmética-álgebra, y las concepciones de la letra en contextos algebraicos y categorización de la letra según Küchemann.
- Fase 2: Diseño de pilotaje en donde se presenta un abanico de posibilidades provisionales que definen objetivos de acción viables; en este caso realizando el diseño de las tareas más apropiadas y determinando el número de sesiones para la implementación.

- Fase 3: Diseño y/o adaptación de tareas asociadas sobre generalización de patrones, tomando como base algunas de las sugeridas por el grupo Azarquiel (1993), para el trabajo de interpretación de la letra como número generalizado.

- Fase 4: Implementación de las tareas, reflexión y análisis sobre la producción de los estudiantes. Este análisis sobre las producciones de los estudiantes proporcionará los elementos para el diseño de las siguientes tareas con el fin de atacar otros frentes, por ejemplo a través de tareas de mayor nivel de exigencia o complejidad. Dichas producciones serán analizadas a manera de un *estudio de caso* (colectivo) arrojando información significativa para la toma de decisiones en el desarrollo del proceso de profundización. En este sentido, el Estudio de Caso es una herramienta valiosa de investigación, ya que, su mayor fortaleza radica en que a través del mismo se valora y registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado (Stake, 1998).

- Fase 5: Documentar los análisis sobre características o elementos asociados a la interpretación de la letra como número generalizado, en tanto la información recogida debe ser categorizada y estructurada de forma cualitativa y cuantitativa para su fácil manejo posterior.

- Fase 6: Reporte de la experiencia.

Desde esta perspectiva, las Fases 1 a 4 tienen un carácter cíclico de manera que brindan herramientas para hacer pronunciamientos sobre las producciones de los estudiantes al abordar este tipo de tareas, que va unívocamente ligado al interés del trabajo de profundización. Lo anterior, en coherencia con la IA, entendida como un proceso en el cual los “coinvestigadores” son partícipes activos en el problema, la información obtenida, los métodos y técnicas a ser utilizados, el análisis de datos, y las acciones a futuro; por lo que el papel del investigador es esencialmente de organizador de discusiones y facilitador de dicho proceso.

Luego, la IA en el contexto educativo presenta una tendencia a reconceptualizar el campo de la investigación educacional en términos más participativos y con miras a esclarecer el origen de problemas, contenidos programáticos, métodos didácticos, conocimientos significativos impulsado sobre todo desde las mismas Universidades y desde los Centros de Investigación Educacional, oficiales y privados.

Sus tópicos de estudio se han relacionado especialmente desde la perspectiva de quienes intervienen en ella: elaborar, experimentar, evaluar y redefinir los modos de intervención, los procesos de enseñanza-aprendizaje, el desarrollo de los currículos, su proyección social y el desarrollo profesional de los docentes; todo esto, con el fin de mejorar y aumentar el nivel de eficiencia de los educadores y de las instituciones educativas.

En concordancia con los planteamientos de Miguélez (2000), el método de investigación está determinado por la naturaleza del objeto o fenómeno a estudiar; de manera que las estrategias, técnicas, instrumentos y procedimientos estarán en plena sintonía con la naturaleza del problema a profundizar. Para esto, se tendrá una constante interacción con la situación-problema para llevar a cabo el análisis, interpretación, planes de acción y evaluación de los resultados y determinar, si es necesario, cambios y redireccionamientos a los que haya lugar.

En tal sentido, coincidiendo con Soneira (2006, citado por Vergel, 2014), los investigadores seleccionan los casos a estudiar, teniendo en cuenta la “saturación teórica”⁴.

Así mismo, es necesario aclarar que “*la saturación teórica no tiene una interpretación objetiva, ni es calculable, ni medible*”, Vergel (2014b, p. 105). Además, Soneira (2006, p. 157) precisa que “codificar supone siempre un *corte o fractura* de los datos”; situación que conlleva a dar varias lecturas comprensivas de los datos para captar en mayor medida las relaciones existentes y la información allí dispuesta.

Finalmente, en cuanto a las consideraciones prácticas para el trabajo en la transición Aritmética-Álgebra y algunos elementos que deben ser abordados desde el trabajo aritmético y

⁴ La “saturación teórica” significa que agregar nuevos casos no representará hallar información adicional por medio de la cual el investigador pueda desarrollar nuevas propiedades de las categorías.

que permiten un tránsito más natural hacia el trabajo algebraico, Pretexto (1999) afirma que se deben propiciar experiencias con procesos de generalización y búsqueda de patrones, en particular, como posibilidad de acercamiento a la noción de variable, además de la necesidad de que “el número generalizado” varíe en diferentes universos numéricos, para lo cual se tuvieron como referencia los siguientes niveles propuestos por Pretexto (1996/1999) para el análisis de respuestas en tareas sobre patrones:

NIVEL 0: No responde.

NIVEL 1: No alcanza a encontrar el patrón de formación en lo perceptual.

NIVEL 2: Encuentra el patrón de formación únicamente en lo perceptual.

NIVEL 3: Encuentra el patrón de formación únicamente sobre lo concreto finito.

NIVEL 4: Encuentra el patrón de formación hasta lo concreto generalizado.

NIVEL 5: Encuentra el patrón de formación general y llega sólo a verbalizarlo.

NIVEL 6: Encuentra el patrón de formación general, lo verbaliza y simboliza en lenguaje intermedio.

NIVEL 7: Encuentra el patrón de formación general, lo verbaliza y simboliza en lenguaje algebraico formal.

3.2 Diseño del Estudio

En esta parte del capítulo se abordarán los aspectos relacionados con la manera como diseñamos nuestro estudio; el cual lo enmarcamos desde un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo e interpretativo (Ernest, 1991), dado que éste construye una rica descripción del fenómeno o problema didáctico objeto de estudio, que para el caso, es identificar y describir un desarrollo, en términos de Vygotski, de cómo los estudiantes de grado octavo (13-15 años) interpretan y hacen uso de la letra cuando se encuentran enfrentados a tareas sobre generalización de patrones. Es decir, estamos interesados en la interpretación y el uso de la letra que hacen nuestros estudiantes cuando abordan las tareas sobre generalización de patrones que proponemos, así como los procesos que desarrollan.

Como ya se ha dicho antes, una manera de involucrar el álgebra en la escuela es mediante tareas y actividades sobre generalización de patrones. Partiendo de esta idea, este estudio se desarrolló desde una mirada diferente sobre la naturaleza del álgebra escolar, considerando la diversidad de maneras para resolver problemas de éste tipo, así como también de formas de pensamiento, en tanto que dichas tareas proporcionan a los estudiantes la oportunidad de observar y verbalizar sus generalizaciones y de registrarlas simbólicamente conformando una útil y concreta base para la manipulación simbólica (English & Warren 1998, citado por Sandoval et al, 2010).

El estudio se realizó inicialmente con un grupo de 18 estudiantes de 8° de secundaria (13-15 años) de dos colegios de carácter público de la ciudad de Bogotá (Colombia), entre los meses de marzo y noviembre de 2014, los cuales fueron seleccionados a través de las autorizaciones por parte de los padres de familia que accedieron a que fueran partícipes del trabajo investigativo. Se desarrolló en sesiones de trabajo extraclase, durante tiempos de permanencia en la misma jornada en las instituciones educativas, con el fin de recolectar las producciones de los estudiantes en una prueba diagnóstica y siete tareas propuestas posterior a esta. El grupo finalmente se redujo a 15, pues 3 estudiantes se retiraron de las instituciones.

En este sentido, se proporcionará la mayor cantidad de información posible en relación con tareas sobre generalización de patrones, la población, los métodos de recolección de datos, los análisis de estos y la triangulación realizada por los investigadores, efectuando una permanente comparación de los datos y una descripción lo más minuciosa posible del análisis realizado con miras a consolidar la validez del estudio.

Teniendo en cuenta que, desde la perspectiva vygotskiana, el pensamiento se puede desarrollar; planteamos como recurso didáctico una serie de tareas las cuales ponen unas condiciones con el propósito de que ocurra cierto fenómeno. Para el caso de ese estudio, que los estudiantes usen e interpreten la letra como número generalizado, de manera tal que movilicen diferentes formas de pensamiento relacionadas con la generalización de patrones.

En cuanto a la disposición de los instrumentos, siendo estos el principal insumo de recolección de información, fueron diseñados de manera instruccional, ya que las tareas fueron propuestas de manera escrita, a las que podemos caracterizar como objetos ostensivos en tanto fueron diseñadas con el fin de ser manipuladas, dispuestas dentro de sistemas de representación figural y además partiendo de su naturaleza de ser perceptibles a los sentidos, en donde su intención principal era impactar visualmente de manera que desde una primera impresión los estudiantes las pudieran relacionar como tareas sobre “lo mismo”.

Al respecto, teniendo en cuenta que el diseño de tareas es fundamental en tanto que estas deben ser realizables, nos obligaba a tener en cuenta factores como la caracterización de la didáctica asumida, el tipo de población, el tipo de instrumentos, la riqueza de las tareas, los tipos de situaciones en cuanto a la pertinencia dentro de del contexto escolar y su validez dentro del marco de otras investigaciones en la comunidad académica. De esta manera, se propusieron tareas que en nuestro concepto permitirán identificar categorías de razonamiento y fueran útiles en la medida que evidenciaran fenómenos de desarrollo, trayectorias de aprendizaje y formalización de procedimientos.

En este sentido, la fuente de los datos recolectados no fue más allá del aula de clase ya que solamente se tendrán en cuenta para el análisis de los hallazgos, las producciones de los estudiantes sobre la manipulación de las tareas propuestas. Dichas tareas se desarrollaron de manera escrita y en tal sentido, en concordancia con los aspectos metodológicos descritos por Miguélez (2000), la implementación se desarrolló durante dos etapas, una de las cuales se denomina fase de pilotaje y la otra como fase de diseño e implementación de una serie de tareas relacionadas con la generalización de patrones.

No obstante, debemos señalar que durante la investigación emerge la tarea de “*los sobres*”, trabajada inicialmente por Radford y referenciada por Rojas & Vergel (2013), la cual inicialmente no se había contemplado y además no hace referencia a trabajo con secuencias figurales y generalización de patrones, sin embargo resultó de gran importancia en términos de obtener insumos en cuanto a procesos superiores de pensamiento y responder preguntas sobre el

cómo piensan los estudiantes en sus procesos de generalización, cómo manejan y cómo operan con lo indeterminado.


A propósito de la tarea referida, es importante mencionar que ésta surge a partir de las discusiones llevadas a cabo en el marco de los seminarios de Trabajo de Grado I y II. En este sentido, la tarea de los sobres posibilitó que los estudiantes buscaran formas de nombrar la indeterminancia de manera analítica y volviéndola objeto de su discurso.

3.2.1 Fase de Pilotaje


En concordancia con Pretexto (1996/1999), tomamos como referente los trabajos de Küchemann (1981), planteando elementos para el trabajo en el aula proponiendo una tarea que, en el contexto de resolución de problemas, posibilitarán tanto procesos de generalización y simbolización, como aproximaciones a la interpretación de letra como número generalizado.

En tal sentido la prueba diagnóstico se aplicó a 18 estudiantes, se conformó con 14 ítems tomados de la prueba realizada por Küchemann (1981), de los cuales 4 ítems corresponden al Nivel I, 2 Preguntas a Nivel II, 4 a Nivel III y 4 a Nivel IV.⁵

⁵ Ver Anexo A



ÁLGEBRA
COLEGIO GABRIEL BETANCOURT MEJÍA I.E.D.
COLEGIO MANUEL DEL SOCORRO RODRÍGUEZ I.E.D.



NOMBRE: _____

Estimado estudiante esta prueba está diseñada para un proyecto de investigación dentro del programa de la Maestría en Educación Matemática, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, no conlleva nota, por lo que agradecemos su cooperación en el desarrollo de la misma.

- Si usted sabe que $e+f=8$, ¿a qué es igual $e+f+g=?$. ¿Por qué?
- x multiplicado por d puede escribirse dx . Multiplique por d la expresión $n+5$. ¿Cómo lo hizo?
- Una manzana cuesta \$500 y una pera \$600. Si y es el número de manzanas y x el número de peras compradas. ¿Qué representa la expresión $500y + 600x$? ¿Por qué?
- ¿Cuándo es correcta la siguiente expresión: $L+M+N = L+P+N$? Subraye la respuesta correcta: Siempre (¿Por qué?); Nunca (¿Por qué?); A veces (¿En qué casos?).
- ¿Cuándo es correcta la siguiente expresión: $a+2 = b+2$. Subraye la respuesta correcta: Siempre (¿Por qué?); Nunca (¿Por qué?); A veces (¿En qué casos?).
- Si usted sabe que $a = b+3$. ¿Qué le sucede a a si le añadimos 2 a b ? ¿Por qué?
- Si usted sabe que $f = 3g+1$. ¿Qué le sucede a f si le añadimos 2 a g ? ¿Por qué?

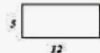


- Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas siempre, algunas veces o nunca. En cada caso explica tu respuesta. Todas las letras representan números enteros o cero (por ejemplo, 0,1,2,3,etc.).
 - $a+b = b+a$
 - $mp+tm = mt+pm$
 - $a+2b+2c = a+2b+c$
- Si sabe que $a+b=43$, ¿Cuánto es $a+b+2$? Explique su respuesta.
- Simplifique la siguiente expresión: $2a+5a$. Explique su respuesta.
- Calcule el área de la siguiente figura:
 
- El perímetro de un polígono es igual a la suma de las longitudes de todos sus lados. Calcule el perímetro de la siguiente figura:
 
- ¿Qué puede decir acerca de m , si sabe que $m = 2a+1$, cuando $a = 4$?
- Calcule el área y el perímetro de la figura y explique su respuesta:
 

Figura 1. Prueba diagnóstico

En dicho instrumento, de acuerdo a la producción de los estudiantes se clasificaron en número de respuestas y porcentajes de las mismas en cada nivel correspondiente, como se muestran a continuación en la figura 2 y figura 3, respectivamente:

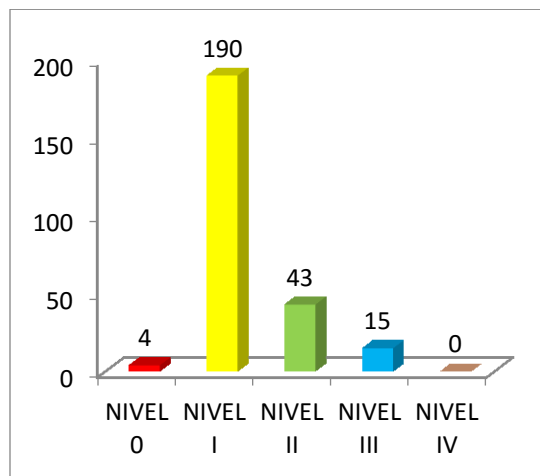


Figura 2. Número respuestas de los estudiantes en cada nivel.

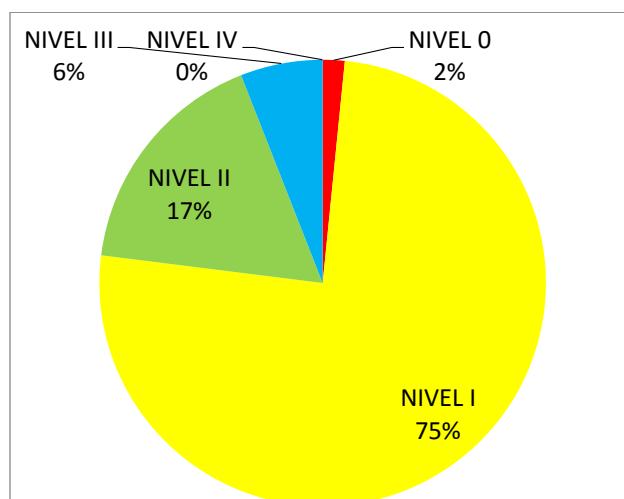


Figura 3. Porcentaje del número de respuestas de los estudiantes en cada nivel

Es decir, que de acuerdo con los gráficos anteriores, la mayor parte de las respuestas de los estudiantes están en el Nivel I y II de comprensión del álgebra, con un 92 % y tan solo el 6 % de las respuestas se ubicaron en el Nivel III y en el Nivel IV hay ausencia de respuestas. Lo que nos muestra que las producciones de los estudiantes están mayoritariamente en un nivel de las operaciones concretas, donde se usa la letra como evaluada, ignorada o como objeto, y, un escaso porcentaje estará interpretándola como incógnita o número generalizado.

A continuación se presentan algunas de las producciones de los estudiantes (Figura 4) respecto a los ítems 1, 2 y 4:

<p>1. Si usted sabe que $e+f=8$, ¿a qué es igual $e+f+g=?$. ¿Por qué?</p> <p>es igual a 12 por que supongo que cada letra vale 4</p> <p>LETRA EVALUADA: le asigna valor 4 c/u</p>
<p>2. n multiplicado por 4 puede escribirse $4n$. Multiplique por 4 la expresión $n+5$. ¿Cómo lo hizo?</p> <p>$5 \times 4 = 20 = 20n$ multiplique el número que es 5×4 que es el número que indica y le puse la letra</p> <p>LETRA IGNORADA O NO USADA</p>
<p>4. ¿Cuándo es correcta la siguiente expresión: $L+M+N = L+P+N$? Subraye la respuesta correcta: Siempre (¿Por qué?); <u>Nunca</u> (¿Por qué?); A veces (¿En qué casos?).</p> <p>Por que si la expresion es esa no hay manera de cambiarlos</p> <p>LETRA COMO OBJETO</p>

Figura 4. Respuestas de algunos estudiantes a los ítems de la prueba diagnóstico

Cabe anotar que en este caso, el *Nivel 0*, que no aparece dentro de la clasificación que realiza Küchemann (1981), es un nivel emergente por parte de nosotros, dado el hecho que nos vimos en la necesidad de generarlo para aquellas producciones en las que no había respuesta por parte de los estudiantes, es decir, entenderemos el *Nivel 0 como no clasificable o no responde*.

Esta tarea nos llevó a afianzarnos más en las presunciones iniciales que teníamos acerca del tratamiento que los estudiantes daban a la letra en contextos algebraicos, en tanto, la letra como número generalizado no es evidenciada en muchas de las producciones. Así pues, dado que nuestro objetivo de investigación compromete las secuencias de generalización de patrones, teniendo en cuenta que el diseño de tareas es fundamental en tanto que estas deben ser realizables, nos obligaba a tener en cuenta factores como la caracterización de la didáctica asumida, el tipo de población, el tipo de instrumentos, la riqueza de las tareas, los tipos de situaciones en cuanto a la pertinencia dentro de del contexto escolar y su validez dentro del marco de otras investigaciones en la comunidad académica. De esta manera, se propusieron tareas que en nuestro concepto permitirían identificar categorías de razonamiento y fueran útiles en la medida que evidenciaran fenómenos de desarrollo, trayectorias de aprendizaje y formalización de procedimientos.

En tal sentido, se diseñó una secuencia de siete tareas (T1 – T7) sobre la generalización de patrones que permitiera reportar el desarrollo que alcanzaban los estudiantes al abordar tareas sobre generalización de patrones que exigieran la interpretación y el uso de la letra como número generalizado, generando entre una y otra niveles de dificultad operativa cada vez mayor, partiendo desde la identidad del número de la figura con el número de objetos en la secuencia (Tarea 1).

3.2.2 Diseño y Justificación de las tareas

A continuación presentamos, un análisis de las tareas que propusimos desde la tarea 1 (T1) hasta la tarea 7 (T7), lo que nos permitió obtener una sensibilidad analítica y poder tomar decisiones en torno a los estudiantes que iban a ser sujetos de un estudio más profundo, en tanto sus producciones proporcionaban una mayor cantidad de información acerca del uso e interpretación

que le daban a la letra, y su proceso de desarrollo a medida que se avanzaba en cada una de las tareas. Coincidimos con Goldin (1998, p. 57, citado en Vergel, 2014) en señalar que “la estructura de las tareas es un componente esencial para entender y hacer inferencias del comportamiento observado en la resolución de problemas”.

En tal sentido, desde los planteamientos de Vygotski en su teoría psicológica, tal y como se hizo énfasis en el marco teórico, el signo tiene un papel preponderante y fundamental, en el desarrollo del pensamiento tal y como lo describe Vergel (2014b, p. 39):

[...] el signo cumple el papel de una operación significativa. Aún más, los signos *no se limitan únicamente a su función representativa*, la elección de ellos no es neutra o independiente y dicha elección orienta el destino en el cual se expresa el pensamiento, el destino de la comunicación.

Así pues, el término signo es utilizado por Vygotski con el sentido de poseedor de significado (Wertsch, 1985/1988, p. 34), por lo que será nuestro punto de referencia en las producciones de los estudiantes en torno al manejo que le dan a cada una de las tareas propuestas, tomando como base tareas con patrones (secuencias figurales) trabajadas por algunos investigadores, en tanto este factor nos permitía tener una base teórica frente a ellas, dado que ya habían sido desarrolladas en otros contextos, razón por la que no son literales en su presentación ni en las preguntas realizadas a los estudiantes, sino que han sido rediseñadas y ajustadas al nivel y contexto en que se fue llevado a cabo el estudio.

Cabe anotar, que las preguntas planteadas en cada una de las tareas, por lo menos en las tres primeras, fueron sometidas a un pilotaje con otros investigadores, con docentes de matemáticas en ejercicio en diferentes niveles de educación y con algunos estudiantes de grado octavo diferentes al grupo control.

A continuación, presentamos la descripción de cada una de las tareas, con ciertas aclaraciones al respecto, en tanto se iban realizando ajustes a las mismas, dado el carácter metodológico de la Investigación Acción (IA) en concordancia con Miguélez (2000).

3.2.2.1 Tarea 1: Identidad

Considere la siguiente secuencia:

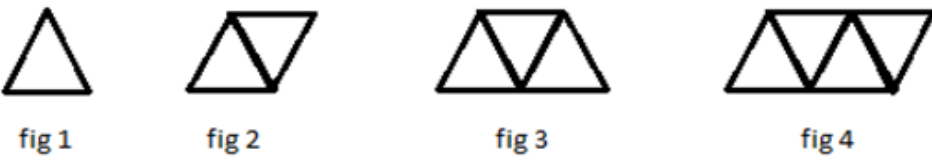


fig 1 fig 2 fig 3 fig 4

- ✓ Dibuje las tres próximas figuras de la secuencia.
- ✓ ¿Cuántos triángulos tendrá la fig. 10, fig. 15, fig. 30, fig. 77?
- ✓ ¿Qué posición dentro de la secuencia ocuparán las figuras con 24, 42 y 100 triángulos?
- ✓ ¿Cuál es el menor número de triángulos que pueden conformar una figura de la secuencia? ¿Cuál el mayor número de triángulos?
- ✓ Determine de qué depende la cantidad de triángulos en cada figura en la secuencia. Explique su respuesta.
- ✓ Si se pudiera representar mediante alguna expresión la dependencia entre la cantidad de triángulos y cada figura en la secuencia, ¿Cuál sería y por qué?

Figura 5. Tarea 1: Identidad

En esta tarea se presenta la identidad respecto al número de triángulos y el número de la figura correspondiente a dicha cantidad, es decir, la forma $n = n$; además de solicitar una justificación verbal en las últimas tres preguntas.

3.2.2.2 Tarea 2: Identidad-Perímetro

En la siguiente secuencia se muestran unos cuadrados que van aumentando en tamaño de acuerdo con la longitud de sus lados:

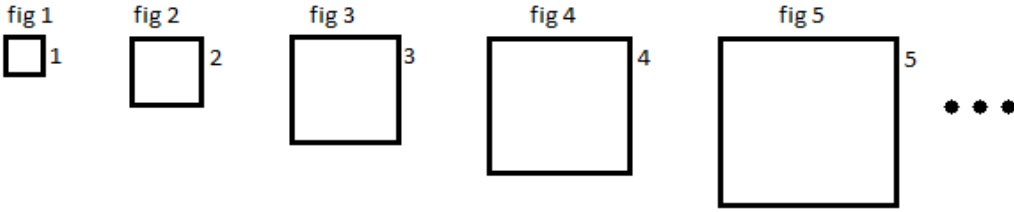


fig 1 fig 2 fig 3 fig 4 fig 5 ...

- ✓ Determine la medida del lado de las figuras 6, 7, 10, 15.
- ✓ Si el perímetro de una figura es la suma de la medida de sus lados, ¿Cuál es el perímetro de cada figura anterior?
- ✓ Registre en una tabla el número de la figura, la medida del lado de cada cuadrado y su respectivo perímetro.
- ✓ ¿Qué regularidades encuentra con respecto a los datos de la tabla?
- ✓ ¿Cómo podría hallarse la medida del lado de cualquier figura?
- ✓ ¿Cómo podría hallarse el perímetro del cuadrado de cualquier figura?


Figura 6. Tarea 2: Identidad-perímetro

En esta tarea se presenta la identidad respecto al número de la figura y la medida del cuadrado, pero adicionalmente, se involucra una operación en tanto se pregunta por el perímetro de los cuadrados en cada figura, con la forma $4n$. Involucrando el manejo de una tabla (no proporcionada) para organizar los datos y manteniendo la solicitud de una justificación verbal en las últimas tres preguntas.


Cabe anotar que el diseño de la forma de presentar las tareas, a partir de la siguiente (T3), cambió en tanto sugerencia de algunos de los investigadores con quienes se piloteó, además del hecho que los estudiantes al presentar las preguntas de forma listada, dejaban en ocasiones algunas de ellas sin abordar, lo que nos llevó a presentarlas dentro de un recuadro que visualmente les permitiera tener un espacio para responder y además los inclinara a no dejar alguna de ellas sin resolver.⁶

3.2.2.3 Tarea 3: Cuadros - Impares

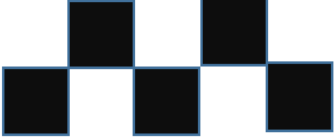
Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas



(1ª posición)



(2ª posición)



(3ª posición)

- ✓ Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición.
- ✓ Calcule el número de cuadros de la figura correspondiente a la 9ª posición.
- ✓ Calcule el número de cuadros de la figura de la posición 100
- ✓ Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior.
- ✓ Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición.

Figura 7. Tarea 3: Cuadros – impares

En esta tarea se presenta la misma constante a nivel figural, en tanto son formas geométricas básicas, donde se busca indagar respecto del número de cuadros en cada posición, pretendiendo que los estudiantes lleguen a manejar una forma generalizada de la secuencia $2n - 1$, es decir,

⁶ Ver Anexos: Tareas

que haya reconocimiento de las cantidades como impares. Por otra parte, a diferencia de la tarea anterior, no se otorga la opción de presentar los resultados en una tabla, con el fin de medir el proceso de factibilidad que ésta ofrece como recurso didáctico de generalización para los estudiantes, al tener visibles los datos en una tabla, pero sí, manteniendo la solicitud de una justificación verbal en las últimas tres preguntas.

En este sentido, en las cuatro tareas siguientes, es decir (T4, T5, T6, T7), se presenta la tabla como recurso dentro de cada una de ellas, en tanto los estudiantes en sus producciones tuvieron mayor facilidad al abordar las preguntas finales, cuando la tabla les permitía tener una organización de la información.

Así pues, las tareas siguientes fueron determinadas por este factor, además del trabajo de operaciones más complejas, donde se involucra una o más de una, de la siguiente manera:

3.2.2.4 Tarea 4: Triángulos – Potenciación

Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas




fig 1




fig 2

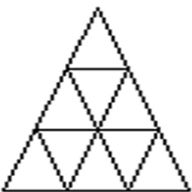


fig 3

- ✓ Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición.
- ✓ Calcule el número de triángulos pequeños de la figura correspondiente a la 9ª posición.
- ✓ Llena la tabla con los siguientes datos

Número de la figura	Número de triángulos pequeños
Figura 1	
Figura 2	
Figura 3	
Figura 4	
Figura 9	
Figura 50	
Figura 253	
Figura 359	


- ✓ Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior.
- ✓ Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de triángulos pequeños que tiene la figura en cualquier posición.

Figura 8. Tarea 4: Triángulos – potenciación

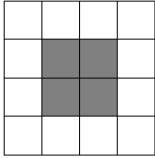
En esta tarea se despliega una secuencia de triángulos en los que van aumentando la cantidad de los mismos, con la pretensión de llegar a la secuencia n^2 , es decir, la potenciación como operación, involucrando el manejo de una tabla (proporcionada) para organizar los datos y manteniendo la solicitud de una justificación verbal en las últimas tres preguntas.

3.2.2.5 Tarea 5: Baldosas

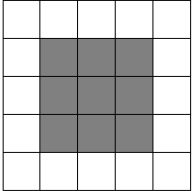
Observa el piso de las siguientes habitaciones y las baldosas que lo forman



Habitación No. 1



Habitación No. 2



Habitación No. 3

- ✓ Dibuje la habitación que sigue.
- ✓ Llena la tabla con los siguientes datos.

	Número total de baldosas	Número de baldosas Oscuras	Número de baldosas blancas
Habitación No. 1			
Habitación No. 2			
Habitación No. 3			
Habitación No. 4			
Habitación No. 20			
Habitación No. 100			
Habitación cualquiera			

- ✓ ¿Cómo se va obteniendo el número total de baldosas?
- ✓ ¿Cómo se va obteniendo el número de baldosas oscuras?
- ✓ ¿Cómo se va obteniendo el número de baldosas blancas?
- ✓ Si nos dan la cantidad de baldosas blancas que tiene el borde de una habitación, explique:
 - a. ¿cómo se puede encontrar la cantidad total de baldosas de esa habitación?
 - b. ¿cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas oscuras para esa habitación?
 - c. ¿cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas blancas para esa habitación?
- ✓ Escriba una operación con la que se pueda encontrar:
 - a. La cantidad total de baldosas para cualquier habitación
 - b. La cantidad de baldosas oscuras para esa habitación
 - c. La cantidad de baldosas blancas para esa habitación

Figura 9. Tarea 5: Baldosas

En esta tarea se muestra una secuencia de cuadros en el contexto del piso de una habitación, con dos tonalidades diferentes, donde se indaga acerca del número total de baldosas que corresponde a la secuencia $(n + 2)^2$ ó $n^2 + 4n + 4$; sobre el número de baldosas blancas pretendiendo la sucesión de $(n + 2)^2 - n^2$ ó $4n + 4$ y además por la cantidad de baldosas oscuras, correspondiente a la sucesión determinada por n^2 , es decir, la potenciación con operaciones

adicionales, involucrando también el manejo de una tabla (proporcionada) para organizar los datos y manteniendo la solicitud de una justificación verbal en las últimas preguntas.

3.2.2.6 Tarea 6: Puntos

Observe la siguiente secuencia

✓ Dibuje la figura que sigue en la secuencia.
 ✓ Describa las figuras de la secuencia como si lo hiciera para alguien que está en el mismo salón pero que no lo ha visto. Haga su descripción de tal forma que esa persona pueda luego dibujar la secuencia.
 ✓ Escriba una regla que ayude a construir la secuencia
 ✓ Llena la tabla con los siguientes datos.

Posición	Número de puntos en la base	Número de puntos en la altura	Número Total de puntos
n = 1			
n = 2			
n = 3			
n = 4			
n = 20			
n = 100			
Cualquier posición n			

✓ ¿Cuántos puntos se necesitan para la figura n=10 y n=37?.
 ✓ Escriba una fórmula matemática que sirva para hallar la cantidad de puntos en cualquier posición de la secuencia.

Figura 10. Tarea 6: Puntos

En esta tarea se presenta una secuencia de puntos, aumentando la cantidad de los mismos, con la pretensión de llegar a la secuencia $n^2 + n$, es decir, la potenciación como operación, involucrando el manejo de una tabla (proporcionada) para organizar los datos y manteniendo la solicitud de una justificación verbal en las últimas preguntas, sin dejar de lado que se involucra otra forma de expresión de las regularidades halladas por cada estudiante, en tanto se incluye una pregunta que le solicita describir los hallazgos para alguien del salón que no ha visto el patrón y que pueda a través de dicho relato hallar la misma sucesión.

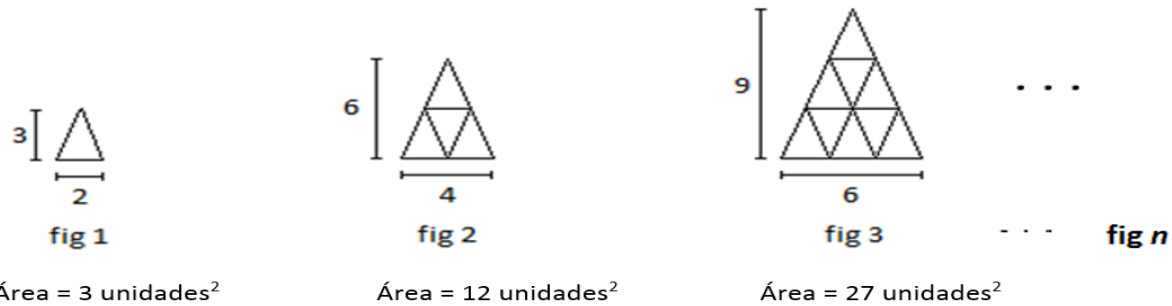
Dicha inclusión de la pregunta con el propósito de contarle a un compañero, tiene una intencionalidad en términos semióticos, en tanto buscaba que el estudiante expresara de una forma más natural (su propio lenguaje) lo que estaba encontrando, de tal manera que le proporcionara herramientas para poder en términos de Vygotski, *interiorizar* esos fenómenos y poder hacer consciente ese proceso implícito en el desarrollo de la tarea. Lo que para nosotros en concordancia con la premisa vygotskiana que “el pensamiento se puede desarrollar”, nos permitirá pronunciarnos en torno a dicho desarrollo.

Cabe resaltar que las tareas T6 y T7, son las últimas en el trabajo investigativo con los estudiantes en el aula, razón por la que son aquellas en las que se generaron cambios en tanto la inclusión de un nuevo ítem dentro de cada tarea, que nos permitiera pronunciarnos con mayor profundidad en torno al proceso de desarrollo conceptual y del pensamiento.

En tal sentido y dado que en términos de Vergel (2014b. p. 54) *el desarrollo está dirigido a promover grados crecientes de dominio autónomo (consciente y voluntario) y descontextualizado de los instrumentos de mediación semiótica*; las tareas implementadas deben privilegiar, junto con la actividad desplegada por los estudiantes, el acceso al dominio de los instrumentos de mediación con un carácter acentuadamente descontextualizado, lo cual debería posibilitar un acceso a formas de conceptualización propia de las matemáticas, en este caso del álgebra, lo que permitirá pronunciarnos respecto al desarrollo que alcanzan los estudiantes a través de sus producciones en el desarrollo de las tareas y en las actividades mismas.

3.2.2.7 Tarea 7: Triángulos-Área

Teniendo en cuenta que el área de un triángulo es el producto de la medida de su base por su altura, dividido en dos. Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas



- ✓ Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición y determine su área.
- ✓ Calcule la medida de los triángulos de la figura correspondiente a la 9ª posición y determine su área.
- ✓ Calcule las medidas de los triángulos de la figura de la posición 30 y determine su área.
- ✓ Llene la tabla con los siguientes datos

Posición	Medida de la base	Medida de la altura	Área
Figura 1			
Figura 2			
Figura 3			
Figura 4			
Figura 9			
Figura 47			
Figura 110			
Figura n			

- ✓ Describa las figuras de la secuencia como si lo hiciera para alguien que está en el mismo salón pero que no las ha visto y explique cómo ha llegado a sus respuestas. Haga su descripción de tal forma que esa persona pueda luego dibujar la secuencia con sus respectivas medidas.
- ✓ Escriba y explique una fórmula matemática que sirva para encontrar las medidas de los triángulos en la base, en la altura y el área que tiene una figura en la posición n.

Figura 11. Tarea 7: Triángulos – área

En esta tarea se presenta una secuencia de triángulos, aumentando la cantidad de los mismos, pero se incluyen medidas en la base y en la altura, siendo esta última el triple de la medida de la base, con el fin de obtener información acerca del área de cada uno de ellos, dado que se proporciona la definición del procedimiento para determinarla; es decir, la pretensión buscada en la tarea es la de llegar a la secuencia $\frac{(2n)(3n)}{2}$ ó $3n^2$, es decir, el área como operación,

involucrando el manejo de una tabla (proporcionada) para organizar los datos y manteniendo la solicitud de una justificación verbal en las últimas preguntas, sin dejar de lado que como se había mencionado, se involucra otra forma de expresión de las regularidades halladas por cada estudiante, en tanto se incluye una pregunta que le solicita describir los hallazgos para alguien del salón que no ha visto el patrón y que pueda a través de dicho relato hallar la misma sucesión.

Como ya se ha mencionado anteriormente, se tratará de realizar una cuidadosa descripción del fenómeno en estudio, en este caso, el desarrollo conceptual o de pensamiento al resolver tareas sobre generalización de patrones que involucren la interpretación y uso de la letra como número generalizado en estudiantes de grado octavo (13-15 años).

La opción de abordar secuencias figurales en este estudio reside fundamentalmente en que estos tipos de secuencias representan situaciones propicias para el desarrollo de pensamiento, razón apoyada por las sugerencias investigativas que plantea el profesor Luis Radford, expuestas por Vergel (2014b). De la misma manera, Pretexto (1996/1999) lo presenta como elemento que debe ser abordado desde el trabajo aritmético ya que permite un tránsito más natural hacia el trabajo algebraico.

Dado que asumimos una posición vygotskiana desde la tesis, según la cual el pensamiento se puede desarrollar, el plantear como recurso didáctico una serie de tareas las cuales ponen unas condiciones con el propósito de que ocurra cierto fenómeno, cobra sentido para el caso de este estudio, en tanto se pretende indagar por la manera como los estudiantes nombran o nominan las regularidades y centrar la mirada en cualquier característica que nos dé indicios de otras formas de pensamiento relacionadas con la generalización de patrones y la interpretación y uso de la letra como número generalizado.

En concordancia con lo anterior, cada una de las tareas propuestas intentaban involucrar a los estudiantes en una actividad que posibilitara ganar confianza en el trabajo que desarrollaban; y depurar constantemente las preguntas que planteábamos, consecuentemente con lo propuesto desde la metodología y previendo también ciertas dificultades asociadas con la configuración de las secuencias.

Las tareas, tomadas y ajustadas del trabajo realizado por Azarquiél (1993) y Pretexto (1999), además de otras investigaciones similares, se realizaron de manera escrita e individual en sesiones de 60 minutos aproximadamente.

En cada uno de los diseños de las tareas presentamos una secuencia figural y a partir de dicha secuencia se planteaban una serie de preguntas con las que se buscaba indagar sobre las diferentes formas de interpretación de los estudiantes con respecto a la generalización de un patrón, tal y como se pudo evidenciar en la descripción realizada anteriormente.

3.2.3 Sistematización y Clasificación de la información

La recolección de la información estuvo precedida por el diseño previo de tareas acerca de generalización de patrones, realizado en seis fases, siguiendo las orientaciones metodológicas, en coherencia con lo propuesto desde la metodología de Investigación Acción, se desarrolla a través de una serie de etapas descritas por Miguélez (2000):

Fase 1: Acercamiento e inserción en la problemática de profundización.

Fase 2: Diseño de pilotaje.

Fase 3: Diseño y/o adaptación de tareas asociadas sobre generalización de patrones.

Fase 4: Implementación de las tareas.

Fase 5: Documentación del análisis

Fase 6: Reporte de la experiencia.

Desde esta perspectiva, las fases 1 a 4 tienen un carácter cíclico, entendido como un proceso en el cual se rediseñaban las tareas siguientes a partir de la información obtenida, de los métodos y técnicas a utilizados y las acciones realizadas por los estudiantes, de tal manera que a medida que se fueran generando nuevas producciones, éstas vislumbraran elementos de juicio para pronunciarnos acerca del proceso de desarrollo planteado en la pregunta de investigación.

A partir de estas seis fases y de sus respectivos análisis, y especialmente con base en las tareas propuestas sobre generalización de patrones, profundizamos en el tipo de respuestas que daban y sus justificaciones, a partir de las producciones sobre dichas tareas.

De esta manera, indagamos sobre aspectos que iban emergiendo en el proceso, tales como respuestas de los estudiantes que a nuestro entender no eran muy claras, o por el contrario, otras producciones que mostraban interpretaciones que inicialmente no se habían tenido en cuenta en el proceso de diseño; pero en todo caso, sin ningún interés en valorar respuestas correctas o incorrectas, sino en observar los procesos que desarrollaban los estudiantes en los cuales se pudiera identificar alguna evolución asociada con la manera de identificar patrones, de reducir recursos semióticos que movilizaban, significados que elaboraban e instrumentos semióticos usados, entre otras cuestiones.

Respecto a la prueba de pilotaje, se toman como referentes los trabajos desarrollados por Küchemann (1981) con relación a las seis distintas interpretaciones que hacen los estudiantes de la letra en los contextos algebraicos:

- Letra evaluada: se le asigna un valor numérico desde el comienzo a la letra.
- Letra ignorada: la letra es ignorada o su existencia es reconocida pero sin *darle un significado*.
- Letra como objeto: la letra se reconoce como el nombre de un objeto o como el objeto en sí misma.
- Letra como incógnita específica: la letra es reconocida como un número desconocido pero específico y se puede operar sobre ella.
- Letra como número generalizado: a la letra se le reconoce como un ente con la posibilidad de tomar valores en universo dado.
- Letra como variable: la letra se ve como representante de un rango de valores inespecíficos, y se ve que existe una relación sistemática entre dos de dichos tipos de valores.

Ahora bien, Küchemann (1981), con base en los niveles de comprensión establecidos por Collis (1975) y las diferentes interpretaciones de letra, realizadas por los estudiantes, propone los siguientes niveles de comprensión del álgebra:

- NIVEL I: Bajo de las operaciones concretas (Letra evaluada y no usada/ignorada).
- NIVEL II: Superior de las operaciones concretas (Letra como objeto).
- NIVEL III: Bajo de las operaciones formales (Letra como incógnita y número generalizado).
- NIVEL IV: Superior de las operaciones formales (Letra como variable).

Lo que permitió generar una matriz de correlación al respecto de las respuestas de los estudiantes

ESTUDIANTE	NIVEL 0		NIVEL I		NIVEL II		NIVEL III		NIVEL IV		
	PREGUNTAS PLANTEADAS	RESPUESTAS	PREGUNTAS PLANTEADAS	RESPUESTAS	PREGUNTAS PLANTEADAS	RESPUESTAS	PREGUNTAS PLANTEADAS	RESPUESTAS	PREGUNTAS PLANTEADAS	RESPUESTAS	
E1	Alison Sánchez	0	0	4	13	2	1	4	0	4	0
E2	Brayan Mateus	0	0	4	11	2	0	4	3	4	0
E3	Camilo Zuleta	0	0	4	14	2	0	4	0	4	0
E4	Dayana Valbuena	0	0	4	12	2	2	4	0	4	0
E5	Diego Ramírez	0	0	4	10	2	3	4	1	4	0
E6	Francisco Vela	0	0	4	8	2	5	4	1	4	0
E7	Gissel Garzón	0	1	4	12	2	1	4	0	4	0
E8	Jessica Enríquez	0	0	4	8	2	6	4	0	4	0
E9	Laura Sánchez	0	1	4	12	2	1	4	0	4	0
E10	Leidy Aguilera	0	1	4	12	2	1	4	0	4	0
E11	Leidy Espinosa	0	0	4	13	2	1	4	0	4	0
E12	Luisa Fuentes	0	0	4	7	2	3	4	4	4	0
E13	Manuela Guerrero	0	0	4	13	2	1	4	0	4	0
E14	Natalia Rico	0	0	4	9	2	3	4	2	4	0
E15	Ronal Ruíz	0	0	4	8	2	5	4	1	4	0
E16	Walter Martín	0	0	4	8	2	5	4	1	4	0
E17	Santiago Parrado	0	1	4	10	2	3	4	0	4	0
E18	Yomaira Gamboa	0	0	4	10	2	2	4	2	4	0
		0	4	72	190	36	43	72	15	72	0

Figura 12. Matriz de correlación de las respuestas de los estudiantes en la prueba de pilotaje

En este mismo sentido, respecto a las Tareas (T1-T7) y para hacer referencia a la sistematización y clasificación de datos recogidos con las producciones de los estudiantes, tomamos como base los criterios que permiten evidenciar las etapas en el proceso de generalización descrito por Mason et al. (1985) referenciado por el grupo Azarquiél (1993):

1. Ver (regularidades)
2. Describir (Buscar precisión para comunicar - lenguajes intermedios)
3. Escribir (Expresiones simbólicas)

Estas etapas serán correlacionadas además con los siete niveles propuestos por Pretexoto (1996/1999) para el análisis de respuestas en tareas sobre patrones:

NIVEL 0: No responde.

NIVEL 1: No alcanza a encontrar el patrón de formación en lo perceptual.

NIVEL 2: Encuentra el patrón de formación únicamente en lo perceptual.

NIVEL 3: Encuentra el patrón de formación únicamente sobre lo concreto finito.

NIVEL 4: Encuentra el patrón de formación hasta lo concreto generalizado.

NIVEL 5: Encuentra el patrón de formación general y llega sólo a verbalizarlo.

NIVEL 6: Encuentra el patrón de formación general, lo verbaliza y simboliza en lenguaje intermedio.

NIVEL 7: Encuentra el patrón de formación general, lo verbaliza y simboliza en lenguaje algebraico formal.

Partiendo de la interpretación de dichas producciones, éstas se clasificaron en una matriz de manera horizontal por cada estudiante y de manera vertical con respecto a las etapas y niveles anteriormente mencionados, relacionando estos dos (etapas y niveles) de la siguiente manera:

- Ver: Niveles 1, 2 y 3
- Describir: Niveles 4 y 5
- Escribir: Niveles 6 y 7

Sin desconocer que aparezcan producciones de los estudiantes que evidencien tipificaciones distintas o intermedias con respecto a las categorías establecidas por este autor, por ejemplo, identifica el patrón y lo expresa en Lenguaje Natural (LN), identifica el patrón y lo expresa en Lenguaje Algebraico (LA), identifica el patrón y lo generaliza en LN, identifica el patrón y lo generaliza en LA, o, incluso que no hallara el patrón; lo cual permitirá determinar una correlación en los cuatro niveles de desarrollo algebraico que Küchemann (1981) categoriza, situación que será tratada más adelante en el parte del análisis descriptivo.

Los instrumentos han sido analizados a manera de un *estudio de caso* (colectivo) arrojando información significativa para la toma de decisiones en el desarrollo del proceso de profundización, en tanto, el Estudio de Caso es una herramienta valiosa de investigación, ya que su mayor fortaleza radica en que a través del mismo se mide y registra la conducta de las

personas involucradas en el fenómeno estudiado (Stake, 1998). Como por ejemplo se muestra en la figura 12, una parte de la clasificación que se hace en la matriz de correlación respecto a las producciones de los estudiantes, en torno a los niveles de generalización, ubicando cada estudiante en cada tarea y su correspondiente nivel de acuerdo a la respuesta que dio ante cierta pregunta, de manera horizontal, y de forma vertical, la organización por niveles y estudiantes.

ESTUDIANTE	TAREAS	NIVELES DE GENERALIZACIÓN								
				VER			DESCRIBIR		ESCRIBIR	
		N. 0	N. 1	N. 2	N. 3	N. 4	N. 5	N. 6	N. 7	
E9	T.2.			P1	P2	P3	P4, P5			
	T.3.			P1	P2	P3	P4, P5			
	T.4.			P1	P2	P3	P4, P5			
	T.5.			P1	P2	P3	P4	P5		
	T.6.				P1, P2	P4	P3	P5	P6	
	T.7.					P1, P2, P4, P5	P3		P6	
E10	T.1.			P1	P2	P3	P4, P5, P6			
	T.2.				P1, P2, P3	P4, P5	P6			
	T.3.			P1	P2	P3	P4	P5		
	T.4.			P1	P2	P3	P4, P5			
	T.5.			P1	P2		P3, P5			
	T.6.			P1	P2, P5	P3, P4	P6			
	T.7.			P1	P2	P3, P4	P6			
E11	T.1.			P1	P2	P3	P5, P6	P4		
	T.2.			P1	P3			P6		
	T.3.			P1	P2	P3	P5			
	T.4.			P1	P2	P3	P4, P5			
	T.5.		P1		P2					
	T.6.			P1		P4, P5, P6	P3			
	T.7.			P1	P2	P3, P4	P6			
E12	T.1.			P1		P2	P3, P4	P5	P6	
	T.2.				P1	P2, P3	P4	P5	P6	
	T.3.			P1	P2	P3		P4	P5	
	T.4.			P1	P2	P3		P4	P5	
	T.5.			P1		P2	P3, P4, P5, P6		P7	
	T.6.			P1	P2		P3, P5	P4	P6	
	T.7.			P1	P2	P3	P5	P4	P6	

Figura 13. Ejemplo de la matriz de correlación de las respuestas de los estudiantes en cada una de las tareas.

Se realizó una etapa que denominamos análisis preliminar, haciendo uso de matrices de correlación respecto a los niveles de generalización, de tal manera que, se pudiese organizar la información por cada estudiante (E) respecto a cada una de las tareas (T) implementadas, siendo estas el insumo para clasificar las producciones de los alumnos en una correspondencia de los niveles propuestos por Pretexto (1996/1999) y Mason et al. (1985), como se hizo mención anteriormente, lo que permitió realizar una clasificación de acuerdo al máximo nivel alcanzado en cada tarea por parte de cada uno de los estudiantes.

Lo anterior, teniendo en cuenta que se utilizará posteriormente en el capítulo de Análisis Descriptivo de la información, haciendo énfasis en los procesos de desarrollo cognitivo y del pensamiento respecto a las tareas sobre generalización de patrones, que tienen los estudiantes de octavo grado, de acuerdo con los planteamientos de Vygotski.

Capítulo 4

Análisis de la Información

Desde la perspectiva de la evaluación del proceso analítico, teniendo en cuenta que lo que se pretende principalmente es promover el desarrollo del concepto de la letra como número generalizado, provocado por situaciones sobre generalización de patrones que obliguen cierto tipo de procesos, manipulaciones y representaciones, se hace necesario el uso de instrumentos como las tareas, dado que, se procura reportar las reflexiones que apunten a dar respuesta a la pregunta: ¿Qué proceso de desarrollo sobre la interpretación y uso de la letra como número generalizado evidencian estudiantes de grado octavo al resolver tareas sobre generalización de patrones?

Así, la idea de desarrollo vygotskiana que se utiliza en el análisis, descrita en el marco teórico, será el eje central del presente capítulo; de acuerdo con los trabajos desarrollados por Mason et al. (1985), referenciado en Azarquiél (1993), en cuanto al desarrollo de la capacidad de generalizar, expresando lo general verbalmente o con ayuda de símbolos, a través de las etapas de Ver (regularidades), Describir (Buscar precisión para comunicar - lenguajes intermedios), y Escribir (Expresiones simbólicas), ligadas a los ocho niveles propuestos por Pretexto (1996/1999) respecto a el análisis de respuestas en tareas sobre patrones.

En tal sentido, dado que el desarrollo está dirigido a promover grados crecientes de dominio autónomo (consciente y voluntario) y descontextualizado de los instrumentos de mediación semiótica; las tareas implementadas privilegian, junto con la actividad desplegada por los estudiantes, el acceso al dominio de los instrumentos de mediación con un carácter acentuadamente descontextualizado, lo cual debería posibilitar un acceso a formas de conceptualización propia de las matemáticas, en este caso del álgebra, lo que ha permitido realizar unos pronunciamientos respecto al desarrollo que alcanzan los estudiantes a través de sus producciones en el desarrollo de las tareas y en las actividades mismas.

De esta manera, se presenta un análisis de las tareas propuestas, desde la tarea 1 (T1) hasta la tarea 7 (T7), lo que permitió obtener una sensibilidad analítica y poder tomar decisiones en torno a los estudiantes que iban a ser sujetos de un estudio más profundo, en tanto sus producciones proporcionaban una mayor cantidad de información acerca del uso e interpretación que le daban a la letra, y su proceso de desarrollo a medida que se avanzaba en cada una de las tareas.

Luego, coincidimos con Soneira (2006, p. 156) cuando sostiene que:

El investigador selecciona casos a estudiar según su potencial para ayudar a refinar o expandir los conceptos o teorías ya desarrollados. La “saturación teórica” significa que agregar nuevos casos no representará hallar información adicional por medio de la cual el investigador pueda desarrollar nuevas propiedades de las categorías.

Tal como lo plantea Vergel (2014b, p. 105), es necesario aclarar que “la saturación teórica no tiene una interpretación objetiva, ni es calculable, ni medible”. En dicho sentido, el mismo autor señala:

[...] llega un momento en el cual hay que tomarse una responsabilidad personal como investigador y decidir que ya es suficiente. Soneira (2006, p. 157) precisa que “codificar supone siempre un corte o fractura de los datos”, lo cual sugiere un esfuerzo en leer y releer los datos para descubrir relaciones.

En cuanto a la constitución de los datos de nuestra investigación, éstos se abordarán desde una visión metodológica de acuerdo con lo planteado por Glaser (1978, 2002), Glaser & Strauss (1967) y Soneira (2006), de manera que se visibiliza un proceso de codificación abierta precedido por el criterio de foco teórico al tener en consideración de manera permanente nuestra pregunta y objetivo de investigación.

Entonces, el conjunto de datos está constituido por las producciones escritas de cada uno de los estudiantes, las cuales se establecieron de la siguiente manera: 19 para cada una de las dos primeras tareas y 15 hojas de trabajo para las Tareas de la 3 a la 7, para un total de 113 hojas de trabajo durante las 7 sesiones llevadas a cabo.

A partir de dicha información, se clasificaron las producciones con respecto a las preguntas realizadas en las tareas propuestas, observando respuestas redundantes o poco pertinentes y las que no eran de utilidad. Este proceso de reducción y análisis de datos siempre estuvo regido por el criterio fundamental del foco teórico, teniendo en cuenta no sólo la pregunta y los objetivos de investigación, sino también lo concerniente al concepto de desarrollo, facilitando así la comprensión y el avance en el proceso de análisis de los datos, haciéndose indispensable la capacidad de separar lo que era relevante y lo que no.

Luego, considerando permanentemente el foco teórico, se procede a realizar una segmentación temática marcando con diferentes colores lo que a nuestro juicio se constituían en indicios que mostraban elementos o aspectos asociados con las categorías propuestas para el análisis de respuestas en tareas sobre patrones (Pretexto 1996/1999) y relacionados además con los pasos en el proceso de generalización (Azarquiél, 1993). Se marcó con color naranja aquellas respuestas que indicaban lo relacionado con la etapa de ver regularidades en una secuencia de patrones figurales correspondientes con los niveles 1,2 y 3; con color amarillo las producciones que indicaran la etapa de describir, lo relacionado con la búsqueda de precisión para comunicar y el uso de lenguajes intermedios correspondientes a los niveles 4 y 5 y con color verde todo aquello que indicara el uso de expresiones simbólicas y lenguaje algebraico formal correspondientes a los niveles 6 y 7.

En concordancia con lo anterior, el proceso llevó a seleccionar las hojas de trabajo correspondientes a cada una de las tareas, las cuales arrojaban información sobre procesos de acercamiento o desarrollo que se evidencian en estudiantes de grado octavo al resolver tareas sobre generalización de patrones que exijan la interpretación y uso de la letra como número generalizado.

En este sentido, de acuerdo con Vergel (2014b), la información se convierte en dato cuando damos sentido a ésta, en este caso a través del concepto de desarrollo y de la teoría relacionada con la generalización de patrones y el uso de la letra como número generalizado. Estos datos, obtenidos a partir de las producciones de los estudiantes, fueron objeto de profundización analítica con miras a responder nuestra pregunta de investigación.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente y partiendo de la premisa de que el análisis de datos es un proceso activo e interactivo en la investigación, dicho análisis debe entonces documentarse integrando diferentes puntos de vista, el cual, en este caso se realiza a manera de triangulación entre los dos autores (Investigador 1, Investigador 2) y posteriormente la intervención de un tercero, investigador experto (Investigador 3 – Director del trabajo de grado), quien realizará algunas recomendaciones al respecto con el fin de ahondar en dicho proceso y encontrar respuestas asertivas en relación al evento asumido como objeto de estudio.

A través de un análisis cruzado de la información se pueden obtener datos de gran interés que permitan no sólo el contraste de los mismos, sino que también puede ser un medio de obtener otros datos que no han sido aportados en un primer nivel de lectura de la realidad.

En este sentido, múltiples observadores pueden no concordar en lo que observan, dado que cada observador tiene experiencias interaccionales únicas en el fenómeno observado, por lo tanto, a través de la diversidad de miradas, la diferencia en el tratamiento de los resultados, las distintas formas de análisis de los datos y el contraste y discusión sobre los mismos, conlleva a un mayor grado de objetividad.

4.1 Análisis de la información

A continuación se presenta un análisis de las tareas dispuestas explicando las razones de este diseño y su justificación teórica teniendo en consideración de manera permanente la pregunta y objetivo de investigación.

En este sentido es pertinente considerar algunos aspectos importantes a observar en el uso e interpretación de la letra en contextos algebraicos, los cuales se tuvieron en cuenta para el diseño de las tareas propuestas:

- a) Naturaleza y significado de los símbolos y letras
- b) Objetivo de la actividad y naturaleza de las respuestas en álgebra

- c) Comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes
- d) Uso inapropiado de “fórmulas” o reglas de procedimiento”

Entonces, se realiza el análisis de las producciones de nuestros estudiantes con respecto a las siete tareas propuestas sobre generalización de patrones, además de una tarea adicional, la “tarea de los sobres”, con la que se pretendía mirar la forma en como manejaban lo desconocido; colando la mirada en la información acerca del uso e interpretación que le daban a la letra en cada una de ellas y así llegar a pronunciamientos sobre su proceso de desarrollo conceptual o del pensamiento.

4.1.1 Tarea 1: Identidad

Considere la siguiente secuencia:




fig 1




fig 2




fig 3




fig 4

- ✓ Dibuje las tres próximas figuras de la secuencia.
- ✓ ¿Cuántos triángulos tendrá la fig. 10, fig. 15, fig. 30, fig. 77?
- ✓ ¿Qué posición dentro de la secuencia ocuparán las figuras con 24, 42 y 100 triángulos?
- ✓ ¿Cuál es el menor número de triángulos que pueden conformar una figura de la secuencia? ¿Cuál el mayor número de triángulos?
- ✓ Determine de qué depende la cantidad de triángulos en cada figura en la secuencia. Explique su respuesta.
- ✓ Si se pudiera representar mediante alguna expresión la dependencia entre la cantidad de triángulos y cada figura en la secuencia, ¿Cuál sería y por qué?

Figura 14. Análisis Tarea 1: Identidad

En esta tarea se presenta la identidad respecto al número de triángulos y el número de la figura correspondiente a dicha cantidad; además de solicitar una justificación verbal en las últimas tres preguntas.

En general, podemos decir que los estudiantes lograron capturar el patrón, verbalizaron la relación de identidad reconociendo la relación del orden de la figura con la cantidad de triángulos para cada posición y reconocieron la infinitud de los números. Cuando se les preguntó por el mayor número de triángulos que pueden conformar una figura de la secuencia, varios estudiantes utilizaron como referencia el número 100 respondiendo que “mayor que 100” y otros por su parte respondieron que la cantidad era infinita.

En este sentido, el mínimo nivel alcanzado por el grupo fue N2, es decir, alcanza a reconocer el patrón solamente en lo perceptual; por el contrario, el máximo nivel alcanzado fue el N7, en que encuentra el patrón, lo verbaliza y simboliza en lenguaje algebraico formal. De esta manera, en relación a información particular; el nivel preponderante fue el N5, en el que se encuentra el patrón de formación general y lo verbaliza.

Por ejemplo:

E10: Alcanzó un máximo nivel N5, quien ante las tres últimas preguntas expresa de manera verbal:

- ✓ ¿Cuál es el menor número de triángulos que pueden conformar una figura de la secuencia?
¿Cuál el mayor número de triángulos?

R/: “El menor número de triángulos es 1 que pertenece a la fig 1.”; “Es infinito puesto que según el número de la figura es el número de triángulos”.

- ✓ Determine de qué depende la cantidad de triángulos en cada figura en la secuencia. Explique su respuesta.

R/: “Depende del número de la figura, si la figura tiene 6 lados es la fig 6”

- ✓ Si se pudiera representar mediante alguna expresión la dependencia entre la cantidad de triángulos y cada figura en la secuencia, ¿Cuál sería y por qué?

R/: “La cantidad de triángulos depende según el número de la figura, ej: si la figura es número 2 tendría 2 triángulos.

E12: Alcanzó un máximo nivel N7, quien ante las tres últimas preguntas expresa de manera verbal:

- ✓ ¿Cuál es el menor número de triángulos que pueden conformar una figura de la secuencia?
¿Cuál el mayor número de triángulos?

R/: “Pues la menor figura sería la 1 porque tiene un triángulo y la mayor será pues la figura pues la secuencia no tiene final”.

- ✓ Determine de qué depende la cantidad de triángulos en cada figura en la secuencia. Explique su respuesta.

R/: “pues por el No. de la figura, pues el No. de la figura es el número de triángulos”, además hace uso de un recurso tabular de los datos para ejemplificar, como se observa en la Figura 15:

ej	Fig	1	2	3	4...
	triángulos	1	2	3	4...

Figura 15. Representación 1 de producción E12 – T1

- ✓ Si se pudiera representar mediante alguna expresión la dependencia entre la cantidad de triángulos y cada figura en la secuencia, ¿Cuál sería y por qué?

R/: Hace uso de un recurso tabular, además de utilizar la letra “n” como recurso de generalización, como se evidencia en la Figura 16:

Fig	1	2	3	...	n
triángulos	1	2	3	...	n

(n) = (n)

Figura 16. Representación 2 de producción E12 – T1

E14: Se clasificó en 5 como máximo nivel, quien ante las tres últimas preguntas expresa de manera verbal:

- ✓ ¿Cuál es el menor número de triángulos que pueden conformar una figura de la secuencia?
¿Cuál el mayor número de triángulos?

R/: “El menor número de triángulos es 1 y la mayor sería 4”.

- ✓ Determine de qué depende la cantidad de triángulos en cada figura en la secuencia. Explique su respuesta.

R/: “Se determina la cantidad de triángulos con la posición de la secuencia, por ejemplo:” Anexa un gráfico para ejemplificar su argumento, como se muestra en la Figura 17:

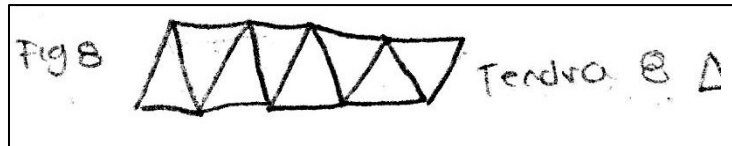


Figura 17. Representación 1 de producción E14 – T1

- ✓ Si se pudiera representar mediante alguna expresión la dependencia entre la cantidad de triángulos y cada figura en la secuencia, ¿Cuál sería y por qué?


R/: No generó ninguna respuesta.

En tanto esta tarea pretendía acercar y familiarizar a los estudiantes con el manejo de secuencias con patrones figurales y el tipo de preguntas, no es ingenuo obtener producciones en las que se encontraran preguntas sin abordar, simplemente justificaciones medianamente elaboradas o muy bien argumentadas de acuerdo a la comprensión de la tarea misma. Lo que en nuestro criterio es un buen punto de partida respecto al planteamiento y producción de las tareas posteriores.

4.1.2 Tarea 2: Identidad-Perímetro


En la siguiente secuencia se muestran unos cuadrados que van aumentando en tamaño de acuerdo con la longitud de sus lados:

fig 1




1

fig 2



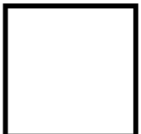
2

fig 3



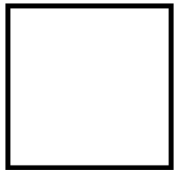
3

fig 4



4

fig 5



5

...

- ✓ Determine la medida del lado de las figuras 6, 7, 10, 15.
- ✓ Si el perímetro de una figura es la suma de la medida de sus lados, ¿Cuál es el perímetro de cada figura anterior?
- ✓ Registre en una tabla el número de la figura, la medida del lado de cada cuadrado y su respectivo perímetro.
- ✓ ¿Qué regularidades encuentra con respecto a los datos de la tabla?
- ✓ ¿Cómo podría hallarse la medida del lado de cualquier figura?
- ✓ ¿Cómo podría hallarse el perímetro del cuadrado de cualquier figura?

Figura 18. Análisis Tarea 2: Identidad-Perímetro

En esta tarea se presenta la identidad respecto al número de la figura y la medida del cuadrado, pero adicionalmente, se involucra una operación en tanto se pregunta por el perímetro de los cuadrados en cada figura. Involucrando el manejo de una tabla (no proporcionada) para organizar los datos y manteniendo la solicitud de una justificación verbal en las últimas tres preguntas.

En términos generales, en esta tarea los estudiantes identificaron los múltiplos de 4 como aspecto relevante para resolver cada elemento de la sucesión, de esta manera realizaron multiplicaciones por 4 para hallar las áreas o en su defecto realizaban las sumas de sus lados, teniendo en cuenta el orden de cada figura como aspecto clave en la captura del patrón.

Así pues, el mínimo nivel alcanzado por el grupo fue N1, es decir, algunos estudiantes no alcanzaron a reconocer el patrón en lo perceptual; por el contrario, el máximo nivel alcanzado fue el N7, en el que encuentra el patrón, lo verbaliza y simboliza en lenguaje algebraico formal. En tal sentido, en relación a información particular; en este sentido, el nivel preponderante fue el N4, en el que se encuentra el patrón hasta lo concreto generalizado. De acuerdo con esto se presentan los siguientes ejemplos:

E10: Alcanzó un máximo nivel N5, quien ante las cuatro últimas presenta las siguientes respuestas:

- ✓ Registre en una tabla el número de la figura, la medida del lado de cada cuadrado y su respectivo perímetro.

# FIGURA	1	2	3	4	5	6	7	10	15
Medida del cuadrado	1	2	3	4	5	6	7	10	15
Perímetro	4	8	12	16	20	24	28	40	60

Figura 19. Representación 1 de producción E10 – T2

- ✓ ¿Qué regularidades encuentra con respecto a los datos de la tabla?

R/: “Según la figura es la medida de ella”

- ✓ ¿Cómo podría hallarse la medida del lado de cualquier figura?

R/: “Se podría hallar según el perímetro que te den”

- ✓ ¿Cómo podría hallarse el perímetro del cuadrado de cualquier figura?

R/: “Sumando sus lados o multiplicando su medida por 4 lados”

E12: Alcanzó un máximo nivel N7, así mismo, ante las cuatro últimas preguntas expresa:

- ✓ Registre en una tabla el número de la figura, la medida del lado de cada cuadrado y su respectivo perímetro.

Fig	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Perímetro	4	8	12	16	20	24	28	32	...

Fig	1	2	3	4	5	...
med. lds de los lados	1	2	3	4	5	...
perímetro	4	8	12	16	20	...

Figura 20. Representación 1 de producción E12 – T2

- ✓ ¿Qué regularidades encuentra con respecto a los datos de la tabla?

R/: “Pues el número de la figura se multiplica por 4 y/o con el número anterior a la base se le suma 4. Ej: $4 + 4 = 8$; $8 + 4 = 12$, etc”

- ✓ ¿Cómo podría hallarse la medida del lado de cualquier figura?

R/: “Pues la fórmula para poder saber es muy obvia, sería la misma letra n [...]” adjuntando a manera de ejemplo una representación tabular:

ej figura	1	2	3	n
lado	1	2	3	n

Figura 21. Representación 2 de producción E10 – T2

- ✓ ¿Cómo podría hallarse el perímetro del cuadrado de cualquier figura?

R/: Se describe en la Figura 10:

sería $n \cdot 4$ es $1 \cdot 4 = 4$
 $2 \cdot 4 = 8$

Figura 22. Representación 3 de producción E12 – T2

E14: Alcanzó un máximo nivel N3, además, ante las cuatro últimas preguntas manifiesta:

- ✓ Registre en una tabla el número de la figura, la medida del lado de cada cuadrado y su respectivo perímetro.

# Fig	1	2	3	4	5
Medida lado	1	2	3	4	5
Medida Perímetro	2	4	6	8	10

Figura 23. Representación 1 de producción E14 – T2

- ✓ ¿Qué regularidades encuentra con respecto a los datos de la tabla?

R/: “Que va aumentando en número de sus lados de acuerdo a la posición de la figura”

- ✓ ¿Cómo podría hallarse la medida del lado de cualquier figura?

R/: “Sabiedo cual es el perímetro de la figura se puede saber la medida de sus lados”

- ✓ ¿Cómo podría hallarse el perímetro del cuadrado de cualquier figura?

R/: “Sumando la medida de sus lados se puede hallar el perímetro”

Con respecto a esta tarea, se pretendía abordar similitud con la tarea anterior, pero con la diferencia de involucrar un procedimiento adicional donde se tuviese que operar con los datos obtenidos al identificar la secuencia, mostrando que su nivel de dificultad aumentó en ciertos casos, lo cual se refleja en el máximo nivel alcanzado por el grupo, sin dejar de lado que involucrar un nuevo concepto como el perímetro lleva a los estudiantes a tener que poseer claridad interpretativa en las instrucciones y comprensión del uso de la tabla para responder de forma clara su abstracción de la información registrada, es decir, el uso de la tabla en la mayoría de los casos sirvió como herramienta para desarrollar pronunciamientos en torno a las preguntas subsiguientes, sin que ésta sea el único medio para tal fin.

Esta reflexión, en cuanto al diseño se refiere, nos permitió generar ciertos cambios en la manera de presentar las preguntas de las siguientes tareas, en tanto no se presentaron listadas, sino en recuadros distribuidos en la hoja de trabajo.

4.1.3 Tarea de los sobres

Si bien la tarea y la consiguiente actividad que llamamos de los sobres ha sido propuesta en el contexto internacional, para poner en evidencia ciertas características del desarrollo del pensamiento algebraico (por ejemplo en alumnos jóvenes), en nuestro estudio, consideramos pertinente introducirla para favorecer una aproximación al trabajo con lo desconocido, dadas las dificultades que emergieron en las producciones de los estudiantes con respecto a las tareas 1 y 2 ya reportadas.

Leonardo y Carolina participan en la rifa de boletas para ingresar a las funciones de un festival de cine. Las boletas están guardadas en sobres, cada uno de los cuales contiene el mismo número de boletas. Leonardo, quien ya tenía 7 boletas, ganó 1 sobre y Carolina, quien ya tenía 2 boletas, ganó 2 sobres. Si ahora los dos quedan con el mismo número de boletas, ¿cuántas boletas contiene cada sobre? ...

Resuelva este problema, ¡sin usar álgebra!

Figura 24. Análisis Tarea de los sobres

Ahora bien, en la tarea además de lo mencionado anteriormente, se pretendía que los estudiantes llegaran a obtener 12 como la cantidad de boletas que tenía cada persona, es decir, que la cantidad en cada sobre fuera de 5 boletas. Al respecto, se encontraron producciones diversas, entre las cuales se hacía uso de gráficos y producción textual principalmente, por ejemplo:

E2: propone una organización de la información proporcionada en una especie de tabla, para luego llegar a determinar la cantidad boletas en el sobre sin ninguna operación o proceso aparente, tal como lo vemos en la siguiente figura.

Nombre	N. Boletas	N. sobres
Leonardo	7	1
Carolina	2	2

...

En cada sobre hay 5 boletas.

Porque si Leonardo tiene 7 Boletas y gana un sobre.

Rta) = 5 Boletas - 5 son 12, y Carolina que tiene 2 Boletas y se gana 2 sobres son 12.

Figura 25. Representación 1 de producción E2 – Tarea de los sobres

Por otra parte, E12 plantea que operó a través de ensayo y error para llegar a la cantidad de boletas en cada sobre, presentando posteriormente el diagrama que se muestra en la Figura 26.

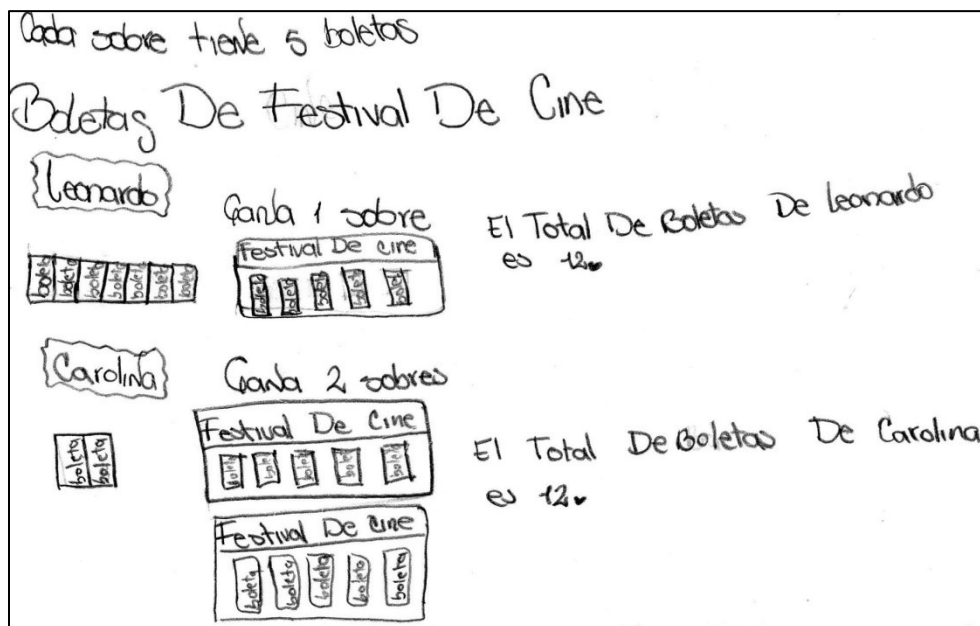


Figura 26. Representación 1 de producción E12 – Tarea de los sobres

En esta representación se evidencia el uso separado de las cantidades de boletas y sobres correspondientes a cada uno, así como el número de boletas en cada sobre, relacionando las cantidades según las condiciones del problema.

Así mismo, E16 presenta inicialmente unos gráficos de las condiciones del problema, lo que podría catalogarse como el planteamiento de la situación en términos gráficos, utilizando el signo de interrogación “?” como representación de incógnita en cada sobre, tal como se muestra a continuación:

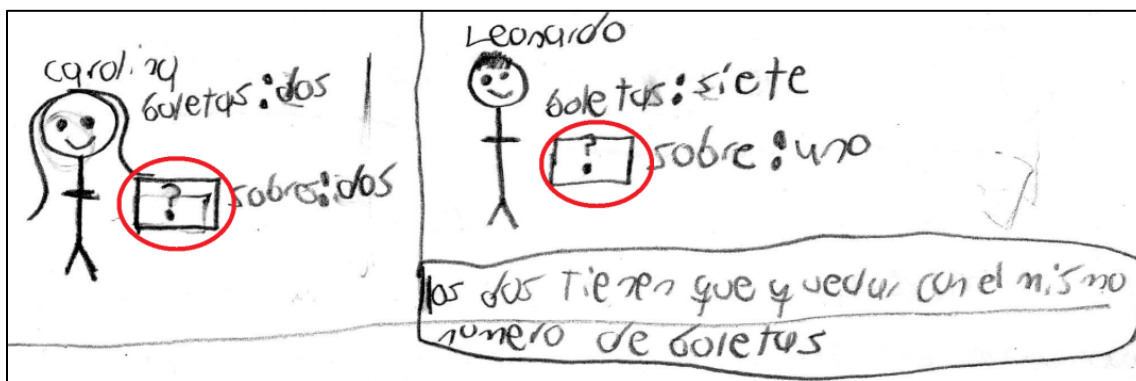


Figura 27. Representación 1 de producción E16 – Tarea de los sobres

Posteriormente, el estudiante presenta una secuencia de cómo llegó a la respuesta de forma gráfica, aumentando cada vez una boleta en cada sobre, cambiando las cantidades en cada uno de manera correspondiente para cada persona, hasta llegar a una cantidad igual para cada uno. Procedimiento en el que se muestra el uso de un cuadro para representar cada sobre, en el que le va asignado valores diferentes a ese signo “?” utilizado inicialmente, pero sin perder el contexto de la situación. Tal como se evidencia en la siguiente figura:

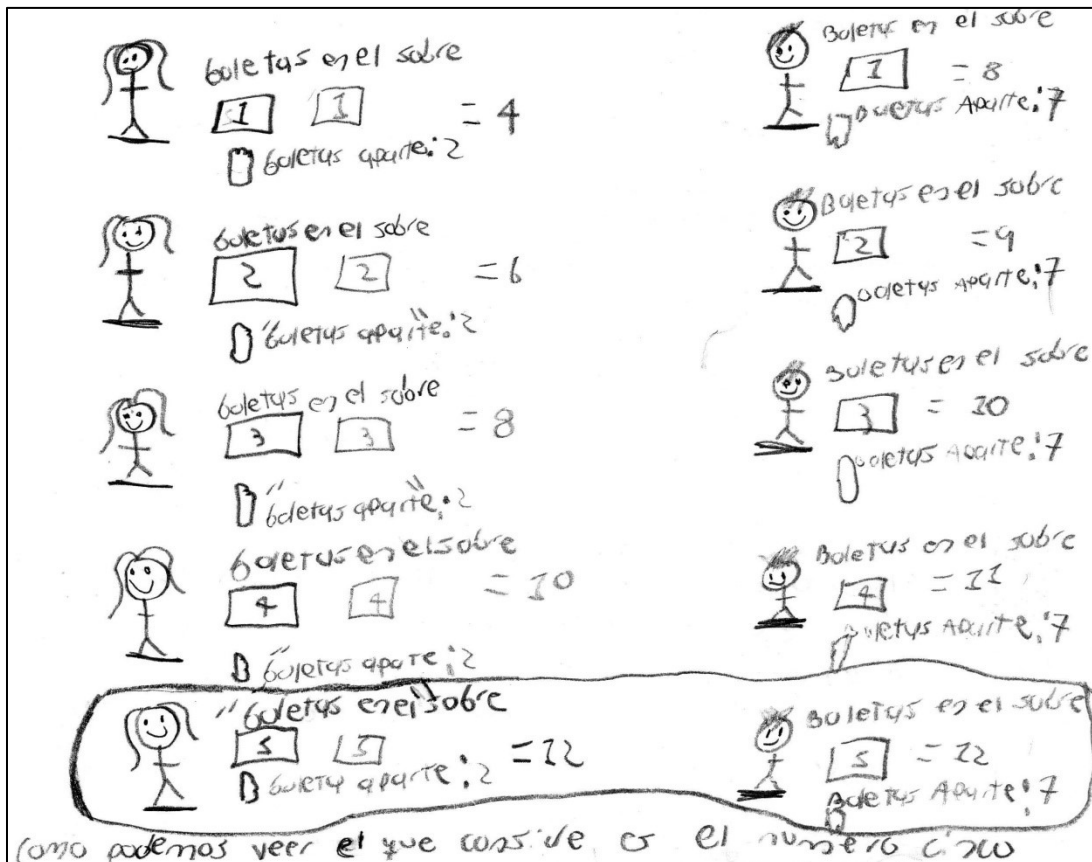


Figura 28. Representación 2 de producción E16 – Tarea de los sobres

La producción matemática de algunos estudiantes, específicamente con respecto a la tareas 5, al parecer pone en evidencia ciertas características del trabajo llevado a cabo en la tarea de los sobres, específicamente el tratamiento con lo desconocido. En dicha tarea, una estudiante, por ejemplo (fig. 29), plantea una serie de operaciones dispuestas entre casillas vacías que representan los valores del patrón por los cuales se le ha preguntado en la tarea. Posteriormente rellena dichos cuadros con la letra equis “x” y en cada caso explica lo que ésta significa, lo cual sugiere un carácter operatorio de lo desconocido. El desarrollo del pensamiento, según la perspectiva vygotskiana, está precisamente ligado a nuevas formas cualitativas de usar las

palabras y los signos. Este nuevo uso, indudablemente, repercute en la cognición en una especie de plasticidad semiótica de la mente humana (D'Amore, Fandiño & Iori, 2013), lo cual refiere a la capacidad de esta de ser modificada por el uso de signos. En este sentido los signos forman parte de un sistema estableciendo un entramado semántico complejo. En otras palabras, los signos, y también los artefactos, se incrustan o encarnan en la manera en que los estudiantes piensan y llegan a conocer, son instrumentos que recrean y reorganizan la estructura del comportamiento humano (Vygotski, 1929; Vergel, 2015).

Recordemos que en la tarea de los sobres exigíamos explícitamente que los estudiantes no usaran álgebra.

a. La cantidad total de baldosas para cualquier habitación

$$\boxed{x} \times \boxed{x} + \boxed{x} = \boxed{x}$$

No. habitaciones. No. habitaciones. Cant. baldosas blancas Cantidad de baldosas de la habitación

b. La cantidad de baldosas oscuras para esa habitación

$$\boxed{x} \times \boxed{x} = \boxed{x}$$

No. habitaciones. No. habitaciones. Baldosas oscuras $x =$ valor de baldosas oscuras.

c. La cantidad de baldosas blancas para esa habitación

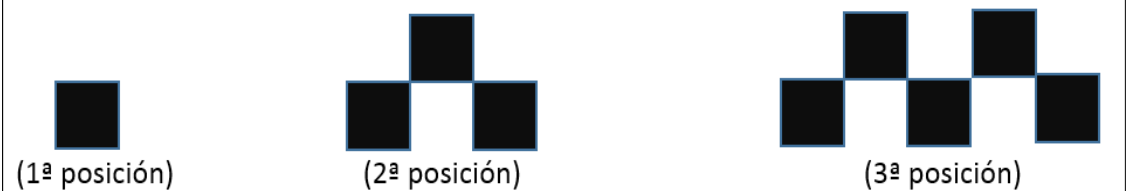
$$\boxed{x} \div \boxed{x} = \boxed{x}$$

Cant. baldosas de la habitación. No. habitaciones. Baldosas blancas $x =$ valor de baldosas blancas

Figura 29. Representación de producción E6 – T5

4.1.4 Tarea 3: Cuadros - Impares

Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas



(1ª posición) (2ª posición) (3ª posición)

- ✓ Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición.
- ✓ Calcule el número de cuadros de la figura correspondiente a la 9ª posición.
- ✓ Calcule el número de cuadros de la figura de la posición 100
- ✓ Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior.
- ✓ Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición.

Figura 30. Análisis Tarea 3: Cuadros-impares

En esta tarea se aborda una secuencia de los números impares, en tanto se pretende que los estudiantes lleguen a la expresión $2n - 1$, con $n = 1, 2, 3, \dots$ como generalización de la cantidad de cuadros en cada una de las posiciones, solicitando además una justificación verbal en las últimas dos preguntas.

Como hallazgos obtenidos en esta tarea, tenemos que los estudiantes capturan el patrón encontrando las características propias de la secuencia, asignando nombres a las figuras para hallar los valores en cada caso. Para ello verbalizan las operaciones fijando su atención de manera segmentada, es decir, vieron cada figura subdividida en dos partes: la de “arriba” y la de “abajo” y al relacionar estas dos con el número de la posición de cada figura, realizan una operación para hallar el número en cada caso. En términos generales, los estudiantes lograron ver el patrón y lo verbalizan explicando las operaciones realizadas.

Luego, el mínimo nivel alcanzado por el grupo fue N1, es decir, no alcanza a reconocer el patrón en lo perceptual; por el contrario, el máximo nivel alcanzado fue el N7, en que encuentra el patrón, lo verbaliza y simboliza en lenguaje algebraico formal. En tal sentido, el nivel preponderante fue el N3, en el que se encuentra el patrón únicamente en lo concreto finito. Así pues:

E10: Alcanzó un máximo nivel N6, quien ante las tres últimas preguntas respondió:

- ✓ Calcule el número de cuadros de la figura de la posición 100.

R/: “Tendría 199 cuadros”

- ✓ Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

R/: “Porque se escribe el número de cuadros que indica su posición más su número anterior, en este caso sería: $100+99=199$ cuadros”.

- ✓ Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición.

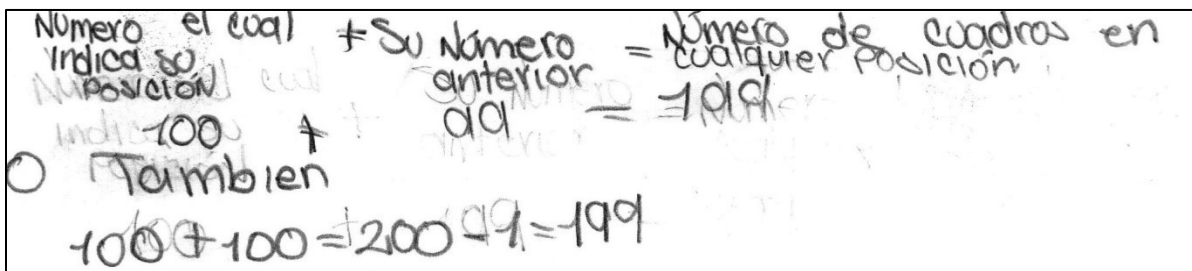


Figura 31. Representación 1 de producción E10 – T3

E12: Alcanzó un máximo nivel N7, así mismo, ante las tres últimas preguntas expresa:

- ✓ Calcule el número de cuadros de la figura de la posición 100.

R/: “Hay 199 cuadros en la posición 100”

- ✓ Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

R/: “Pues la forma más fácil es sabiendo que en los cuadros de abajo hay la misma cantidad que en número de posición, y que en los cuadros de arriba siempre tienen un cuadro menos que los cuadros de abajo. O aún más fácil la fórmula $F * 2 - 1$ ”.

- ✓ Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición.

R/: $F =$ posición de la figura $F * 2 - 1$

E13: Alcanzó un máximo nivel N6, además, ante las tres últimas preguntas manifiesta:

✓ Calcule el número de cuadros de la figura de la posición 100.

R/: No genera la respuesta en términos de una cantidad. Escribe: “ $n + n - 1$ ”

✓ Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

R/: “Pues miré la secuencia y me di cuenta que al número se le sumaba el mismo número pero se le resta 1. Ejemplo: $3 + 3 - 1 = 5$ ”.

✓ Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición.

R/: Posición: $n + n - 1 = 2n - 1$

A partir de las producciones de los estudiantes, empezamos a notar que ellos inician un acercamiento más claro con respecto al uso de expresiones alfa-numéricas para generalizar las regularidades encontradas. Ahora bien, así el nivel de complejidad aumentara, en tanto se requiere de una identificación clara de las regularidades en torno a las cantidades de la fila inferior y la fila superior, se evidencia que a través del continuo contacto con este tipo de tareas, conlleva a tener mayor destreza y habilidad al momento de abordar cada tarea.

4.1.5 Tarea 4: Triángulos- Potenciación

Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas




fig 1




fig 2

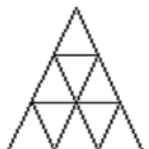


fig 3

- ✓ Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición.
- ✓ Calcule el número de triángulos pequeños de la figura correspondiente a la 9ª posición.
- ✓ Llene la tabla con los siguientes datos. (*Se proporciona una tabla*)
- ✓ Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior.
- ✓ Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de triángulos pequeños que tiene una figura en cualquier posición.

Figura 32. Análisis Tarea 4: Triángulos - potenciación

En esta tarea se aborda una secuencia en la que se pretende que los estudiantes lleguen a la expresión n^2 como generalización de la cantidad de triángulos pequeños en cada una de las posiciones, solicitando además una justificación verbal en las últimas dos preguntas.

En las producciones de los estudiantes se evidencia el reconocimiento del patrón por medio de procedimientos algorítmicos de multiplicación y potenciación. De la misma manera, la construcción de la tabla da cuenta de las operaciones efectuadas con respecto a la relación entre la posición y el número de triángulos en cada figura en las que además proponen operaciones y describen procedimientos con lenguaje natural.

Luego, el mínimo nivel alcanzado por el grupo fue N2, es decir, encuentra el patrón únicamente en lo perceptual; por el contrario, el máximo nivel alcanzado fue el N7, en que encuentra el patrón, lo verbaliza y simboliza en lenguaje algebraico formal. En tal sentido, el nivel preponderante fue el N5, en el que se encuentra el patrón de formación general y lo verbaliza. Así pues:

E12: Alcanzó un máximo nivel N7, quien ante las dos últimas preguntas respondió:

- ✓ Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

R/:

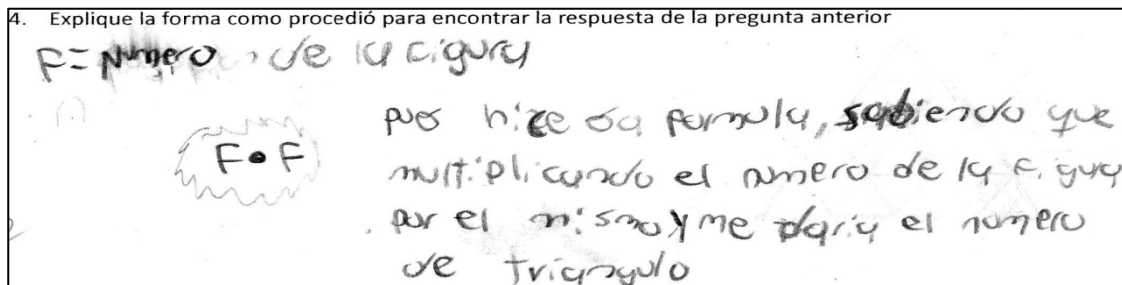


Figura 33. Representación 1 de producción E12 – T4

“Pues hice esa fórmula, sabiendo que multiplicando el número de la figura por el mismo y me daría el número de triángulo”.

- ✓ Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de triángulos pequeños que tiene una figura en cualquier posición.

R/: $f = \text{número de la figura} \quad f * f$

E13: Alcanzó un máximo nivel N6, así mismo, ante las dos últimas preguntas expresa:

- ✓ Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

R/: “Para hallar la respuesta multipliqué el número de la figura por ese mismo número. Ejemplo:

$$9 \cdot 9 = 81 \text{ ”.}$$

- ✓ Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de triángulos pequeños que tiene una figura en cualquier posición.

R/: $n \cdot n = n$

Aunque la conclusión en la fórmula no es la esperada del todo (n^2), se nota presencia del uso de la letra y comprensión de las regularidades encontradas.

E15: Alcanzó un máximo nivel N6, además, ante las tres últimas preguntas manifiesta:

- ✓ Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

R/: “Pues se multiplica el número de la figura con el mismo número. Ejemplo $4 \times 4 = 16$ ”.

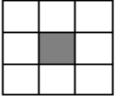
- ✓ Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de triángulos pequeños que tiene una figura en cualquier posición.

R/: La fórmula es $n^2 = n \cdot n$

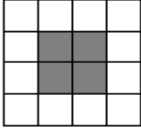
De esta manera, en la tarea propuesta se pretendía abordar una secuencia figural con triángulos, involucrando como operación el producto del número de la figura por sí misma, es decir, inducir el manejo de la potenciación. Se evidencia que aunque el nivel de dificultad aumentó en ciertos casos, la mayor parte de los estudiantes lograron identificar las regularidades principalmente desde la tabla, lo que se refleja en el máximo nivel alcanzado por el grupo, sin dejar de lado que algunos estudiantes no lograron establecer el producto como una potencia, pero si hacen uso de la letra como signo de generalización.

4.1.6 Tarea 5: Baldosas- Potenciación-Área

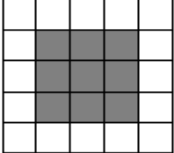
Observa el piso de las siguientes habitaciones y las baldosas que lo forman



Habitación No. 1



Habitación No. 2



Habitación No. 3

- ✓ Dibuja la Habitación que sigue.
- ✓ Llena la tabla con los siguientes datos. (Se proporciona una tabla)
- ✓ ¿Cómo se va obteniendo el número de baldosas oscuras?
- ✓ ¿Cómo se van obteniendo el número de baldosas blancas?
- ✓ Si nos dan la cantidad de baldosas blancas que tiene el borde de una habitación, explique:
 - a. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad total de baldosas de esta habitación?
 - b. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas oscuras para esa habitación?
 - c. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas blancas para esa habitación?
- ✓ Escriba una operación con la que se pueda encontrar:
 - a. La cantidad total de baldosas para cualquier habitación.
 - b. La cantidad de baldosas oscuras para esa habitación.
 - c. La cantidad de baldosas blancas para esa habitación.

Figura 34. Análisis Tarea 5: Baldosas - potenciación

En esta tarea se aborda una secuencia en la que se pretende que los estudiantes lleguen a la expresión n^2 para las baldosas oscuras, $4n + 4$ para las baldosas blancas y $(n + 2)^2$ para el total de baldosas; solicitando además una justificación verbal en las últimas dos preguntas.

Las producciones de los estudiantes demuestran que capturan el patrón y en su descripción verbal hacen uso de letras para referirse a la base y la altura, determinando las áreas para cada figura mediante una multiplicación con dichas letras, sin embargo se evidencia en la mayoría de los casos la necesidad de ejemplificar con expresiones numéricas específicas.

Para este caso, el mínimo nivel alcanzado por el grupo fue N2, es decir, encuentra el patrón únicamente en lo perceptual; por el contrario, el máximo nivel alcanzado fue el N7, en que encuentra el patrón, lo verbaliza y simboliza en lenguaje algebraico formal. En tal sentido, el nivel preponderante fue el N5, en el que se encuentra el patrón de formación general y lo verbaliza. Así pues:

E10: Alcanzó un máximo nivel N5, quien ante las dos últimas preguntas respondió:

- ✓ Si nos dan la cantidad de baldosas blancas que tiene el borde de una habitación, explique:

- a. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad total de baldosas de esta habitación?
“Se multiplica, ejemplo: si nos dan el 4 que sería el número de baldosas de ese borde se multiplicaría por ese mismo: $4 \times 4 = 16$ base x altura”.
- b. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas oscuras para esa habitación?
“Restándole a la habitación una baldosa por cada lado y a ese resultado que nos dé se le saca la mitad y ese es el número de baldosas oscuras”
- c. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas blancas para esa habitación.
“Al número total de baldosas se le resta el número de baldosas oscuras y hay nos da las baldosas blancas”

✓ Escriba una operación con la que se pueda encontrar:

- a. La cantidad total de baldosas para cualquier habitación.
“Base X Altura = baldosas totales de la habitación $5 \times 5 = 25$ ”
- b. La cantidad de baldosas oscuras para esa habitación.
Restándole a la habitación una baldosa por cada lado y el número que nos dé se le saca la mitad y ese es el número de baldosas oscuras”
- c. La cantidad de baldosas blancas para esa habitación.
Total de baldosas – baldosas oscuras = baldosas blancas.

E12: Alcanzó un máximo nivel N7, así mismo, ante las dos últimas preguntas expresa:

- ✓ Si nos dan la cantidad de baldosas blancas que tiene el borde de una habitación, explique:
 - a. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad total de baldosas de esta habitación?
“Pues si lo bordes y o lados son iguales de baldosas se multiplica por el mismo y ahí nos da el resultado”.
 - b. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas oscuras para esa habitación?
“Pues se le resta las primeras baldosas de los cuatro lados y ahí están las baldosas negras, si es como lo estamos viendo antes”
 - c. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas blancas para esa habitación.
“Pues al número total de baldosas le resto las baldosas negras y ahí estaría el resultado. O se lo suma las baldosas exteriores (la de los lados) y pues obviamente esas son las blancas”

- ✓ Escriba una operación con la que se pueda encontrar:
 - a. La cantidad total de baldosas para cualquier habitación.
 “ $L \cdot L$ $L =$ baldosas de cualquier habitación”
 - b. La cantidad de baldosas oscuras para esa habitación.
 “Pues se multiplica el número de baldosas por si mismo $H \cdot H$
 $H =$ número de habitación” “o el número total de baldosas le resto las baldosas blancas y da:”

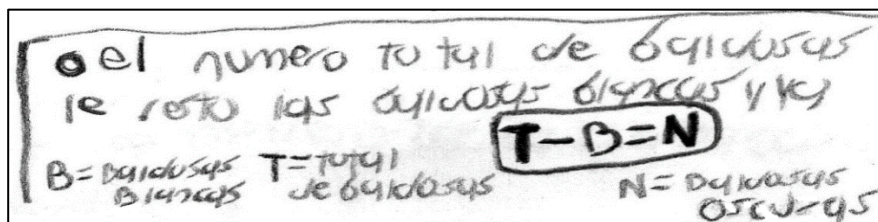


Figura 35. Representación 1 de producción E12 – T5

- c. La cantidad de baldosas blancas para esa habitación.
 “ $T - N = B$ ”
 $N =$ Baldosas oscuras $T =$ Total de baldosas $B =$ Baldosas blancas.

E13: Alcanzó un máximo nivel N5, además, ante las dos últimas preguntas manifiesta:

- ✓ Si nos dan la cantidad de baldosas blancas que tiene el borde de una habitación, explique:
 - a. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad total de baldosas de esta habitación?
 “Multiplicamos el número de baldosas blancas por 4. Y dejamos una baldosa blanca de diferencia entre el borde de la habitación y sumamos”.
 - b. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas oscuras para esa habitación?
 “Multiplicamos el número en el cual se posiciona la habitación y así vamos a encontrar esa cantidad.”
 - c. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas blancas para esa habitación.
 “Multiplicamos el número de baldosas que nos dan por 4.”
- ✓ Escriba una operación con la que se pueda encontrar:
 - a. La cantidad total de baldosas para cualquier habitación.

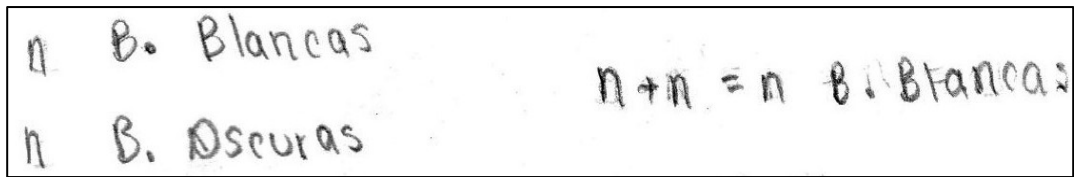


Figura 36. Representación 1 de producción E13 – T5

- b. La cantidad de baldosas oscuras para esa habitación.
 “ $n \cdot n = n$ ” Total de baldosas oscuras
- c. La cantidad de baldosas blancas para esa habitación.
 “ $n \cdot n = n + 4$ Total de baldosas blancas”.

De esta manera, en la tarea propuesta se pretendía abordar una secuencia figural con triángulos, involucrando como operación el producto del número de la figura por sí misma, es decir, inducir el manejo de la potenciación. Se evidencia que aunque el nivel de dificultad aumentó en ciertos casos, la mayor parte de los estudiantes lograron identificar las regularidades principalmente desde la tabla, lo que se refleja en el máximo nivel alcanzado por el grupo, sin dejar de lado que algunos estudiantes no lograron establecer el producto como una potencia, pero si hacen uso de la letra como signo de generalización, sin dejar de lado que en algunos casos no hacen diferenciación entre los signos que utilizan, es decir, usan la misma letra para denotar características distintas.

4.1.7 Tarea 6 : Puntos - Producto

Observe la siguiente secuencia

- ✓ Dibuje la figura que sigue en la secuencia.
- ✓ Describa las figuras de la secuencia como si lo hiciera para alguien que está en el mismo salón pero que no lo ha visto. Haga su descripción de tal forma que esa persona pueda luego dibujar la secuencia.
- ✓ Escriba una regla que ayude a construir la secuencia
- ✓ Llena la tabla con los siguientes datos (se proporciona la tabla)
- ✓ ¿Cuántos puntos se necesitan para la figura $n = 10$ y $n = 37$?
- ✓ Escriba una fórmula matemática que sirva para hallar la cantidad de puntos en cualquier posición de la secuencia.

Figura 37. Análisis Tarea 6: Puntos - producto

En esta tarea se plantea una secuencia con la que se pretende que los estudiantes lleguen a la expresión $(n + 1)n$ como producto de la cantidad de puntos de la base de cada rectángulo por la cantidad de puntos en su altura, incluyendo además el uso de la n como signo en la tarea.

Así pues, el mínimo nivel alcanzado por el grupo fue N1, es decir, encuentra el patrón únicamente en lo perceptual; por el contrario, el máximo nivel alcanzado fue el N7, en que encuentra el patrón, lo verbaliza y simboliza en lenguaje algebraico formal. En tal sentido, el nivel preponderante fue el N5, en el que se encuentra el patrón de formación general y lo verbaliza. Por ejemplo:

E10: Alcanzó un máximo nivel N5, quien ante las dos últimas preguntas respondió:

✓ ¿Cuántos puntos se necesitan para la figura $n = 10$ y $n = 37$?

R/: “ $n = 10$: 110 puntos se necesitan; $n = 37$: 1406 puntos se necesitan”

✓ Escriba una fórmula matemática que sirva para hallar la cantidad de puntos en cualquier posición de la secuencia

R/: “Multiplicando base por altura. Ej: $n = 20$ base 21 • altura 20”

E12: Alcanzó un máximo nivel N7, así mismo, ante las dos últimas preguntas expresa:

✓ ¿Cuántos puntos se necesitan para la figura $n = 10$ y $n = 37$?

R/: “Se necesitan 110 puntos para la figura $n = 10$ y para la figura $n = 37$ se necesitan 1406 puntos”

✓ Escriba una fórmula matemática que sirva para hallar la cantidad de puntos en cualquier posición de la secuencia

The image shows a handwritten note on a rectangular background. At the top, it says "n = numero de posición". Below this, there are two circled formulas: $(n \cdot n) + n$ on the left and $(n + 1) \cdot n$ on the right. At the bottom, it says "esta es la formula o esta es otra formula".

Figura 38. Representación 1 de producción E12 – T6

E14: Alcanzó un máximo nivel N5, además, ante las dos últimas preguntas manifiesta:

✓ ¿Cuántos puntos se necesitan para la figura $n = 10$ y $n = 37$?

R/: “ $n = 10$ total puntos 110; $n = 37$ total puntos 1406”

✓ Escriba una fórmula matemática que sirva para hallar la cantidad de puntos en cualquier posición de la secuencia

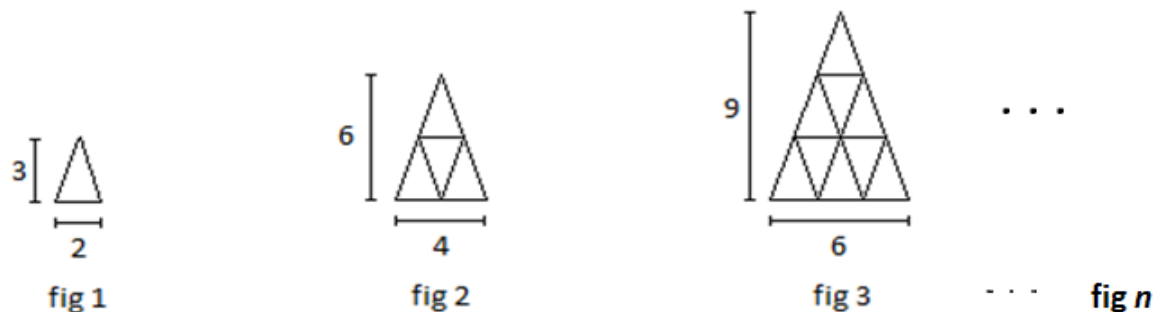
R/: “Multiplicando la base por la altura”.

Entonces, desde el producto que se pretendía abordar con la secuencia, se evidencia que aunque se involucra una operación y el nivel de dificultad aumentó en ciertos casos, una buena parte de los estudiantes lograron identificar las regularidades y hacer uso de la letra n como signo de generalización, en tanto hacen corresponder esta al número de la figura de la secuencia como se venía presentando en las tareas anteriores.

Así mismo, aunque en algunos casos no se llegó al uso de la letra como elemento mismo de generalización, si se llegó a la verbalización en lenguaje natural del mismo. Cabe destacar que particularmente un estudiante (E12) planteó otra forma efectiva de operar con la letra y generalizar las regularidades que él encontró, diferente a la inicialmente pretendida; lo que lleva a pensar que efectivamente se ha generado un cambio en su pensamiento, es decir, se ha generado un desarrollo más amplio desde la perspectiva de Vygotski.

4.1.8 Tarea 7 : Triángulos – Área

Teniendo en cuenta que el área de un triángulo es el producto de la medida de su base por su altura, dividido en dos. Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas



Área = 3 unidades²

Área = 12 unidades²

Área = 27 unidades²

- ✓ Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición y determine su área.
- ✓ Calcule las medidas de los triángulos de la figura correspondiente a la 9ª posición y determine su área.
- ✓ Calcule las medidas de los triángulos de la figura de la posición 30 y determine su área.
- ✓ Llena la tabla con los siguientes datos (se proporciona la tabla)
- ✓ Describa las figuras de la secuencia como si lo hiciera para alguien que está en el mismo salón pero que no las ha visto y explique cómo ha llegado a sus respuestas. Haga su descripción de tal forma que esa persona pueda luego dibujar la secuencia con sus respectivas medidas
- ✓ Escriba y explique una fórmula matemática que sirva para encontrar las medidas de los triángulos en la base, en la altura y el área que tiene una figura en la posición n .

Figura 39. Análisis Tarea 7: Triángulos - área

En esta tarea se plantea una secuencia con triángulos en la que se presenta una operación adicional, como es el cálculo del área, donde además se guarda una regularidad respecto a las dimensiones la base y la altura de cada triángulo, siendo esta diferencia el número de la figura. Así pues, se pretende que los estudiantes lleguen a la expresión $(2n)$ para la base y $(3n)$ para la altura respectivamente. Luego, para el cálculo del área se espera que los estudiantes lleguen a la expresión $\frac{(2n)(3n)}{2}$ ó $\frac{6n^2}{2} = 3n^2$, incluyendo además el uso de la n como signo en la generalización, dado que se proporciona en la tarea.

Así pues, el mínimo nivel alcanzado por el grupo fue N1, es decir, encuentra el patrón únicamente en lo perceptual; por el contrario, el máximo nivel alcanzado fue el N7, en que encuentra el patrón, lo verbaliza y simboliza en lenguaje algebraico formal. En tal sentido, el

nivel preponderante fue el N5, en el que se encuentra el patrón de formación general y lo verbaliza. Por ejemplo:

E11: Alcanzó un máximo nivel N5, quien ante las dos últimas preguntas respondió:

- ✓ Describa las figuras de la secuencia como si lo hiciera para alguien que está en el mismo salón pero que no las ha visto y explique cómo ha llegado a sus respuestas. Haga su descripción de tal forma que esa persona pueda luego dibujar la secuencia con sus respectivas medidas

R/: “Se multiplica la base por la altura y luego se divide en dos”

- ✓ Escriba y explique una fórmula matemática que sirva para encontrar las medidas de los triángulos en la base, en la altura y el área que tiene una figura en la posición n

R/: “De altura el múltiplo es 3, así que multiplica 3 por el número de la figura.

De base el múltiplo es 2, así que multiplica 2 por el número de la figura”

E12: Alcanzó un máximo nivel N7, así mismo, ante las dos últimas preguntas expresa:

- ✓ Describa las figuras de la secuencia como si lo hiciera para alguien que está en el mismo salón pero que no las ha visto y explique cómo ha llegado a sus respuestas. Haga su descripción de tal forma que esa persona pueda luego dibujar la secuencia con sus respectivas medidas

R/: “Figura 1= base: 1 Triángulo hacia arriba

Figura 2= base: 2 triángulos hacia arriba y uno hacia abajo

Figura 3= base: 3 triángulos hacia arriba y dos hacia abajo.

Figura 1= Altura: es el mismo triángulo que el de la base

Figura 2= Altura: dos triángulos en diagonal derecho

Figura 3= Altura: tres triángulos en diagonal derecho

Cada triángulo mirando hacia arriba mide 2 y esa medida es la base del triángulo pequeño y cada triángulo en diagonal”.

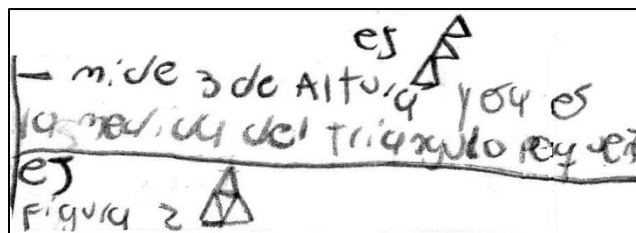


Figura 40. Representación 1 de producción E12 – T7

✓ Escriba y explique una fórmula matemática que sirva para encontrar las medidas de los triángulos en la base, en la altura y el área que tiene una figura en la posición n

R/: “ n = número de posición. Medida de la base $n + n$; medida de la altura $n \cdot 3$; y el área es $(n + n) \cdot (n \cdot 3) \div 2$ ”.

E9: Alcanzó un máximo nivel N7, quien expone la siguiente respuesta para la última pregunta:

R/: “ $Fig X = 3x \cdot 2x \div 2 = y$ Ya que la altura es 3 veces el No. de la figura y su base es 2 veces el No. de la figura. Después se divide en 2 para dar con el área”.

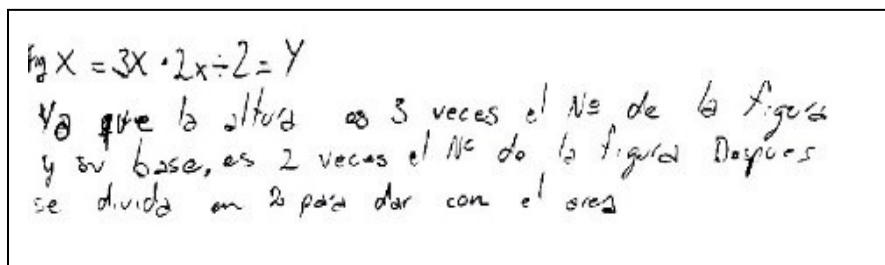


Figura 41. Representación 1 de producción E19 – T7

Luego pues, teniendo en cuenta el cálculo del área como operación que se pretendía abordar con la secuencia, se evidencia que aunque se involucra una operación y el nivel de dificultad aumentó por la combinación de operaciones y de características respecto a la secuencias (base y altura), una buena parte de los estudiantes lograron identificar las regularidades y hacer uso de la letra como signo de generalización, en tanto hacen corresponder esta al número de la figura de la secuencia como se venía presentando en las tareas anteriores.

Así mismo, aunque en algunos casos no se llegó al uso de la letra como elemento mismo de generalización, si se llegó a la verbalización en lenguaje natural del mismo. Además, particularmente un estudiante (E12) logra identificar las regularidades y plantear una expresión

alfanumérica de generalización, en la que aunque no hay un desarrollo de la expresión misma, si logra plasmar las regularidades encontradas por él.

Categorización de las producciones de los estudiantes en las siete tareas:

Se presenta a continuación en la Tabla 1 el nivel de generalización alcanzado por cada uno de los estudiantes, en cada tarea, que nos permitirá pronunciarnos al respecto del desarrollo del pensamiento en términos vygotskianos.

NIVEL DE GENERALIZACIÓN ALCANZADO POR TAREA								
NOMBRE	CÓDIGO	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
Dayana Valbuena	E1	5	1	3	3	3	4	4
Diego Ramírez	E2	3	4	3	4	6	4	5
Gissel Garzón	E3	3	2	2	4	4	1	4
Camilo Zuleta	E4	4	4	3	3	3	5	1
Leidy Espinosa	E5	2	3	1	2	2	2	3
Laura Sánchez	E6	5	3	4	5	5	5	4
Manuela Hernández G	E7	5	2	6	3	5	6	7
Natalia Rico	E8	3	4	2	5	5	4	5
Santiago Parrado	E9	5	5	5	5	6	7	7
Luisa Fuentes	E10	5	5	6	5	5	5	5
Jessica Enríquez	E11	6	6	5	5	3	5	5
Walter Martin	E12	7	7	7	7	7	7	7
Brayan Mateus	E13	6	6	6	6	5	3	4
Ronald Ruiz	E14	5	3	3	4	3	5	5
Francisco Vela	E15	5	4	6	6	4	3	4
		69	59	62	67	66	66	70

Tabla 1. Nivel de generalización alcanzado por tarea

Es importante destacar que dicha clasificación está ligada al desarrollo de dos procesos, independientes pero complementarios, como son el de simbolización y generalización, en el ámbito de las tareas y a través de sus análisis; es así como nuestros estudiantes abordan las situaciones presentadas y posteriormente expresan sus producciones en lenguaje geométrico o visual, en lenguaje aritmético, en lenguaje natural y finalmente en lenguaje algebraico, en la mayoría de los casos, pretendiendo con ello un tipo de desarrollo en el tránsito de un lenguaje a otro, es decir, desde la perspectiva vygotkiana el uso de la letra como signo de generalización que posteriormente pueda favorecer el desarrollo de otras interpretaciones, como el estudio de

métodos para resolver ciertos problemas concretos (ecuaciones) y el estudio de relación entre cantidades (función) y su aspecto estructural.

En este sentido, puede decirse que los estudiantes se focalizan en los patrones como un camino para discernir reglas generales, lo cual de acuerdo con Moss & London (2011, citados en Merino, 2012) esto se da cuando se priorizan las representaciones visuales, haciendo que los estudiantes estén mejor capacitados para encontrar, expresar y justificar reglas funcionales.

Así mismo, es necesaria la consideración de las traducciones entre diferentes lenguajes, puesto que aporta los elementos requeridos para comunicar ideas matemáticas con propiedad y coherencia. En tal sentido, tomando como base las producciones de los estudiantes en cada una de las tareas y teniendo en cuenta la correlación⁷ planteada entre los niveles propuestos por Pretexto (1996 /1999) y las etapas – *ver*, *describir* y *escribir*- propuestas por Azarquiel (1993) en los procesos de generalización, se logró obtener el gráfico de la Figura 42:

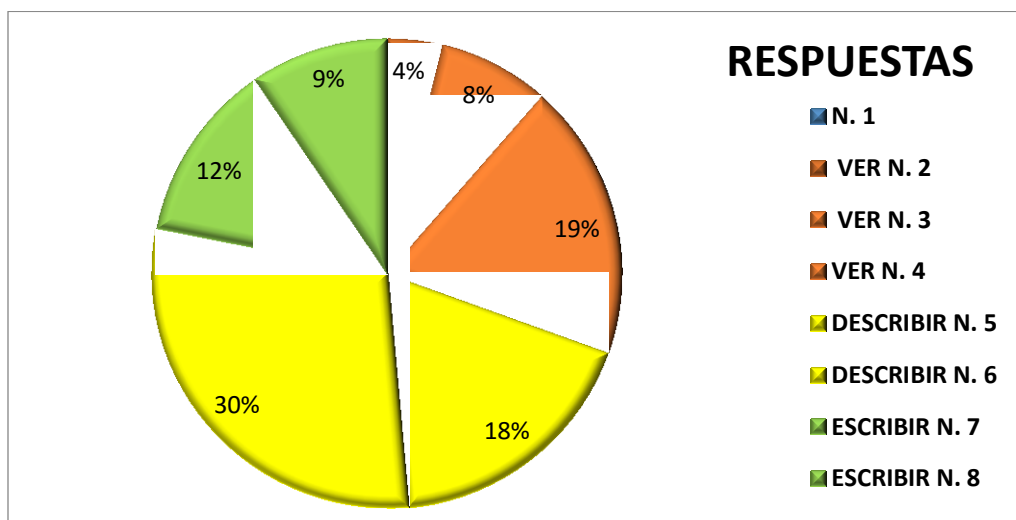


Figura 42. Gráfico porcentual de respuestas relacionando etapas y niveles

Del cual es posible inferir que el 0% de las producciones de los estudiantes está en el nivel uno, el 31% de las respuestas están en los niveles 2, 3 y 4 y se pueden ubicar en la etapa de *Ver* (regularidades); así mismo, el 48% se puede ubicar en los niveles 5 y 6, es decir, están en la etapa de *Describir* (Buscar precisión para comunicar), y finalmente el 19% de las producciones se

⁷ La correlación entre los niveles propuestos por Pretexto (1996/1999) y las etapas en el proceso de generalización de Azarquiel (1993), es propia de los autores de esta investigación.

pueden clasificar en los niveles 7 y 8, que corresponden a la etapa de *Escribir* (Expresiones simbólicas).

Por lo anterior, teniendo en cuenta que las producciones han sido el insumo principal en el presente análisis, en las tareas implementadas se privilegió, junto con la actividad desplegada por los estudiantes, el acceso que estos iban obteniendo en el dominio de los instrumentos de mediación, posibilitando formas de conceptualización propia de las matemáticas, en este caso del álgebra, se han agrupado los resultados anteriores en la siguiente figura:

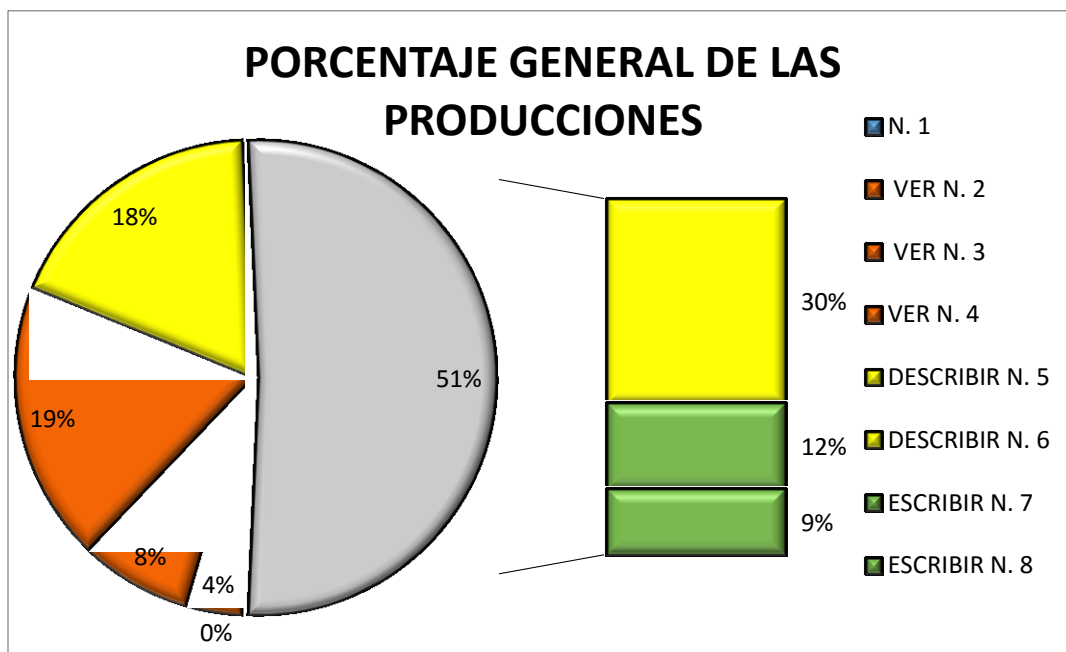


Figura 43. Gráfico porcentual general de las producciones

En la cual, teniendo en cuenta las etapas en el proceso de generalización descritas por el grupo Azarquiél (1993), el 49% de las producciones de los estudiantes se logra ubicar en las etapas de ver y describir; así mismo, el 51% de las respuestas se clasifican en las etapas de describir y escribir, dado que de acuerdo con Pretexito (1996/1999) se pueden ubicar entre los niveles 6, 7 y 8, en los que se encuentra el patrón de formación general y llega sólo a verbalizarlo, hasta verbalizarlo y simbolizarlo en lenguaje algebraico formal.

Como evidencia de este proceso de desarrollo descrito anteriormente, reflejado en el nivel alcanzado en cada una de las producciones de los estudiantes, a pesar de que las tareas se presentaban con un grado de complejidad más alto desde la perspectiva operacional y de

procedimientos asociados a las mismas; es de destacar que a medida que se iba avanzando en el trabajo con ellas, la mayor parte del grupo de estudiantes fue mostrando una transformación en el lenguaje empleado respecto a la forma de abordarlas, tal como se muestra en la figura 44.

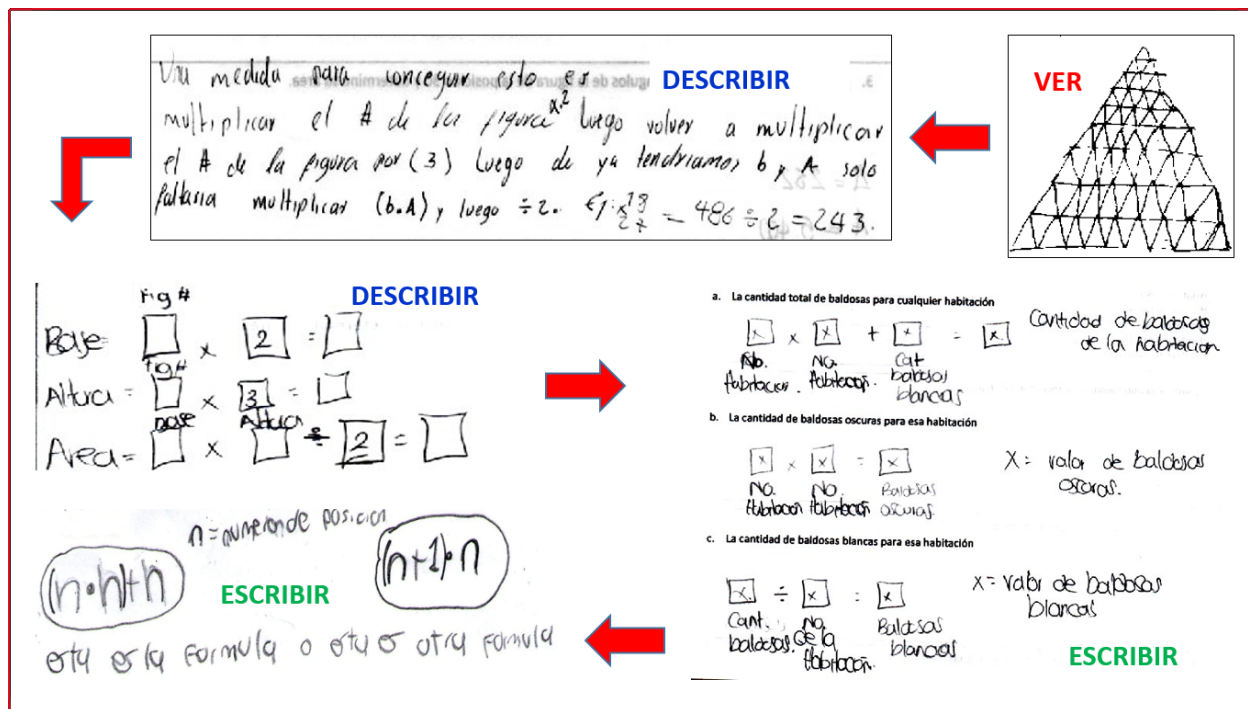


Figura 44. Representación del desarrollo en las producciones

Así pues, esto nos insinúa un desarrollo, dado que éste está dirigido a promover grados crecientes de dominio autónomo (consciente y voluntario) y descontextualizado de los instrumentos de mediación semiótica; mostrando así, que la idea de desarrollo vygotskiana que se utilizó para el análisis, ligada a los niveles y etapas; se evidencia entre el paso de uno a otro y tiene que ver con el hecho que este desarrollo (de procesos psicológicos superiores, en este caso el de generalización) es un proceso artificial y con un alto grado de contingencia en el acceso a sus formas más avanzadas.

Capítulo 5

Conclusiones y Reflexiones

Abordamos este capítulo, en primer lugar, como una respuesta a la pregunta del estudio, apoyada en los planteamientos vygotskianos sobre el desarrollo y centrados en su relación con aspectos teóricos basados en los trabajos realizados por Küchemann. Seguidamente, en el apartado de Reflexiones y observaciones finales, exponemos algunos elementos que nos parecen significativos en tanto generan reflexiones didácticas en torno a la enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar, que a su vez pueden suscitar nuevas investigaciones con este trabajo.

5.1 Respuesta a la pregunta del estudio

La pregunta de estudio que nos planteamos fue la siguiente: *¿Qué proceso de desarrollo conceptual y del pensamiento se evidencia en estudiantes de grado octavo al resolver tareas sobre generalización de patrones que exijan la interpretación y uso de la letra como número generalizado?*

Si bien, en términos epistemológicos, los aportes desde corrientes teóricas pueden ser distintos, en el estudio consideramos necesario poner a *dialogar* estas perspectivas. En particular, los aportes provenientes de aproximaciones cognitivas nos sirvieron para comprender más de cerca producciones matemáticas de los estudiantes que dan cuenta de la “anatomía” de la generalización en actividades sobre secuencias de patrones; el diálogo con aproximaciones de corte sociocultural, por ejemplo la de Vygotski, nos proporcionó herramientas para documentar el fenómeno del desarrollo conceptual o de pensamiento, por supuesto, como ya lo hemos mencionado, ligado estrechamente al uso de instrumentos de mediación semiótica.

La identificación y adaptación de tareas sobre generalización de patrones, que exigían en su solución la interpretación y uso de la letra como número generalizado, permitió generar

producciones matemáticas de los estudiantes para describirlas desde una perspectiva vygotskiana en torno al desarrollo del pensamiento.

Por otra parte, el análisis de las producciones de los estudiantes, con respecto a las tareas implementadas, permitió identificar características de la interpretación y uso de la letra como número generalizado, en el ámbito de las categorías propuestas (Pretexto (1996/1999), Azarquiél (1993)).

Luego, en el contexto de la actividad matemática de los estudiantes, se exploraron las relaciones entre las características de la interpretación y uso de la letra como número generalizado y el desarrollo de pensamiento, en tanto las categorías permiten observar la transformación del lenguaje (signo) en el paso entre un nivel y otro, evidenciando con esto un desarrollo del pensamiento desde la mirada vygotskiana.

Ahora bien, los análisis realizados sugieren que la actividad desarrollada en la tarea 1 generó la práctica en la captura del patrón, la descripción verbal de las relaciones entre el número de orden y su representación figural y además el reconocimiento de la infinitud de los números. La tarea 2 además de las anteriores, también incluye una operación con la cual se empieza a complejizar la actividad sobre el reconocimiento del patrón. En la tarea 3 la actividad se centra en verbalizar las operaciones a partir del reconocimiento de las características del patrón, el cual, varios de los estudiantes lo dividen en dos secciones y además les dan nombre (base, soporte, etc.). De la tarea 4 a la 7 los aspectos importantes recaen en el uso de una tabla, la cual fija la atención en las relaciones existentes entre las figuras, el orden de las posiciones y las operaciones necesarias para la captura del patrón.

Puede apreciarse cómo en las tareas indagamos por el número de triángulos o cuadrados con cantidades grandes (mayores de 100), y las producciones elaboradas por los estudiantes se limitaron, en muchas ocasiones, al trabajo sobre estas cantidades lejanas pero particulares, es decir, en un principio se limitaban a dar ejemplificaciones concretas con cantidades específicas, sin tenerlas en cuenta como una posibilidad de generalización de las regularidades encontradas,

por esta razón podría decirse que en estas primeras situaciones, el “número generalizado” apareció en una forma intuitiva pero sin hacer uso de él.

Entre las tareas 2 y 3 se aplicó la tarea de “los sobres”, la cual fue aplicada como recomendación al margen de las tareas sobre patrones, con el fin de analizar la idea de las estudiantes sobre cómo operar con lo desconocido, dado que una de las ideas primordiales a abordar, precisamente es el manejo del signo desde la perspectiva sintáctica y semántica en concordancia con Booth (1989, referenciado por Vergel 2015), destacándose su uso mediante los cuales se pueden representar y disponer los objetos algebraicos para así poder aplicarlos a la solución de problemas y la simplificación de expresiones en un sistema en el que se reconoce el significado de estos, tal y como se abordó en el marco teórico.

Esta tarea fue clave en tanto funcionó como elemento de actividad que favoreció otras formas de pensamiento, en tanto buscaron diferentes formas de nombrar la indeterminancia de manera analítica, hicieron uso de gráficos y producción textual, operaron a través del ensayo y error, generando nuevas formas cualitativas de usar las palabras y los signos. Este hecho coincide con la posición de Tulviste según la cual el pensamiento puede verse como generado por las propias actividades de las personas: “la actividad determina los procesos mentales” (Tulviste, 1991, p. 71). Para su abordaje los alumnos tuvieron que movilizar recursos lingüísticos que permitieron abordar una situación algebraica de una manera diferente; lo que nos puede indicar que hay una evolución o transformación, donde lo desconocido se tradujo en un objeto del discurso por parte de los estudiantes, vista desde el lenguaje natural mismo o desde el uso de figuras o representaciones simbólicas de la posible solución a la tarea.

En este sentido, la idea sobre desarrollo la evidenciamos a través de las producciones en las que se muestra que los estudiantes van generando signos cada vez más complejos, de manera tal que al hacer el recorrido por las siete tareas se puede ver una evolución en la forma de pensar, evidenciada en una transformación de su lenguaje y una sofisticación de los signos para expresar una idea generalizada de las regularidades encontradas⁸, a través del uso y dominio de ellos,

⁸ La idea de desarrollo e interpretación de la misma desde la teoría Vygotskiana es propia de los autores.

principalmente alfanuméricos, en tanto les permiten mostrar un paso entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico formal. Este análisis sugiere una idea de pensamiento dependiente de los signos que se movilizan, lo cual afianza el hecho teórico según el cual los estudiantes piensan con y a través de los signos que utilizan (Vergel, 2014a, 2014b; 2015; Vygotski, 1929, 1989).

Así pues, esta nueva forma de percibir, hablar y manipular conceptualmente las secuencias, sugiere un desarrollo de procesos. Desde la perspectiva vygotskiana, el papel fundamental que desempeña la palabra y, en general, el lenguaje en la formación y el funcionamiento de la psique humana, puede verse en el caso de la percepción, la cual no la consideramos como contemplación (por parte de los estudiantes) sino como una actividad mediada por signos y palabras y en general por el lenguaje. Desde esta posición, podríamos capturar los planteamientos de Azarquiel (1993), según los cuales, una forma de pensamiento distinta coincide con un proceso de generalización en tanto requiere de pasar de una visión de regularidades a la diferenciación, luego pasar a la relación y su exposición verbal para llegar a su expresión escrita de la manera más concisa posible; esto es: ver, describir y escribir vista como una división en fases descritas por Mason et al. (1985, referenciado en Azarquiel 1993) de manera similar: percibir un patrón, expresar un patrón, registrar un patrón, y prueba de validez de las fórmulas.

Luego, puede decirse que el trabajo con patrones favorece a los estudiantes la observación, descripción y verbalización de generalizaciones propias y de registros semióticos, conformando una base concreta para la manipulación simbólica, dado que este tipo de tareas los lleva a detectar similitudes y diferencias, clasificar, etiquetar, buscar algoritmos, conjeturar, argumentar, establecer relaciones numéricas entre componentes o bien, a generalizar los datos y relaciones matemáticas, desarrollando así habilidades que son fundamentales para el aprendizaje del álgebra.

Por lo anterior, respecto a los ocho niveles o categorías propuestas por Pretexto (1996/1999) en el trabajo con tareas sobre generalización de patrones, en tanto generaron suficiencia descriptiva para el análisis, cabe anotar que el nivel 0 en el que el estudiante no responde, puede ser interpretado o renombrado como un nivel inicial o nivel 1 preferiblemente, con el fin de no generar una nulidad respecto a la interpretación o a la comprensión de la tarea misma.

De la misma manera, consideramos como un acierto el vínculo correlacional entre los niveles propuestos por Pretexto para el trabajo sobre generalización de patrones y los pasos propuestos por Azarquiél (1993) respecto a los pasos en el proceso de generalización, en tanto permitieron categorizar las producciones de los estudiantes y determinar pronunciamientos en torno a la idea de desarrollo.

Por otra parte, a partir del análisis de las producciones en las tareas 4 a 7, las cuales contenían apoyo tabular, se pone en evidencia que se hace movilizar en los estudiantes formas perceptivas de enfrentarlas de manera diferente, procedimientos algebraicos y comparaciones que no se daban en las tareas anteriores y que además favorecen el desarrollo dentro de las fases descritas anteriormente: ver, describir y escribir. Por otro lado, de acuerdo con Vergel (2014b, 2015), esta situación posibilita una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual se traduce en un aspecto importante del desarrollo del pensamiento, lo cual sugiere que un diseño adecuado de tareas provoca, junto con la actividad, desarrollo de procesos mentales

De igual forma logramos evidenciar que a lo largo de las actividades desarrolladas en las sesiones, una gran mayoría de estudiantes tomó una mayor conciencia sobre las características de las secuencias, lo que en términos de desarrollo conceptual podemos identificar como una evolución en su pensamiento, razón por la cual podemos inferir que se dio un proceso genético o de desarrollo conceptual (Vygotski, 1929). Este hecho coincide con la conceptualización aportada por Tulviste (1991), según la cual son los tipos de actividades los que son responsables de los diferentes métodos de pensamiento. Por ello, el lazo entre la forma de cognición y la especificidad de la actividad se encuentra en los tipos de tareas o problemas que se presentan en las actividades mismas.

En este contexto, podemos señalar que durante la actividad en cada una de las tareas propuestas, respecto a las secuencias e identificación de regularidades con el fin de determinar posibles generalizaciones a través del uso de la letra como signo, se logró en buena medida un desarrollo conceptual y del pensamiento en los estudiantes, refiriéndonos en este sentido, de acuerdo con Vergel (2014a, 2015), a los instrumentos con que mediatizamos la actividad humana, que aparte

de cumplir su función pragmática de permitirnos llevar a cabo la actividad misma, en este caso son fundamentalmente importantes en tanto que afectan en gran manera los procesos de generalización en la transición Aritmética-álgebra.

En concordancia con lo anterior, es importante destacar los puntos principales del desarrollo en términos de los cambios experimentados en la forma de mediación utilizada, es decir, en las acciones del sujeto a través del uso de instrumentos de mediación semiótica y su toma respectiva de conciencia de este uso. Al respecto, dice Leontiev (1983, citado por Vergel 2014a, 2014b), el desarrollo de la conciencia de un niño “se produce como resultado del desarrollo del sistema de operaciones psicológicas que, a su vez, está determinado por las relaciones genuinas entre el niño y la realidad”.

Este estudio evidencia en su proceso, una primera instancia en la que podemos ubicar algunos aspectos relacionados con el trabajo, que presupone unos instrumentos materiales interpuestos entre el individuo y el objeto natural; instrumentos dirigidos a objetos naturales que también tienen una influencia recíproca en el individuo, modificando así su tipo de actividad y de cognición. En este caso, tenemos unos instrumentos que en nuestro caso llamamos tareas, las cuales son propuestas a los estudiantes en torno a la generalización de patrones para el desarrollo del concepto de la letra como número generalizado.

Lo anteriormente expuesto, con relación al desarrollo, ha sido apoyado en la creencia en el método genético, que de acuerdo con Vygotski, significa que el pensamiento se puede desarrollar, y de acuerdo con su trabajo sobre “El problema del desarrollo cultural del niño” (Vygotski, 1929), deja entrever que cuando interferimos en el curso de los procesos de comportamiento, sólo puede hacerse en conformidad con las mismas leyes que rigen estos procesos en su curso natural. Esto quiere decir, pensando en nuestra intención del desarrollo del concepto de la letra como número generalizado, que la inclusión en cualquier proceso de un signo remodela toda la estructura de las operaciones psicológicas, así como la inclusión de una herramienta remodela toda la estructura de una operación de trabajo.

De la misma manera, este estudio muestra que recursos semióticos tales como la actividad perceptual, las manifestaciones descriptivas en las producciones escritas, las representaciones

icónicas, las organizaciones tabulares y las justificaciones mediante expresiones alfa-numéricas, forman parte de las características propias del pensamiento.

El análisis de las diversas producciones de los estudiantes indica que en una buena cantidad de casos los estudiantes han capturado el patrón y que el lenguaje simbólico es una manera para describir su estructura, dejándolos ad portas de una fórmula con lenguaje más sofisticado lo cual nos brinda información importante sobre su desarrollo conceptual y del pensamiento.

5.2 Reflexiones y Observaciones finales

Los resultados expuestos en este estudio indican que el conocimiento que han desarrollado estudiantes de grado octavo, sobre la letra como número generalizado en relación con tareas sobre patrones, no es un conocimiento totalmente acabado, sin embargo, debido a su importancia, es una gran oportunidad para generar nuevas posibilidades de investigación, en torno del análisis sintáctico y semántico del signo; así como lo referente al trabajo con tareas sobre generalización de patrones desde grados anteriores al de octavo.

En términos generales, el presente estudio puede considerarse como un aporte didáctico y metodológico que permite reflexionar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, en tanto ofrece otra manera de intervenir en el aula, no obstante es importante realizar ajustes de diseño, teniendo en cuenta las necesidades de la población a la que se aplique; y además llevar a cabo una profundización en cuanto a los aspectos sociales desarrollados por los estudiantes respecto a la socialización de sus producciones con sus pares, dado que dicho proceso social puede posibilitar y favorecer en mayor medida los resultados.

Es así que al empezar un acercamiento al álgebra no puede ignorarse que el estudiante viene de trabajar con la aritmética, donde los símbolos se relacionan con diversas fuentes de significado y los contextos de los problemas determinan mucho la manera de resolverlos. Por lo tanto no puede introducirse al niño a un simbolismo carente de significado, en donde aparece el lenguaje algebraico al que no le “ven” sentido y que les lleva a asignar valores numéricos a las letras o a la

sobre-generalización de ciertas propiedades, principalmente cuando empiezan la transición Aritmética-Álgebra.

En este sentido, para todo estudio es tan importante mostrar los aciertos y hallazgos, como también las dificultades y desaciertos, ya sea con respecto a los aspectos logísticos o los teóricos, pues es una etapa fundamental dentro de la formación de investigadores que no debe dejarse al margen.

Desde esta perspectiva, es importante mencionar que aunque se obtuvieron hallazgos importantes de la manera en que se propuso inicialmente desde la metodología, puede sentirse que si además de nuestro rol de investigadores observadores asumiéramos un papel más activo o participe con los estudiantes, en cuanto a la socialización de las producciones, podría lograrse una mayor cantidad de resultados positivos. Esto podría entenderse entonces como una oportunidad de continuación dentro del ámbito del estudio sobre el desarrollo del concepto de la letra como número generalizado en tareas sobre generalización de patrones.

Por otra parte, es importante mencionar que durante el desarrollo del estudio, los alumnos que hicieron parte de la muestra representativa también llevaban a cabo de manera paralela sus estudios correspondientes al programa curricular de álgebra de las dos instituciones educativas, lo cual hace pertinente decir que dicha situación también pudo influir de diferentes formas de pensar y por lo tanto en sus producciones con respecto a las tareas propuestas sobre generalización de patrones.

Con respecto al abordaje del desarrollo del pensamiento y principalmente en el proceso de la transición Aritmética-Álgebra, es necesaria la consideración de las traducciones entre diferentes lenguajes, puesto que aportan los elementos requeridos para comunicar ideas matemáticas con propiedad y coherencia. Sugerimos que para el alcance de este objetivo es necesario un proceso de aprendizaje más dinámico y significativo del álgebra, en el que se facilite el tránsito entre el lenguaje gráfico, el lenguaje natural, el lenguaje aritmético y el algebraico, de una forma lenta, particularizada, rica en actividades, evitando en lo posible acelerar el uso del formalismo propio del lenguaje algebraico.

Por consiguiente, el educador debe interesarse en ayudar a los estudiantes a superar la multiplicidad de dificultades que enfrentan cuando empiezan su transición Aritmética-Álgebra, dificultades que tienen que ver con los procesos de generalización, es decir, encontrar términos generales y llegar a una expresión simbólica; de lo cual, es el trabajo con patrones un recurso con el que se puede estimular la habilidad de expresar generalidades, en donde aprenden a ver lo general en lo particular y viceversa con procedimientos recurrentes, propiciando el desarrollo del pensamiento.

En efecto, la generalidad es fundamental para acceder al álgebra de una manera significativa y construir su conocimiento (Mason et al. 1985), es así como el mayor reto en la enseñanza del álgebra es promover la percepción de la “generalidad” que está detrás de los símbolos. De esta manera, es importante llevar a cabo tareas en las que los estudiantes elaboren gráficas, tablas de datos, expresiones, ecuaciones o descripciones verbales para representar relaciones, de tal forma que descubran que diferentes representaciones pueden dar lugar a diferentes interpretaciones de una misma situación.

Para concluir, es importante decir que este estudio puede ser objeto de futuras investigaciones, respecto a propuestas didácticas que medien en ese tránsito de un registro a otro, ampliando el recurso aquí propuesto e involucrando además otros adicionales, como la inclusión de medios tecnológicos en la formación de AVAS⁹, para la enseñanza-aprendizaje en la transición Aritmética-Álgebra.

⁹ Ambientes Virtuales de Aprendizaje Significativo

Bibliografía

Alba, D. M. D., & Rodríguez, C. Z. (2010) Un Acercamiento A La Variable En Relación Funcional En Estudiantes Del Tercer Ciclo De Escolaridad: Un Estudio De Caso86. *Memoria 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 548 – 561) Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1130/1/548_Un_Acercamiento_A_La_Variable_En_Relacin_Funcional_Aso_colme2010.pdf

Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A. G., & Ortiz, M. A. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.

Andrade, C. (1998). Dificultades en el aprendizaje de la noción de variación. *EMA*, 3(3), 241-253.

Azarquiel, G. (1993). Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A. G., & Otros. *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005, July). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121-128).

Butto, C. (2005). *Introducción temprana al pensamiento algebraico: una experiencia en la escuela primaria*. Tesis doctoral. CINVESTAV. IPN. México.

Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research*, 51, 45-65.

Castellanos, M., & Obando, J. (2009). Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico. *10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, Pasto, Colombia.

Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Castro, W. F., Godino, J. D., & Rivas, M. (2010). Competencias de maestros en formación para el análisis epistémico de tareas de razonamiento algebraico elemental. In *Investigación en educación matemática XIVd* (pp. 259-270). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Collis, K. F. (1982). La matemática escolar y los estadios de desarrollo. *Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development*, (19), 39-74.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 177-196.

D'Amore, B., Fandiño, M. I. e Iori, M. (2013). *La semiótica en la Didáctica de la Matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L., & Seminara, S. A. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(4), 7.

Domínguez, J. H., Socas, R. M. M., & Machín, M. C. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza Secundaria. *Revista Interuniversitaria de formación del Profesorado*, (32), 73-86.

Duval R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle (Original publicado en 1995). Ernest, P. (1991). *The philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer Press.

Fillooy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(3), 327.

Font, V. (2002). Una organización de los Programas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*, Vol. 7 No. 2, 127 – 170.

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the learning of mathematics, Montreal*, 27(2), 3-9.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en didatique des mathematiques*, 9(2), 155-188.

Glaser, B. G. (1978). *Theoretical Sensitivity. Advances in the Methodology of Grounded Theory*. Mill Valley, CA: Sociology Press.

Glaser, B. G. (2002). “Constructivist Grounded Theory?”. *Forum: Qualitative Sozial forschung/Forum: Qualitative Research* (periódico on line), 3(3). Disponible en: <http://qualitative-research.net/fqs-texte/3-o2/3-02glaser-e.htm>.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory. Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine

Godino, J. D., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico para maestros. Matemáticas para maestros*. Universidad de Granada. Disponible en <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/welcome.html>.

Godino, J. D., Castro, W. F., Aké, L. P., & Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática–BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.

González Trujillo, E. S. (2012). *Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas.* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia).

González, B. F. M., (2010). *Iniciación a la resolución de problemas de álgebra escolar a través de un método gráfico. Un estudio de casos.* (Tesis de Maestría). Universidad de Granada.

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.

Küchemann, D. E. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*, 7(4), 23-26.

Küchemann, D. E. (1981). *The understanding of generalized arithmetic (algebra) by secondary school children* (Doctoral dissertation, Chelsea College, University of London).

López, D. N. L., & López, A. L. (2011). Empleo del modelo 3uv en álgebra temprana. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Lozano, M. D. (2005). Reseña de "Enseñanza del álgebra elemental: un enfoque alternativo" de Sonia Ursini, Fortino Escareño, Delia Montes y María Trigueros. *Educación Matemática*, 17(3), 145-146.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. *Revista Irice*, 13, 105-132.

Mason, J. A, Graham, D. Pimm. & N, Gower. (1985). *Rutas y Raíces hacia el álgebra* The Open University Press, Great Britain.

Medina, M. M. P. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* (Doctoral dissertation, Universidad de La Laguna).

Medina, M. M. P. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números*, (40), 3-28.

Mena, M., & Moreno, E. (1997). Aproximaciones al concepto de variable. *Revista EMA*, 3(1), 53-63.

Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización* (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).

Merino, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 24-40.

- Miguélez, M. M. (2000). La investigación-acción en el aula. *Revista Electrónica Agenda Académica* 7 (1), 27-39. Disponible en:
[http://www.coluisorjuela.edu.co/Texto/MARTINEZ_InvAccionenelAulapag27_39%20\(1\).pdf](http://www.coluisorjuela.edu.co/Texto/MARTINEZ_InvAccionenelAulapag27_39%20(1).pdf)
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Mora, L & Torres, J. (2007). *Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales*, Universidad Pedagógica Nacional, Fundación Francisca Radke, Bogotá-Colombia.
- Olfos Ayarza, R., Soto, D. S., & Crocci, H. S. (2007). Un aporte desde la renovación de la enseñanza del algebra elemental. *Estudios Pedagógicos*, 33(2), 81-100.
- Ordóñez Velásquez, M. A., & Torres Salgar, O. L. (2011). *Concepto de variable: procesos que favorecen su construcción*. Tesis de especialización. Universidad Industrial de Santander. Colombia. Recuperado de
<http://repositorio.uis.edu.co/jspui/bitstream/123456789/7205/2/142333.pdf>
- Páez, L. A. (2011). *La implementación de situaciones problemáticas como proceso mediador en el paso de la aritmética al álgebra para estudiantes de grado octavo/The implementation of problematic situations as a mediator process in the transition of arithmetic to algebra* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia).
- Pegg, J. y Redden, E. (1990). Procedures for, and experiences in, introducing álgebra in New South Wales. *Mathematics Teacher*, 83, 386-291.
- Peral, L. M., & Gómez, J. L. D. (2003). Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario. *Mosaicos Matemáticos*, (11), 109-114
- Pretexto, G. (1996/1999). Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E, & Mora, L. *La transición aritmética al álgebra*. Bogotá: Gaia.
- Radford, L. (2000). Sings and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L.; Gómez, P. (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.
- Riviere, A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. Dins Marchesi, A., Coll, C. i Palacios, J.(Comp.): *Desarrollo psicológico y educación*. III. Madrid: Alianza, 155.

Robayna, M. M. S., & Medina, M. M. P. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (16), 91-98.

Roig, A. & Llinares, S. (2008). Fases en la abstracción de patrones lineales. In *Investigación en educación matemática XII* (p. 9). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Rojas, H. (2009). Estrategias Didácticas para la Comprensión del Concepto de Variable en la Resolución de Problemas. Recuperado de http://education.ti.com/sites/LATINOAMERICA/downloads/pdf/Simposio/Luz_Maria_Rojas/Estrategias_Didacticas_para_la_Comprension_del_Concepto_de_Variable_en_la_Resolucion_de_Problemas.pdf

Rojas, P. (2010) Iniciación al Álgebra Escolar: Elementos para el Trabajo en el Aula. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1168/1/115_Iniciacin_al_lgebra_Escolar_Elementos_para_el_Trabajo_en_el_Aula_Asocolme2010.pdf

Rojas, P. & Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. En Gallego, Adriana Patricia (Ed.), *Memorias del 14° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 760-766)

Ruano, R., Socas, M. & Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.

Sandoval, M. S. Á., Ruvalcaba, C. L., & González, J. L. (2010). La generalización de patrones cuadráticos: Un estudio con alumnos de licenciatura en matemáticas. *CULCyT: Cultura Científica y Tecnológica*, (40), 34-40.

Seminara, S. A., Del Puerto, S. M., & Minnaard, C. L. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(4), 7.

Socas Robayna, M., Camacho Machin, M., Palarea Medina, M., & Hernandez Dominguez, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147-164.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Soneira, A. J. (2006). La teoría fundamentada en los datos (Grounded Theory) de Glaser y Strauss. *Estrategias de investigación cualitativa*, 153-173.

Tulviste, P. (1991). *The Cultural-Historical development of Verbal Thinking*. New York: Nova Science Publishers.

Vega-Castro, D., Molina, M., & Castro, E. (2014). *Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada, España.

Vergel, R. (2014a). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Revista Folios*, (39), (1), 65-76. Recuperado de <http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/RF>.

Vergel, R. (2014b). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Vygotski, L. (1929). The problem of the cultural development of the child. *Journal of Genetic Psychology*, 36, 415-434.

Vygotski, L. (1989). *El proceso de formación de la psicología marxista: L. Vygotski, A. Leontiev, A. Luria* URSS: Progreso.

Wertsch, J. (1988). *Vygotski and the social formation of mind*. Harvard University Press.

Zarzar, C. B., & Cortés, T. R. (2011). La Generalidad Una Vía Para Acceder Al Pensamiento Algebraico: Un Estudio Sobre La Transición Del Pensamiento Aditivo Al Pensamiento. *XI Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Recuperado de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/docs/area_05/1330.pdf

Anexo A. Producciones de los estudiantes

Diego Andrés Ramírez 801



UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
 MAESTRÍA EN EDUCACIÓN - ENFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
 COLEGIO GABRIEL BERTANCOURT MEJÍA ED
 COLEGIO MANUEL DEL SOCORRO RODRÍGUEZ LED



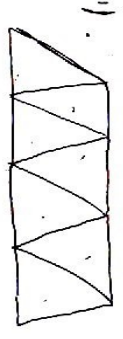
JOHN E. RODRÍGUA / DIEGO A. VELANDIA

TABLA I:

Considere la siguiente secuencia:



- ✓ Dibuje las tres próximas figuras de la secuencia.
- ✓ ¿Cuántos triángulos tendrá la fig. 10, fig. 15, fig. 30, fig. 77?
- ✓ ¿Qué posición dentro de la secuencia ocuparán las figuras con 24, 42 y 100 triángulos?
- ✓ ¿Cuál es el menor número de triángulos que pueden conformar una figura de la secuencia? ¿Cuál el mayor número de triángulos?
- ✓ Determine de qué depende la cantidad de triángulos en cada figura en la secuencia. Explique su respuesta.
- ✓ Si se pudiera representar mediante alguna expresión la dependencia entre la cantidad de triángulos y cada figura en la secuencia, ¿Cuál sería y por qué?



1) Fig 10 = 10 triángulos porque por cada figura
 fig 1 = 1 triángulo
 fig 2 = 2 triángulos
 fig 3 = 3 triángulos
 fig 4 = 4 triángulos
 fig 5 = 5 triángulos
 fig 6 = 6 triángulos
 fig 7 = 7 triángulos
 fig 8 = 8 triángulos
 fig 9 = 9 triángulos
 fig 10 = 10 triángulos

2) Fig 10 = 10 triángulos porque por cada figura
 fig 1 = 1 triángulo
 fig 2 = 2 triángulos
 fig 3 = 3 triángulos
 fig 4 = 4 triángulos
 fig 5 = 5 triángulos
 fig 6 = 6 triángulos
 fig 7 = 7 triángulos
 fig 8 = 8 triángulos
 fig 9 = 9 triángulos
 fig 10 = 10 triángulos

3) $(24) / 42 = 12 / 7$
 24 = posición abaxo = ∇
 42 = posición abaxo ∇
 100 = posición abaxo ∇
 Por que 24 y 42 tienen misma se cuan sion es así
 que sus triángulos comienzan a terminan iguales

sin importar la cantidad de triángulos acervo el no
 no comienza pero no termina igual -
 4) lo menor es 3 triángulos ya que con dos un
 puede pensar 2 casos = I ha otra posición de
 triángulo o si se omite 5 a 1 tener 3 triángulos
 para cubrir lo siguiente



5) depende de cada figura aumenta un triángulo es
 así si la figura 1 y 2 aumenta 1 y 2 triángulos
 siendo la secuencia la figura 23 y 24 tendrán
 cantidad de número mencionado en la figura

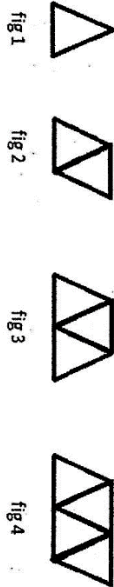
6) Por figuras cambiaría los triángulos por la figura
 en este caso cubierto y tendría en cuenta los
 figura de la cantidad mencionada 5 es expresiones
 numerales sería la (Potencia) o la suma ejemplo
 $1 + 1 = 2$ $1 + 1 + 1 = 3$ cuanto sería si se suman
 once veces = respuesta = 11

o la resta ejemplo $1 - 1 - 1 = -3$ cuanto sería
 si se restaba 5 veces = $1 - 2 = -5$ teniendo en cuenta
 los números sumados o restados en este caso el
 1



TAREA 1:

Considere la siguiente secuencia:



- 1 ✓ Dibuje las tres próximas figuras de la secuencia.
- 2 ✓ ¿Cuántos triángulos tendrá la fig. 10, fig. 15, fig. 30, fig. 77?
- 3 ✓ ¿Cuál posición dentro de la secuencia ocuparán las figuras con 24, 42 y 100 triángulos?
- 4 ✓ ¿Cuál es el menor número de triángulos que puedan conformar una figura de la secuencia? ¿Cuál el mayor número de triángulos?
- 5 ✓ Determine de qué depende la cantidad de triángulos en cada figura en la secuencia. Explique su respuesta.
- 6 ✓ Si se pudiera representar mediante alguna expresión la dependencia entre la cantidad de triángulos y cada figura en la secuencia, ¿Cuál sería y por qué?

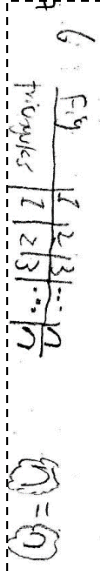


2 por el número de figuras o el mismo número de triángulos
 entre ser 19 Fig 10: 10 triángulos Fig 15: 15 triángulos Fig 30: 30 triángulos
 Fig 77: 77 triángulos

3 que lo miscal que el obr. cada número de figura o el número de triángulos.
 24 triángulos: Fig 24 42 triángulos: Fig 42 100 triángulos

7 por la menor figura ser 19 la 1 por que tiene un triángulo y 19 mayor ser por la figura por la secuencia not tiene 19

5 por el n° de figuras, por el n° de figura o el n° de triángulos
 es 19 Fig 19 24 Fig 24 30 Fig 30 42 Fig 42

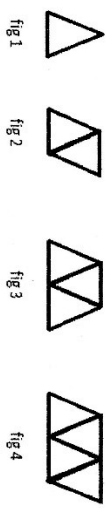


Casa Fuertes - B04 51



TAREA 1:

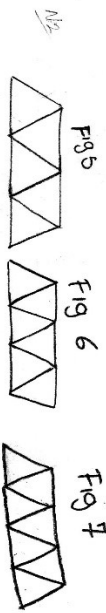
Considere la siguiente secuencia:



- 1 ✓ Dibuje las tres próximas figuras de la secuencia.
- 2 ✓ ¿Cuántos triángulos tendrá la fig. 10, fig. 15, fig. 30, fig. 77?
- 3 ✓ ¿Cuál posición dentro de la secuencia ocuparán las figuras con 24, 42 y 100 triángulos?
- 4 ✓ ¿Cuál es el menor número de triángulos que puedan conformar una figura de la secuencia? ¿Cuál el mayor número de triángulos?
- 5 ✓ Determine de qué depende la cantidad de triángulos en cada figura en la secuencia. Explique su respuesta.
- 6 ✓ Si se pudiera representar mediante alguna expresión la dependencia entre la cantidad de triángulos y cada figura en la secuencia, ¿Cuál sería y por qué?

SOLUCIÓN

tres próximas figuras



✓ Cuantos triángulos tenia la figura.

Fig 10 10 Fig 15 15 Fig 30 30 Fig 77 77

✓ Que posición dentro de la secuencia ocupara la figura con 24, 42, 100 triángulos

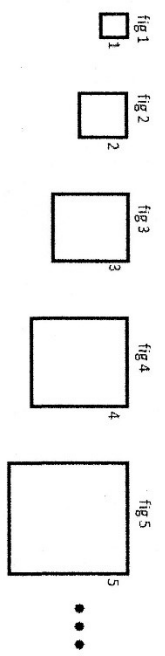
✓ Cual es el menor número de triángulos que puede tener la secuencia El menor número de triángulos es 1 que pertenece a la Fig 1.

✓ Mayor número de triángulos Es infinito puesto que según el número de la figura es el número de triángulos.



TAREA 2:

En la siguiente secuencia se muestran unos cuadrados que van aumentando en tamaño de acuerdo con la longitud de sus lados:



- ✓ Determine la medida del lado de las figuras 6, 7, 10, 15.
- ✓ Si el perímetro de una figura es la suma de la medida de sus lados, ¿Cuál es el perímetro de cada figura anterior?
- ✓ Registre en una tabla el número de la figura, la medida del lado de cada cuadrado y su respectivo perímetro.
- ✓ ¿Qué regularidades encuentra con respecto a los datos de la tabla?
- ✓ ¿Cómo podría hallarse la medida del lado de cualquier figura?
- ✓ ¿Cómo podría hallarse el perímetro del cuadrado de cualquier figura?

✓ Fig 6: Fig 7 Fig 10: 10 Fig 15: 15

Perímetros:

Fig 1: 4 Fig 2: 6 Fig 3: 12 Fig 4: 16 Fig 5: 20

Fig 6: 24 Fig 7: 28 Fig 10: 40 Fig 15: 60

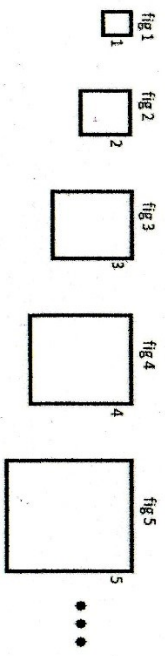
Figura	1	2	3	4	5	6	7	10	15
Medida del lado	1	2	3	4	5	6	7	10	15
Perímetro	4	8	12	16	20	24	28	40	60

- ✓ Según la figura es la medida de ella.
- ✓ Se podría hallar según el perímetro que te den.



TAREA 2:

En la siguiente secuencia se muestran unos cuadrados que van aumentando en tamaño de acuerdo con la longitud de sus lados:



- 1 ✓ Determine la medida del lado de las figuras 6, 7, 10, 15.
- 2 ✓ Si el perímetro de una figura es la suma de la medida de sus lados, ¿Cuál es el perímetro de cada figura anterior?
- 3 ✓ Registre en una tabla el número de la figura, la medida del lado de cada cuadrado y su respectivo perímetro.
- 4 ✓ ¿Qué regularidades encuentra con respecto a los datos de la tabla?
- 5 ✓ ¿Cómo podría hallarse la medida del lado de cualquier figura?
- 6 ✓ ¿Cómo podría hallarse el perímetro del cuadrado de cualquier figura?

Linea 8 muy fyc!! el mismo numero de la figura es lo que mide el lado: Fig 6: 6 lado Fig 7: 7 lado Fig 10: 10 lado Fig 15: 15 lado = lado (medida)

Fig 1: 4 Fig 2: 6 Fig 3: 12 Fig 4: 16 Fig 5: 20

Fig	1	2	3	4	5
medidas de los lados	1	2	3	4	5
perímetro	4	8	12	16	20

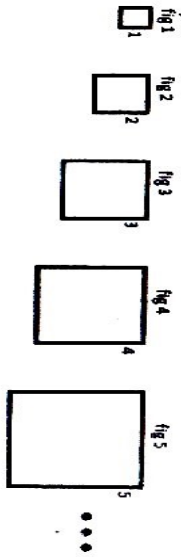
- 4 por el numero de la figura se multiplica por 4 y/o con el numero anterior y se suma es 4+4=8



JOHN E. FORGIA / DIEGO A. VELANDIA

TAREA 2:

En la siguiente secuencia se muestran unos cuadrados que van aumentando en tamaño de acuerdo con la longitud de sus lados:



- ✓ Determine la medida del lado de las figuras 6, 7, 10, 15.
- ✓ Si el perímetro de una figura es la suma de la medida de sus lados, ¿Cuál es el perímetro de cada figura anterior?
- ✓ Registre en una tabla el número de la figura, la medida del lado de cada cuadrado y su respectivo perímetro.
- ✓ ¿Qué regularidades encuentra con respecto a los datos de la tabla?
- ✓ ¿Cómo podría hallarse la medida del lado de cualquier figura?
- ✓ ¿Cómo podría hallarse el perímetro del cuadrado de cualquier figura?

Leidy Aguilera

- 1) La figura 6 = 30cm
 " " " 7 = 37,5cm
 " " " 10 = 40cm
 " " " 15 = 41,5cm
- 2) Fig 1 = 2,0cm
 Fig 2 = 4,0cm
 Fig 3 = 6,0cm
 Fig 4 = 8,0cm
 Fig 5 = 10,0cm

Figura	m	P
1	2,0	2,0
2	4,0	4,0
3	6,0	6,0
4	8,0	8,0
5	10,0	10,0

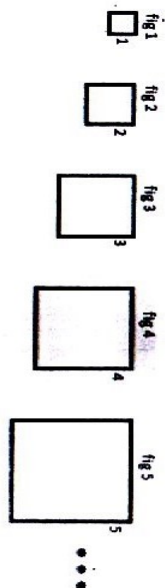
4) Encuentro que el perímetro es de dos en dos y la medida es de 5mm en 5mm



JOHN E. FORGIA / DIEGO A. VELANDIA

TAREA 2:

En la siguiente secuencia se muestran unos cuadrados que van aumentando en tamaño de acuerdo con la longitud de sus lados:



- ✓ Determine la medida del lado de las figuras 6, 7, 10, 15.
- ✓ Si el perímetro de una figura es la suma de la medida de sus lados, ¿Cuál es el perímetro de cada figura anterior?
- ✓ Registre en una tabla el número de la figura, la medida del lado de cada cuadrado y su respectivo perímetro.
- ✓ ¿Qué regularidades encuentra con respecto a los datos de la tabla?
- ✓ ¿Cómo podría hallarse la medida del lado de cualquier figura?
- ✓ ¿Cómo podría hallarse el perímetro del cuadrado de cualquier figura?

Figura	medida
6	30cm
7	37,5cm
10	40cm
15	41,5cm

- 2) Figura = 5
 10,0cm
 Figura 4
 8,0cm
 Figura 3
 6,0cm
 Figura 2
 4,0cm
 Figura 1

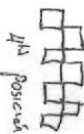
m	P
2,0	2,0
4,0	4,0
6,0	6,0
8,0	8,0
10,0	10,0

4) m = medida de cada lado 2,0cm
 P = Perímetro la suma de todos los lados
 si usando la regla para saber la medida y después la suma de los lados.

Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas



1. Dibuje las figuras correspondientes a la 4ª y 5ª posición.



2. Calcule el número de cuadrados de la figura correspondiente a la 9ª posición

17 cuadrados

.

3. Calcule el número de cuadrados de la figura de la posición 100

199 cuadrados

4. Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

El número de la posición, es un número mayor al de los cuadrados que suman, y después sume el n.º de la posición con un n.º menor a ese. Ej: $1+45=45+44=89$

5. Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadrados que tiene la figura en cualquier posición

Sumar el n.º de la fig por un n.º menor a este, puesto que cada figura va sumando un cuadrado y después uno y así sucesivamente. Ej n.º de cuadrados que suman basados en el n.º de la posición $2=1+1$ $3=2+1$ $4=3+1$... $100=99+1$ y después se suman esos dos números

Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas



1. Dibuje las figuras correspondientes a la 4ª y 5ª posición.



TOME LA POSICION 3 DE HACIA SUME 2 MAS

2. Calcule el número de cuadrados de la figura correspondiente a la 9ª posición

17 sumando todos el cantidad y cada cuatro

.

3. Calcule el número de cuadrados de la figura de la posición 100

99 arriba 100 debajo



4. Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

pues supuse que si busque que depende posición 100 pues viendo un cuadrado arriba y otro debajo den del arriba y su base de 100 arriba

5. Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadrados que tiene la figura en cualquier posición

mirando los cuantos que puede tener arriba, o abajo de acuerdo a la posición de cada figura la cuenta como base y arriba uno menos.

Utilice la siguiente grafica para responder las preguntas formuladas



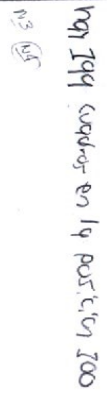
1. Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición



2. Calcule el número de cuadros de la figura correspondiente a la 9ª posición



3. Calcule el número de cuadros de la figura de la posición 100



4. Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

Por la forma mas fácil es sabiendo que en los cuadros de cada vez la misma cantidad que en el número posición, y que los cuadros de cada vez siempre tienen un cuadro menos que los cuadros de cada vez más. Fórmula: $F = n^2 - 1$

5. Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición

15

$$F = n^2 - 1$$

Utilice la siguiente grafica para responder las preguntas formuladas



1. Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición



2. Calcule el número de cuadros de la figura correspondiente a la 9ª posición



3. Calcule el número de cuadros de la figura de la posición 100

18

$$F = n^2 - 1$$

4. Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

Fues mire la secuencia y medi de cuenta que a el numero se le sumaba el mismo numero pero se le resta 1. ejemplo: $3 + 3 = 6 - 1 = 5$

5. Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición

19

$$F = n^2 - 1$$

$$6 + 6 - 1 = 11$$

$$12 - 1 = 11$$

Nombre Julio Pardo Lora

Matrícula 801 Fecha _____

Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas:



fig 1



fig 2

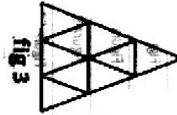


fig 3

1. Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición



2. Calcule el número de triángulos pequeños de la figura correspondiente a la 9ª posición

45 Triángulo Boca arriba
 36 Triángulos Boca abajo
 81 Triángulos totales

Tomado de: González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la motricidad: Una propuesta didáctica basada en el pensamiento y resolución de problemas*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

3. Llena la tabla con los siguientes datos

Número de la figura	Número de triángulos pequeños
Figura 1	1
Figura 2	4
Figura 3	9
Figura 4	16
Figura 5	25
Figura 50	2500
Figura 253	63909
Figura 399	128881

Handwritten calculations for the table:

$$\begin{array}{r} 1^2 = 1 \\ 2^2 = 4 \\ 3^2 = 9 \\ 4^2 = 16 \\ 5^2 = 25 \\ \vdots \\ 50^2 = 2500 \\ 253^2 = 63909 \\ 399^2 = 128881 \end{array}$$

4. Escriba la fórmula que sirve para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

El número de la figura al cuadrado

5. Escriba una fórmula que sirve para encontrar la cantidad de triángulos pequeños que tiene una figura en cualquier posición

n^2 Eleva al Né de la figura al cuadrado

Tomado de: González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la motricidad: Una propuesta didáctica basada en el pensamiento y resolución de problemas*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Nombre Walter Alfonso Martínez Curso 803 Fecha 16 de noviembre

Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas



fig 1

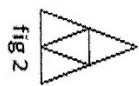


fig 2

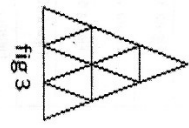
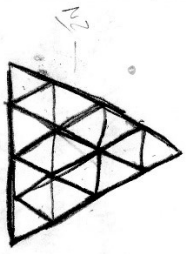


fig 3

1. Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición



2. Calcule el número de triángulos pequeños de la figura correspondiente a la 9ª posición

Triángulos pequeños por en la posición 9
81

Tomado de: González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

3. Llena la tabla con los siguientes datos

Número de la figura	Número de triángulos pequeños
Figura 1	1
Figura 2	4
Figura 3	9
Figura 4	16
Figura 9	81
Figura 50	2500
Figura 253	63909
Figura 359	128881

4. Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior

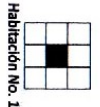
Forma de la figura
 $F = n^2$
 por n es la fórmula, sabiendo que multiplicando el número de la figura por el mismo y me da el número de triángulo

5. Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de triángulos pequeños que tiene una figura en cualquier posición

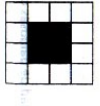
$F = \text{Número de la figura}$
 $F \cdot F$

Tomado de: González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Observa el piso de las siguientes habitaciones y las baldosas que lo forman



Habitación No. 1

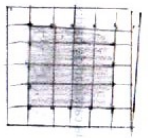


Habitación No. 2



Habitación No. 3

1. Dibuja la Habitación que sigue



El número de la habitación según la cantidad de baldosas que se necesitan para formar la habitación.

2. Llena la tabla con los siguientes datos

Habitación	Número total de baldosas	Número de baldosas Oscuras	Número de baldosas blancas
Habitación No. 1	9	1	8
Habitación No. 2	16	5	11
Habitación No. 3	25	9	16
Habitación No. 4	36	16	20
Habitación No. 20	410	41	369
Habitación No. 100	115200	320	114880
Habitación cualquiera	52	20	32

3. ¿Cómo se va obteniendo el número total de baldosas?

multiplicando y sumando la cantidad

4. ¿Cómo se va obteniendo el número de baldosas oscuras?

multiplicando la cantidad de el No. por la misma cantidad

5. ¿Cómo se van obteniendo el número de baldosas blancas?

Aumentamos 4 baldosas por cada espacio.

a. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad total de baldosas de esa habitación?

multiplicamos por el No de la habitación más los baldos blancos

b. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas oscuras para esa habitación?

multiplicamos la cantidad o sea el número de habitaciones.

c. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas blancas para esa habitación?

sumamos y nos da la cantidad de baldosas que se pide

7. Escribe una operación con la que se pueda encontrar:

a. La cantidad total de baldosas para cualquier habitación

$$\boxed{x} \times \boxed{x} + \boxed{x} = \boxed{x}$$

No. habitaciones. \times baldos blancos = Cantidad de baldosas de la habitación.

b. La cantidad de baldosas oscuras para esa habitación

$$\boxed{x} \times \boxed{x} = \boxed{x}$$

No. habitaciones \times baldos oscuras = X: valor de baldosas oscuras.

c. La cantidad de baldosas blancas para esa habitación

$$\boxed{x} \div \boxed{x} = \boxed{x}$$

Cant. de baldos blancos \div No. habitaciones = X: valor de baldosas blancas

Observa el piso de las siguientes habitaciones y las baldosas que lo forman



1. Dibuja la Habitación que sigue



2. Llena la tabla con las siguientes de N O

Habitación No.	Numero total de baldosas	Numero de baldosas Oscuras	Numero de baldosas blancas
Habitación No. 1	9	1	8
Habitación No. 2	25	4	21
Habitación No. 3	25	9	16
Habitación No. 4	36	9	27
Habitación No. 20	100	100	0
Habitación No. 100	10000	10000	0
Habitación cualquiera	$L \cdot L$	$H \cdot H$	$N - O$

3. ¿Cómo se va obteniendo el número total de baldosas?
 por multiplicando las baldosas verticales por las baldosas horizontales externas

4. ¿Cómo se va obteniendo el número de baldosas oscuras?
 por multiplicando el número de baldosas oscuras por el número de baldosas blancas

5. ¿Cómo se van obteniendo el número de baldosas blancas?
 por el número total de baldosas menos las baldosas oscuras y el resultado es el número de baldosas blancas

a. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad total de baldosas de esa habitación?

por si las baldosas y los lados son iguales de baldosas se multiplica por el mismo y nos nos da el resultado

b. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas oscuras para esa habitación?

por se le resta las primeras baldosas de los 4 lados y nos quedan las baldosas negras, si es como lo estamos viendo antes

c. ¿Cómo se puede encontrar la cantidad de baldosas blancas para esa habitación?

por el número total de baldosas se resta las baldosas negras y nos queda el resultado. O se le suman las baldosas externas (4 de los lados) y posteriormente esa son las blancas

7. Escriba una operación con la que se pueda encontrar:

a. La cantidad total de baldosas para cualquier habitación

$L \cdot L$

$L =$ baldosas de cualquier habitación

b. La cantidad de baldosas oscuras para esa habitación

por se multiplica el número de baldosas por si mismo $H \cdot H$

c. La cantidad de baldosas blancas para esa habitación

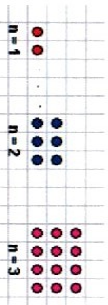
$T - N = B$

$N =$ baldosas oscuras $T =$ total de baldosas $B =$ baldosas blancas

El número total de baldosas se resta las baldosas oscuras y nos queda el resultado

$T - O = N$

Observe la siguiente secuencia



1. Dibuje la figura que sigue en la secuencia

Se le sigue una fila y columna a la medida que avanzan en la secuencia

2. Describa las figuras de la secuencia como si lo hiciera para alguien que está en el mismo salón pero que no lo ha visto. Haga su descripción de tal forma que esa persona pueda luego dibujar la secuencia.

Se le aumenta una columna conforme avanzan las figuras, además de eso, hace antes hay tantas pepitas como el n de la figura y horizontalmente es un n mayor a la figura. Ej:

$n=5$ Vertical = 50
Horizontal = 60

3. Escriba una regla que ayude a construir la secuencia

El n de figura es igual a la altura de la secuencia, y horizontalmente es un n mayor al de la figura

4. Llene la tabla con los siguientes datos

Posición	Número de puntos en la base	Número de puntos en la altura	Número total de puntos
$n=1$	1	1	2
$n=2$	2	2	6
$n=3$	3	3	12
$n=4$	4	4	20
$n=20$	20	20	420
$n=100$	100	100	10100
Cualquier posición $n=33$	33	33	702

5. ¿cuántos puntos se necesitan para la figura $n=10$ y $n=37$?

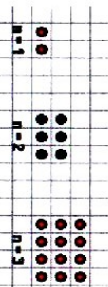
Figura $n=10$: 110
 $n=37$: 1402

6. Escriba una fórmula matemática que sirva para hallar la cantidad de puntos en cualquier posición de la secuencia.

No figura es igual a la altura y un n menor de la base se multiplica base por altura para llegar a la conclusión final.

Fig $x = x \cdot x + 1 = y$

Observe la siguiente secuencia



1. Dibuje la figura que sigue en la secuencia

Por que si es el numero cuatro se abre otra fila sea 5 y de largo se abra el mismo

2. Describa las figuras de la secuencia como si lo hiciera para alguien que está en el mismo salón pero que no lo ha visto. Haga su descripción de tal forma que esa persona pueda luego dibujar la secuencia.

Para describir la secuencia para otra persona que no ha visto esta secuencia, le diria que para describir la secuencia de un multiplicar el número de puntos en la base por el número de altura

3. Escriba una regla que ayude a construir la secuencia

Multiplicar el número de base de puntos por el número de altura, y hacer sucesivamente para cada secuencia, ejemplo, o también el n multiplicarlo por el mismo aumentando 1 ejemplo $n^2 = 2 \times 3 = 6$

4. Llene la tabla con los siguientes datos

Posición	Número de puntos en la base	Número de puntos en la altura	Número total de puntos
$n=1$	1	1	2
$n=2$	2	2	6
$n=3$	3	3	12
$n=4$	4	4	20
$n=20$	20	20	420
$n=100$	100	100	10100
Cualquier posición $n=10$	10	10	160

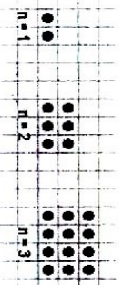
5. ¿cuántos puntos se necesitan para la figura $n=10$ y $n=37$?

$n=10$ Puntos base 10 Total 110
 $n=37$ Puntos base 37 Total 1506

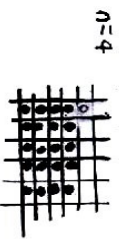
6. Escriba una fórmula matemática que sirva para hallar la cantidad de puntos en cualquier posición de la secuencia.

1 Paso = multiplicar el número de la posición por el número de la base. Se le aumenta 1 a cada posición

Observe la siguiente secuencia



1. Dibuja la figura que sigue en la secuencia



2. Describa las figuras de la secuencia como si lo hiciera para alguien que está en el mismo salón pero que no lo ha visto. Haga su descripción de tal forma que esa persona pueda luego dibujar la secuencia.

$n=1$ dos círculos en fila
 $n=2$ dos filas de tres círculos en las partes de arriba y abajo
 $n=3$: tres veces cuatro círculos en las partes de arriba y abajo
 $n=4$: cuatro veces cinco círculos en las partes de arriba y abajo

3. Escriba una regla que ayude a construir la secuencia

para cada el número que equivale n se multiplica por sí mismo y se le suma el valor mismo de n .

n^2

4. Llena la tabla con los siguientes datos

Posición	Número de puntos en la base	Número de puntos en la altura	Número total de puntos
$n=1$	1	1	1
$n=2$	2	2	4
$n=3$	3	3	9
$n=4$	4	4	16
$n=20$	21	20	420
$n=100$	101	100	10100
Cualquier posición n	$n+1$	n	$(n+1)n$

5. ¿cuántos puntos se necesitan para la figura $n=10$ y $n=37$?

se necesitan 110 puntos para $n=10$ y se necesitan 1406 puntos para $n=37$

n^2

6. Escriba una fórmula matemática que sirva para hallar la cantidad de puntos en cualquier posición de la secuencia.

$(n+1)n$

$(n+1)n$

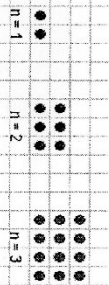
otra es la fórmula o otra es otra fórmula

n^2

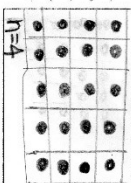
Nombre Luisa Fernanda Fuentes Alarcón

Curso 801 Fecha 19/11/2014

Observe la siguiente secuencia



1. Dibuja la figura que sigue en la secuencia



2. Describa las figuras de la secuencia como si lo hiciera para alguien que está en el mismo salón pero que no lo ha visto. Haga su descripción de tal forma que esa persona pueda luego dibujar la secuencia.

Se empieza con 4 puntos que son $n=1$ y cada vez que voy cambiando a la otra figura voy aumentando un punto hacia arriba y uno hacia el lado en este caso la figura $n=4$ tendría 4 hacia arriba y 3 hacia el lado y así sucesivamente. Es $n=5$ tendría 5 hacia arriba y 4 hacia el lado.

3. Escriba una regla que ayude a construir la secuencia

Siempre tiene que ir aumentando su número de puntos, se le debe sumar una hacia arriba y otro hacia el lado.

n^2

4. Llena la tabla con los siguientes datos

Posición	Número de puntos en la base	Número de puntos en la altura	Número total de puntos
$n=1$	1	1	1
$n=2$	2	2	4
$n=3$	3	3	9
$n=4$	4	4	16
$n=20$	21	20	420
$n=100$	101	100	10100
Cualquier posición n	31	30	930

5. ¿cuántos puntos se necesitan para la figura $n=10$ y $n=37$?

$n=10$ 110 Puntos se necesitan
 $n=37$ 1406 Puntos se necesitan.

n^2

6. Escriba una fórmula matemática que sirva para hallar la cantidad de puntos en cualquier posición de la secuencia.

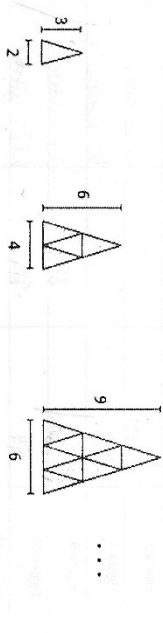
Multiplicando base por altura

Es $n \cdot n+1$
 base altura
 $21 \cdot 20 = 420$

n^2

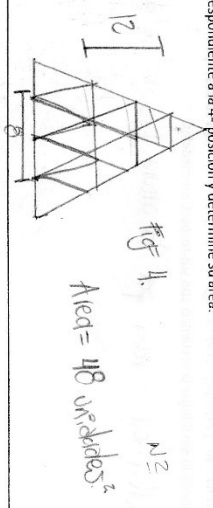
Nombre: Florencia Alexandra Hernández Rios Curso: 802 Fecha: 11/11/14

Teniendo en cuenta que el área de un triángulo es el producto de la medida de su base por su altura, dividida en dos. Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas



Área = 3 unidades² Área = 12 unidades² Área = 27 unidades²

1. Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición y determine su área.



2. Calcule las medidas de los triángulos de la figura correspondiente a la 9ª posición y determine su área.

El área de la figura 9. $Área = 243$

3. Calcule las medidas de los triángulos de la figura de la posición 30 y determine su área.



Tomado de: González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Pentamiento y Resolución de problemas.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

4. Llena la tabla con los siguientes datos

Posición	Medida de la base	Medida de la altura	Área
Figura 1	2	3	3 ²
Figura 2	4	6	12 ²
Figura 3	6	9	27 ²
Figura 4	8	12	48 ²
Figura 9	18	27	243 ²
Figura 47	94	141	6617 ²
Figura 110	220	330	36300 ²
Figura n	2n	3n	(6n) ²

5. Describa las figuras de la secuencia como si lo hiciera para alguien que está en el mismo salón pero que no las ha visto y explique cómo ha llegado a sus respuestas. Haga su descripción de tal forma que esa persona pueda luego dibujar la secuencia con sus respectivas medidas.

Figura 1 = base: 2 Triángulo que se va haciendo cada vez más grande y más ancho que el anterior.
 Figura 2 = base: 4 Triángulo que se va haciendo cada vez más grande y más ancho que el anterior.
 Figura 3 = base: 6 Triángulo que se va haciendo cada vez más grande y más ancho que el anterior.
 Figura 4 = base: 8 Triángulo que se va haciendo cada vez más grande y más ancho que el anterior.
 Figura 9 = base: 18 Triángulo que se va haciendo cada vez más grande y más ancho que el anterior.
 Figura 47 = base: 94 Triángulo que se va haciendo cada vez más grande y más ancho que el anterior.
 Figura 110 = base: 220 Triángulo que se va haciendo cada vez más grande y más ancho que el anterior.
 Figura n = base: 2n Triángulo que se va haciendo cada vez más grande y más ancho que el anterior.

6. Escriba y explique una fórmula matemática que sirva para encontrar las medidas de los triángulos en la base, en la altura y el área que tiene una figura en la posición n.

medida de la base: $2n$
 medida de la altura: $3n$
 el área es: $(2n) \cdot (3n) \div 2$

Tomado de: González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Pentamiento y Resolución de problemas.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Nombre Santiago Parde Lara Curso 8o1 Fecha _____

Teniendo en cuenta que el área de un triángulo es el producto de la medida de su base por su altura, dividido en dos. Utilice la siguiente gráfica para responder las preguntas formuladas

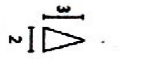


fig 1

Área = 3 unidades²



fig 2

Área = 12 unidades²

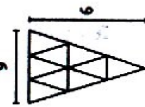
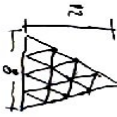


fig 3

Área = 27 unidades²

... Fig n

1. Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición y determine su área.



Área = $12 \cdot 8 = 96 \div 2 = 48$ unidades²

2. Calcule las medidas de los triángulos de la figura correspondiente a la 9ª posición y determine su área.

Altura = 17
Base = 18

Área = $17 \cdot 18 = 306 \div 2 = 153$ unidades²

3. Calcule las medidas de los triángulos de la figura de la posición 30 y determine su área.

Altura = 80
Base = 60

Área = $80 \cdot 60 = 4800 \div 2 = 2400$

Ya que la altura es igual a 3 veces el No de la figura, y la base 2 veces el No de la figura

fig 30 = $3 \times 30 \cdot 2 \times 30 \div 2 = 2700$

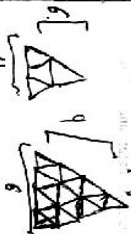
Tomado de: González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá

4. Llena la tabla con los siguientes datos

Posición	Medida de la base	Medida de la altura	Área
Figura 1	2	3	3
Figura 2	4	6	12
Figura 3	6	9	27
Figura 4	8	12	48
Figura 9	18	27	243
Figura 47	94	141	6627
Figura 130	270	330	36300
Figura n	14	21	147

5. Describa las figuras de la secuencia como si lo hiciera para alguien que está en el mismo salón pero que no las ha visto y explique cómo las llegaba a sus semejantes. Llegó su descripción de tal forma que esa persona pueda luego dibujar la secuencia con sus respectivas medidas.

Hoy una secuencia de triángulos con debe allar la medida de la base y altura y junto a eso debe allar el área de cada figura.



allar la siguiente figura n.

6. Escriba y explique una fórmula matemática que sirva para encontrar las medidas de los triángulos en la base, en la altura y el área que tiene una figura en la posición n.

La medida para encontrar esto es n^2 luego volver a multiplicar multiplicar el A de la figura n^2 luego volver a multiplicar el A de la figura por (3) luego de ya tendríamos b y A solo faltaba multiplicar (b.A) y luego $\div 2$. $\leftarrow 1 \cdot 3^2 = 9$ $\leftarrow 4 \cdot 6 = 24$ $\leftarrow 4 \cdot 6 = 24$

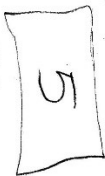
Tomado de: González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá

Nombre Bryan David Mateus Garcia curso 803 Fecha 12/04/2021 Edad 14 años

Leonardo y Carolina participan en la rifa de boletas para ingresar a las funciones de un festival de cine. Las boletas están guardadas en sobres, cada uno de los cuales contiene el mismo número de boletas. Leonardo, quien ya tenía 7 boletas, ganó 1 sobre y Carolina, quien ya tenía 2 boletas, ganó 2 sobres. Si ahora los dos quedan con el mismo número de boletas, ¿cuántas boletas contiene cada sobre? ...

Resuelva este problema, ¡sin usar álgebra!

Nombre	N. Boletas	N. Sobres
Leonardo	7	1
Carolina	2	2



En cada sobre hay 5 boletas.

Porque si Leonardo tiene 7

Boletas y gana un sobre.

5 son 12, y Carolina que

tiene 2 boletas y se

gana 2 sobres son 12.

Nombre Luisa Fernanda Fuentes Arce curso 804 Fecha 12/11/2021 Edad 12

Leonardo y Carolina participan en la rifa de boletas para ingresar a las funciones de un festival de cine. Las boletas están guardadas en sobres, cada uno de los cuales contiene el mismo número de boletas. Leonardo, quien ya tenía 7 boletas, ganó 1 sobre y Carolina, quien ya tenía 2 boletas, ganó 2 sobres. Si ahora los dos quedan con el mismo número de boletas, ¿cuántas boletas contiene cada sobre? ...

Resuelva este problema, ¡sin usar álgebra!

Cada sobre tiene 5 boletas

Boletas De Festival De Cine

Leonardo

Gana 1 sobre

El Total De boletas De Leonardo es 12



Carolina

Gana 2 sobres



El Total De boletas De Carolina es 12

Para concluir porque cada sobre tiene cinco boletas empecé mirando desde el número uno y voy mirando que total me daba con los siete de Leonardo y luego miraba si me daba lo mismo con los dos boletas de Carolina. Fuí mirando hasta llegar al número cinco y me di cuenta que ese era el correcto.

Nombre Walter Alfonso Martínez López Fecha 21/11/2020 Edad 14

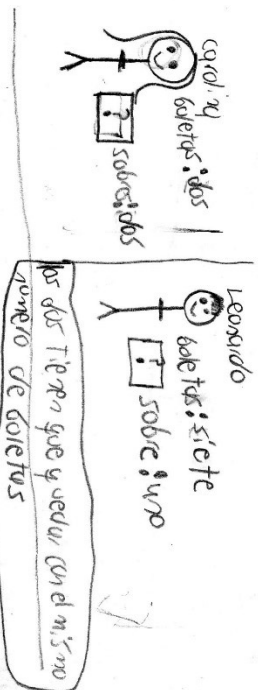
Leonardo y Carolina participan en la rifa de boletas para ingresar a las funciones de un festival de cine. Las boletas están guardadas en sobres, cada uno de los cuales contiene el mismo número de boletas. Leonardo, quien ya tenía 7 boletas, ganó 1 sobre y Carolina, quien ya tenía 2 boletas, ganó 2 sobres. Si ahora los dos quedan con el mismo número de boletas, ¿cuántas boletas contiene cada sobre?

Resuelva este problema, ¡sin usar álgebra!

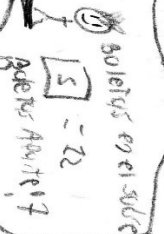
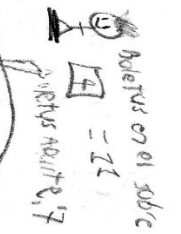
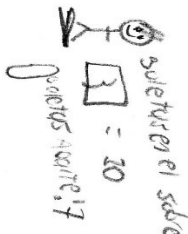
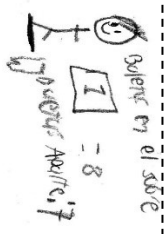
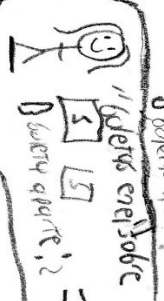
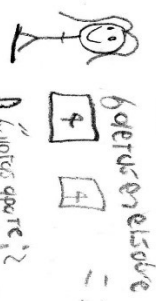
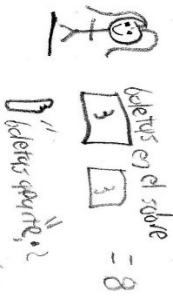
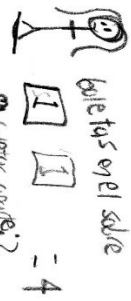
pues sí algo fácil!

Recordando tengo siete boletas, y gano un sobre y que Carolina, quien ya tenía dos boletas, y si gana los dos tiene el mismo número de boletas, pues lo tengo más fácil sin utilizar

Algebra, es ir sumando siete con un número que también de el resultado de quedo con dos números que en este caso sería en número cinco, pues obviamente el siete más cinco da doce y el dos más cinco y más cinco da doce.



Al resolver



Como podemos ver el que más de es el número cinco

O también lo más fácil sería decir que gano el sobre y mi ten, cuantas boletas hay y lo tengo en averiguar cuantas boletas eran r. Fondo o obviamente si fueran en la vida real y obviamente lo dirían que hay cinco boletas en cada sobre